Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

ملخص

كالكولاس 2

إعداد : محمد السفاريني

مجنة سيغلتي

التفاضل و التكامل ٢

محمد المسفاريني

* Integration by parts "التكامل بالأجزاء"

⊛ نستخدمه عندما يفشل التكامل بالتعويض أو التكاملات المباشرة التي أخذت في كالكولس ١ .

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du}$$

Example :- Find $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin(x)}_{dv} \cdot dx$?

* يمكن جعل $u = \sin(x)$, $dv = x$ لكنه سيكون أكثر صعوبة .

* الإقتران الذي يُسهل إشتقاقه نفرضه u
* الإقتران الذي يُسهل تكامله نفرضه dv

$u = x$ $\quad$ $dv = \sin(x)$

$du = 1$ $\quad$ $v = -\cos(x)$

$\oplus$ $\quad$ $-\int$

$$-x\cos(x) + \int \cos(x)\cdot dx$$

$$\boxed{-x\cos(x) + \sin(x) + c}$$

* وظيفة التكامل بالأجزاء تحويل السؤال من تكامل لا نستطيع إيجاده إلى تكامل مباشر .

Example :- Find $\int \underbrace{x^2}_{dv} \underbrace{\ln(x)}_{u} dx$?

* لا يمكنني فرض $dv = \ln(x)$ لأنني لا أعرف تكامله فالفرض هنا إجباري .

$u = \ln(x)$ $\qquad$ $dv = x^2$

$+$ $\qquad$ $-\int$

$du = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $V = \frac{x^3}{3}$

$$\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 \cdot dx$$

$$\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c}$$

xample :- Find $\int x^3 e^x \cdot dx$?

* يمكن حله بالطريقة السابقة لكن الحل سيكون طويل ومعقد لذلك يوجد طريقة اسمها "طريقة الشجرة"

u		dv
x^3		e^x
$3x^2$	$+$	e^x
$6x$	$-$	e^x
6	$+$	e^x
0	$-$	e^x

$$\boxed{x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c}$$

* الطريقة هذه تضبط فقط لـ كثيرات حدود مضروبة بإقترانات .

سيغلتي

للسنوات

Example :- Find $\int \tan^{-1}(x) \cdot dx$?

$u = \tan^{-1}(x)$ $\qquad$ $dv = 1$

$+$

$du = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $v = x$

$-\int$

$$x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{\boxed{2}x}{x^2+1}$$

$$\boxed{x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c}$$

Example :- Find $\int x\,2^x \cdot dx$?

$u = x$ $\qquad$ $dv = 2^x$

$+$

$du = 1$ $\qquad$ $v = \dfrac{2^x}{\ln 2}$

$-\int$

$$\frac{2^x x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{2^x x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c}$$

Example :- Find $\int \ln(x^2+1) \cdot dx$? للسنوات

$u = \ln(x^2+1)$ $\quad\quad$ $dv = 1$

$du = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad\quad$ $v = x$

$\oplus \quad -\int$

$$x \ln(x^2+1) - \underbrace{\int \frac{2x^2}{x^2+1} \cdot dx}$$

سيتم حله
في الكسور الجزئية

Example :- Find $\int \cos(\ln x) \cdot dx$? مهم للسنوات

$u = \cos(\ln x)$ $\quad\quad$ $dv = 1$

$du = -\dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$ $\quad\quad$ $v = x$

$\oplus \quad -\int$

$$x \cos(\ln(x)) + \underbrace{\int \sin \ln(x) \cdot dx}$$

تكامل بالأجزاء

$u = \sin(\ln(x))$ $\quad\quad$ $dv = 1$

$du = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$ $\quad\quad$ $v = x$

$\oplus \quad -\int$

$$x \sin \ln(x) - \underbrace{\int \cos(\ln(x)) \cdot dx}$$

تكامل دوري

$$\int \cos \ln(x) \cdot dx = \boxed{\frac{x \cos \ln(x) + x \sin(\ln(x))}{2}}$$

Example :- Find $\int_0^2 \frac{x}{e^{2x}} \cdot dx$? للسنوات

$u = x \qquad dv = e^{-2x}$

$du = 1 \qquad v = -\frac{e^{-2x}}{2}$

طريقة ①

or

u	dv
x	e^{-2x}
1	$-\frac{e^{-2x}}{2}$
0	$\frac{e^{-2x}}{4}$

مختصرة

$$-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\Bigg]_0^2 = -\frac{2e^{-4}}{2} - \frac{e^{-4}}{4} - \left(0 - -\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{5e^{-4}}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{5e^{-4}}{4}}$$

* Trigonometric Integrals

" تكامل الاقترانات المثلثية "

* القسم الأول ⇐

$$\int \sin^n(x)\cdot dx = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\cdot dx$$

إذا لم تكن عندك الرغبة لحفظ القانون أعلاه ⇐

$n=1 \longrightarrow$ تكامل مباشر

$n=2 \longrightarrow$ استخدم المتطابقة

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$n=3 \longrightarrow$ نفككها إلى $\sin(x)(1-\cos^2(x))$

ثم نفرض $y=\cos(x)$ ونكمل الحل

$n=4 \longrightarrow$ استخدم المتطابقة

$$\sin^4(x) = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2$$

* وهكذا نكمل باقي قيم n .

$$\int \cos^n(x)\cdot dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\cdot dx$$

إذا لم تكن عندك الرغبة لحفظ القانون أعلاه ⇐

$= 1$ → تكامل مباشر

$n = 2$ → استخدم المتطابقة

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$n = 3$ → فكك المقدار الى

$$\cos(x)\,(1 - \sin^2(x))$$

ثم افرض $y = \sin(x)$ وأكمل الحل

$n = 4$ → استخدم المتطابقة

$$\cos^4(x) = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2$$

ونكمل باقي قيم n على هذا النسق .

Example :- find $\int \cos^4(2t) \cdot dt$?

$\underline{n = 4}$

$$\int \left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right)^2 \cdot dt$$

$$\frac{1}{4} \int (1 + \cos(4t))^2 \cdot dt$$

$$\frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(4t) + \underline{\cos^2(4t)}) \cdot dt$$

$$\frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos(4t) + \frac{1}{2}(1 + \cos(8t))\right] \cdot dt$$

$$\frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos(4t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(8t)\right] \cdot dt$$

$$+\left[\frac{3}{2}t + + \frac{1}{2}\sin(4t) + \frac{1}{16}\sin(8t)\right]$$

Example :- find $\int \cos^2(3x)\cdot dx$? سنوات

$$\int \left(\frac{1+\cos(6x)}{2}\right)\cdot dx$$

$$\int \frac{1}{2}\cdot dx + \frac{1}{2}\int \cos(6x)\cdot dx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}x + \frac{\sin(6x)}{12} + c}$$

* Integrals of the form $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\cdot dx$

* m = أي عدد $n = 1 \Rightarrow$ افرض $y = \sin(x)$

* n = أي عدد $m = 1 \Rightarrow$ افرض $y = \cos(x)$

* m = عدد زوجي n = عدد زوجي $\boxed{m=n}$

الطريقة الأولى :- نجمعهم في قوس واحد ثم نستخدم متطابقة $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ ونكمل الحل

n = عدد زوجي $\qquad$ n = عدد ~~فردي~~ زوجي $\qquad \boxed{m \neq n}$

الطريقة الأولى :- نستخدم متطابقة ونكمل الحل

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

الطريقة الثانية :- نجعل الشيء الذي له قوة أكبر نفس قوة الشيء الآخر ونستخدم المتطابقة $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ والشيء الذي أخرجناه نستخدم المتطابقة

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$\boxed{m = n}$

* m = عدد فردي $\qquad$ n = عدد فردي

اخفض الشيء الذي تريده وأكمل الحل

$\boxed{m \neq n}$

* m = عدد فردي $\qquad$ n = عدد فردي

اخفض الشيء الذي تريده وأكمل الحل

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

$m =$ عدد فردي أو عدد زوجي

$n =$ عدد فردي أو عدد زوجي

المهم هو اختلاف النوع

* افحص الشيء الذي له قوة لو طرحنا منها واحد تعطي عدد فردي وأكمل الحل .

* القسم الثاني ←

$$\int \tan^{n}(x)\,.\,dx = \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x)\,.\,dx$$

* لو لم تكن عندك الرغبة لحفظ القانون أعلاه ←

$\boxed{n = 1}$ → تكامل مباشر

$\boxed{n = 2}$ → استخدم المطابقة
$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

$\boxed{n = 3}$ → نفكك المقدار إلى
$\tan(x)\tan^2(x)$
ثم نستخدم متطابقة
$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$
ثم نوزع التكامل

$$\underbrace{\int \tan(x)\sec^2(x)}_{\text{تكامل بالتعويض}} - \underbrace{\int \tan(x)\,.\,dx}_{\text{تكامل مباشر}}$$

$$\int \sec^n(x)\cdot dx = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\cdot dx$$

* إن كنت لا ترغب بحفظ القانون أعلاه ⇐

$\boxed{n=1}$ ⇒ تكامل مباشر

$\boxed{n=2}$ ⇒ تكامل مباشر

$\boxed{n=3}$ ⇒ نفكك المقدار إلى

$$\int \sec(x)\sec^2(x)\,dx = \int \sec(x)\tan^2(x) + \int \sec(x)$$

$\boxed{n=4}$ ⇒ نفكك المقدار إلى

$$\int \sec^2(x)(\tan^2(x)-1)\cdot dx$$

ثم افرض $y=\tan(x)$ وأكمل الحل

⊛ ملاحظة ⟵ لو كانت $\underline{\underline{n=4}}$ في $\int \tan^n(x)\cdot dx$

استخدم المتطابقة $\tan^2(x)=\sec^2(x)-1$

$$\int (\sec^2(x)-1)^2\cdot dx$$

$$\underbrace{\int \sec^4(x)\,dx}_{\text{تم شرحه}} - 2\underbrace{\int \sec^2(x)\cdot dx}_{\text{مباشر}} + \underbrace{\int 1\cdot dx}_{\text{مباشر}}$$

Integrals of the form $\int \tan^{m}(x) \sec^{n}(x) \cdot dx$

$m = 1 \quad n = 1 \longrightarrow$ افرض $y = \sec(x)$
وأكمل الحل

* $n =$ أي عدد $\quad m = 1 \longrightarrow$
افرض $y = \sec(x)$ لكن
يجب أن نزيل من $\sec^{n}(x)$
حتى يتوفر عنا $\int \sec(x) \tan(x) \sec^{n-1}(x)$

* $m =$ أي عدد $\quad n = 1 \Rightarrow$
استخدم متطابقة $\tan^{2}(x) = \sec^{2}(x) - 1$ ثم أكمل الحل

* $n =$ عدد زوجي $\quad m =$ أي عدد $\Rightarrow$
افرض $y = \tan(x)$ ثم أكمل الحل

* $m =$ أي عدد $\quad n =$ عدد فردي $\Rightarrow$
افرض $y = \sec(x)$ لكن
يجب ازالة $\sec(x)$
ثم أكمل الحل

* $m =$ عدد فردي $\quad n =$ أي عدد $\Rightarrow$
افرض $y = \sec(x)$ لكن
يجب ازالة $\tan(x)$
ثم أكمل الحل

Integrals of the form

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\cdot dx$$

$$\int \sin(mx)\sin(nx)\cdot dx$$

$$\int \cos(mx)\cos(nx)\cdot dx$$

نستخدم هذه المتطابقات ⟸

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A-B) + \sin(A+B)\right]$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

* الترتيب مهم جداً.

محمد المسفاريني

Scanned by CamScanner

* ملاحظة ⇐

قواعد $\int \sec(x) \cdot dx$ و قواعد $\int \sec^n(x) \tan^m(x) \cdot dx$

و قواعد $\int \tan(x) \cdot dx$ تنطبق تماما على

$csc(x)$ و $cot(x)$.

للسنوات

Example :- Find $\int \sin(6x) \cos(2x) \cdot dx$?

$$\frac{1}{2} \int \left[\sin(4x) + \sin(8x)\right] \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{-\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(8x)}{16} + c}$$

للسنوات

Example :- Find $\int \tan(x) \sec^3(x) \cdot dx$?

$$y = \sec(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec(x) \tan(x)$$

$$\frac{dy}{\sec(x) \tan(x)} = dx$$

$$\int \frac{\cancel{\tan(x) \sec(x)}\, y^2}{\cancel{\sec(x) \tan(x)}}\, dy$$

$$\int y^2 \cdot dy = \frac{1}{3} y^3 + c$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \sec^3(x) + c}$$

xample :- Find $\int \sec^2(x) \sqrt[3]{\tan(x)} \cdot dx$? للسنوات

$y = \tan(x)$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x)$

$\frac{dy}{\sec^2(x)} = dx$

$\int \frac{\sec^2(x) \sqrt[3]{y}}{\sec^2(x)} dy$

$\int y^{\frac{1}{3}} \cdot dy = \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} + c$

$\boxed{\frac{3}{4} (\tan(x))^{\frac{4}{3}} + c}$

Example :- للسنوات

The suitable substitution for evaluating

$\int \cot^5(x) \csc^7(x) \cdot dx$?

$\boxed{y = \csc(x)}$

Example :- للسنوات

The suitable substitution for evaluating

$\int \sin^8(x) \cos^7(x) \cdot dx$?

$\boxed{y = \sin(x)}$

xample :- Find $\int \sin^{-1}(x) \cdot dx$?

د. حامد

$u = \sin^{-1}(x)$ $\quad\quad$ $dv = 1$

$+$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\quad$ $v = x$

$-\int$

$$x \sin^{-1}(x) - \int \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot dx$$

تكامل بالتعويض

$y = 1 - x^2$

$\frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{-dy}{2x} = dx$

$$\int \frac{-x}{\sqrt{y}} \frac{dy}{2x}$$

$$-\frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy$$

$$-\sqrt{y} + c$$

$$-\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{x \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2} + c}$$

د. ميلسم

Example :- Find $\int (x-1)^3 \cos(x) \cdot dx$?

u	du
$(x-1)^3$	$\cos(x)$
$3(x-1)^2$	$\sin(x)$
$6(x-1)$	$-\cos(x)$
6	$-\sin(x)$
0	$\cos(x)$

$$= \boxed{(x-1)^3 \sin(x) + 3(x-1)^2 \cos(x) - 6(x-1)\sin(x) - 6\cos(x) + C}$$

م. آخر

Example :- Find $\int \cos(x) \cdot \ln(\cos(x)) \cdot dx$?

$u = \ln|\cos(x)|$ $\qquad\qquad$ $dv = \cos(x)$

$\oplus$

$du = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ $\qquad -\int$ $\qquad$ $v = \sin(x)$

$$\sin(x)\ln|\cos(x)| + \int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \cdot dx$$

$$+ \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x)\ln|\cos(x)| + \int \sec(x) \cdot dx - \int \cos(x) \cdot dx$$

$\ldots(x)\ln|\cos(x)| + \ln|\sec(x) + \tan(x)| - \sin(x)$

Example :- Suppose that $f(1) = f'(1)$ سنوات

$f(0) = 2$ and f'' is continuous

Find $\int_0^1 x\, f''(x) \cdot dx$?

$u = x \qquad dv = f''(x)$

$du = 1 \qquad v = f'(x)$

$x f'(x) - \int f'(x) \cdot dx$

$x f'(x) - f(x) \Big]_0^1$

$f'(1) - f(1) - [0 - f(0)] = f(0) = \boxed{2}$

محمد السفاريني

Trigonometric Substitutions

⊛ اذا وجدنا في المتكامل هذا المقدار $\boxed{a^2 - x^2}$ ⇐

استخدم هذا التعويض $\underline{\underline{x = a\sin(\theta)}}$

د. حامد

Example :- Find $\int \sqrt{4 - x^2} \cdot dx$?

نلاحظ وجود المقدار $a^2 - x^2$ داخل الجذر

لذلك نستخدم الفرض $\boxed{x = 2\sin\theta}$

الشتق الطرفين ⇐

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= 2\cos\theta \\ dx &= 2\cos(\theta)\, d\theta \end{aligned}}$$

نذهب للسؤال ونعوض ⇐

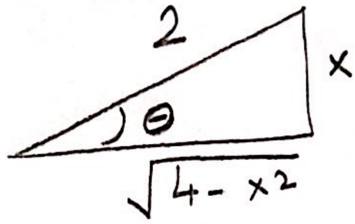
$$\int \sqrt{4 - (2\sin\theta)^2} \cdot 2\cos\theta \, d\theta$$

$$\int \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} \cdot 2\cos\theta \, d\theta$$

$$\int \sqrt{4} \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\int 2\cos(\theta) \cdot 2\cos(\theta) \cdot d\theta$$

$$\int 4\cos^2(\theta)\,d\theta$$



$$4\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right].d\theta$$

$$2\theta + \sin(2\theta) + c$$

* نرجع للفرض علي نعوض بدل
كل θ x

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2\sin\theta \\ \frac{x}{2} &= \sin\theta \\ \theta &= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}}$$

$\sin(2\theta) =$
$2\sin\theta\cos\theta$

$$\boxed{2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \underbrace{\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)} + c}$$

ملخص ما حدث ⇐

① لاحظنا وجود مقدار $a^2 - x^2$ لذلك استخدمنا
الفرض $x = 2\sin\theta$

② قمنا باشتقاق الفرض وتعويضه في السؤال

③ رجعنا للفرض بإرجاع (X) بدل θ

$$\boxed{2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ \frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c}$$

د. آلاء

Example :- Find $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2-(\sin(x))^2}} \cdot dx$?

في هذا السؤال نلاحظ أنه يوجد $\boxed{a^2 - x^2}$ لكن

وجود cos(x) سيجعل السؤال صعب وطويل لذلك

نتخلص منها أولاً .

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sin(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \cos(x) \\ \frac{dy}{\cos(x)} &= dx \end{aligned}}$$

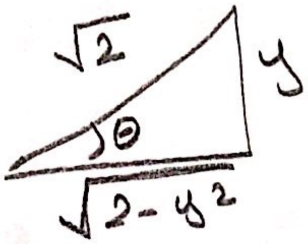
$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2-y^2}} \cdot \frac{dy}{\cos(x)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-y^2}} \cdot dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sqrt{2}\sin\theta \\ dy &= \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta \end{aligned}}$$

نعوضه في السؤال

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}} \cdot \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$



$$\int \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} \cdot \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\int \cot(\theta) \cdot d\theta = \ln|\sin(\theta)| + c$$

$$\ln\left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right| + c = \ln\left|\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right)\right]\right| + c$$

* إذا وجدنا في التكامل هذا المقدار $a^2 + x^2$

استخدم هذا الفرض $\Leftarrow$ $\boxed{x = a\tan(\theta)}$

د. حامد
د. آلاء

Example :- Find $\int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx$?

نلاحظ وجود مقدار $a^2 + x^2$ لكن اقسم على
معامل x^2

$$\int \frac{x^3}{\left(x^2 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}\tan(\theta), \quad dx = \frac{3}{2}\sec^2(\theta)d\theta$$

$$\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \tan^3(\theta) \left(\frac{3}{2}\right)\sec^2(\theta)}{\left[\frac{9}{4}\left(\tan^2(\theta) + 1\right)\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\theta$$

$$\int \frac{27 * 3 * \sqrt{4^3}\ \tan^3(\theta)\ \sec^2(\theta)}{8 * 2 * \sqrt{9^3}\ \sec^3(\theta)} d\theta$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{\tan^3(\theta)}{\sec(\theta)} \cdot d\theta$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{\sin^3(\theta)\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)}\cdot d\theta$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{(1-\cos^2(\theta))}{\cos^2(\theta)}\cdot \sin(\theta)\cdot d\theta$$

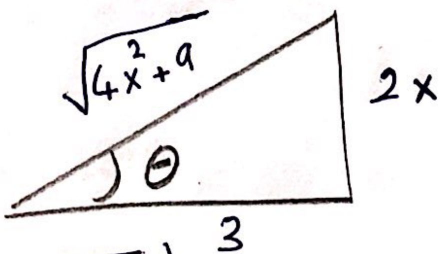
$$\boxed{\begin{gathered} u = \cos(\theta) \\ \frac{du}{d\theta} = -\sin(\theta) \\ \frac{-du}{\sin(\theta)} = d\theta \end{gathered}}$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{1-u^2}{u^2}\cdot \sin(\theta)\cdot \frac{du}{\sin\theta}$$

$$-\frac{3}{2}\int \left(\frac{1}{u^2}-1\right)\cdot du$$

$$-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{u}-u\right)$$

$$\frac{3}{2u}+\frac{3u}{2}+c \rightarrow \frac{3}{2}\left(\cos(\theta)+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$



$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}+\frac{\sqrt{4x^2+9}}{3}\right)+c$$

24

* إذا وجدنا في التكامل هذا المقدار $x^2 - a^2$

نستخدم الفرض $\boxed{x = a\sec(\theta)}$

د. حامد

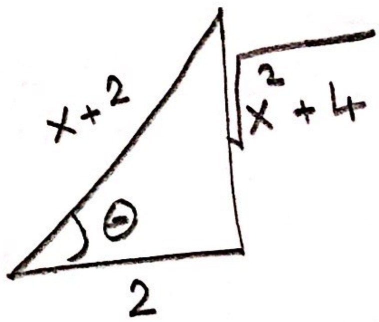
Example :- Find $\int \sqrt{x^2+4x}\;dx$?

هنا الفكرة هي إكمال مربع ⇐ $\pm\left(\frac{x\ \text{معامل}}{2}\right)^2$

$$\int \sqrt{\underbrace{x^2+4x+4}-4}\;dx$$

$$\int \sqrt{(x+2)^2-4}\;dx$$ → * يمكن أن نفرض $y = x-2$

$$\boxed{\begin{aligned} x+2 &= 2\sec\theta \\ dx &= 2\sec\theta\tan\theta \end{aligned}}$$



$$\int \sqrt{4\sec^2\theta-4}\cdot 2\sec\theta\tan\theta\cdot d\theta$$

$$\int 4\tan^2\theta\sec\theta\cdot d\theta$$

$$\int 4\sec(\theta)\,(\sec^2(\theta)-1)\cdot d\theta$$

$$\int 4\sec^3(\theta)\cdot d\theta - \int 4\sec(\theta)\,d\theta$$

$\int 4\sec(\theta)(\tan^2(\theta)+1)\cdot d\theta \quad - 4\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|$

$\int 4\sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta + 4\ln|\underbrace{\sec(\theta)+\tan(\theta)| - 4\ln|\sec(\theta)+\tan\theta|}_{\text{zero}}$

[illegible]

$\int 4\sec(\theta)\tan(\theta)\tan(\theta)\cdot d\theta$

$z = \sec(\theta)$

$\frac{dz}{d\theta} = \sec(\theta)\tan(\theta)$

$\frac{dz}{\sec(\theta)\tan(\theta)} = d\theta$

$\int 4z\,dz = 2z^2$

$= 2(\sec(\theta))^2$

$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)$

$\boxed{2\sec^2\left(\sec^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)\right) + c}$

$2\sec^2\left(\frac{x+2}{2}\right) + c =$

Example :- The suitable trigonometric substitution for evaluating $\int \frac{dx}{(x^2+16)^2}$? سنوات

$\boxed{x = 4\tan(\theta)}$

* ملخص للحالات الثلاثة ⇐

Expression	Substitution	Identity
$a^2 - x^2$	$x = a\sin(\theta)$	$1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$a^2 + x^2$	$x = a\tan(\theta)$	$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$x^2 - a^2$	$x = a\sec(\theta)$	$\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$

ز. ميللم

Example :- Find $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} \cdot dx$?

نحل بإكمال مربع ⇐

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4 - 4 + 8} \cdot dx$$

$$\int \frac{x}{(x-2)^2 + 4} \cdot dx \rightarrow \begin{aligned} x - 2 &= 2\tan(\theta) \\ dx &= 2\sec^2(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

$$\int \frac{2\tan\theta + 2}{4(1 + \tan^2\theta)} \cdot 2\sec^2(\theta) \cdot d\theta$$

$$\int \frac{2(\tan\theta + 1)}{2} \cdot d\theta$$

$$\int \tan(\theta) \cdot d\theta + \int 1 \cdot d\theta$$

$$\ln|\sec(\theta)| + \theta + c$$

$$\boxed{\ln \sec\left(\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c}$$

د. ميسم

Example :- Find $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} \cdot dx$?

$$x = \sqrt{3}\tan(\theta)$$
$$dx = \sqrt{3}\sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{3(\tan^2 + 1)}}{\sqrt{3}\tan(\theta)} \cdot \sqrt{3}\sec^2(\theta) \cdot d\theta$$

$$\sqrt{3}\int \frac{\sec^3(\theta)}{\tan(\theta)} \cdot d\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sec(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= \sec(\theta)\tan(\theta) \\ \frac{dy}{\sec(\theta)\tan(\theta)} &= d\theta \end{aligned}}$$

$$\sqrt{3}\int \frac{y^2 \sec\theta}{\tan\theta} \cdot \frac{dy}{\sec(\theta)\tan(\theta)}$$

$$\sqrt{3}\int \underbrace{\frac{y^2}{y^2-1}} \cdot dy$$

سيتم شرحه في الكسور الجزئية

* Integration by Partial Fractions

" التكامل بالكسور الجزئية "

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx$$

$\boxed{\text{حالة 1}}$

إذا درجة البسط < درجة المقام ⟸

① ← قد يكون تكامل مباشر

② ← عبارة تربيعية تُحلل إلى نفس العامل ثم تكامل مباشر

③ ← عبارة تربيعية <u>لا تُحلل</u> ← إكمال مربع ثم تعويض مثلثي

Example :- Find $\int \frac{1}{36+x^2} \cdot dx$?

حالة ١ ← ① تكامل مباشر

$\frac{1}{6} \tan^{-1}\left(\frac{x}{6}\right) + c$

Example :- Find $\int \frac{1}{x^2 - 10x + 25} \cdot dx$?

حالة ١ ← ② عبارة تربيعية تحلل

$\int \frac{1}{(x-5)(x-5)} \cdot dx$

نفس العامل

$\int (x-5)^{-2} \cdot dx$

$\boxed{-(x-5)^{-1} + c}$

xample :- Find $\int \frac{1}{x^2-2x+37} \cdot dx$?

$\boxed{\text{حالة ١}}$ ← ③ عبارة تربيعية لا تُحلل ← إكمال مربع

$$\int \frac{1}{x^2-2x+1-1+37} \cdot dx \Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^2+36} \cdot dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} x-1 &= 6 \cancel{\sec\theta} \tan\theta \\ dx &= 6 \sec^2(\theta) \cancel{\tan(\theta)}\, d\theta \end{aligned}}$$

or $y = x-1$, $dy = dx$ $\int \frac{1}{\underbrace{y^2+36}} \cdot dy$

تكامل مباشر

$$\cancel{\int \frac{1}{36(\sec^2(\theta)+1)} \cdot 6\sec\theta\tan\theta\, d\theta}$$

$$\int \frac{1}{36(\tan^2(\theta)+1)} \cdot 6\sec^2(\theta) \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{6}\int 1 \cdot d\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{6}\theta + c \Longrightarrow \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{6}\right) + c$$

حالة ٢

* يكون المقام مشتقة البسط " عكس حالة 1 "

Example :- Find $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-8} \cdot dx$?

حالة ٢

$\ln|x^2+5x-8| + c$

Example :- Find $\int \frac{x^2}{x^3+1} \cdot dx$?

حالة ٢

$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1} \cdot dx$

$\frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx$$

حالة ٣

(أ) * درجة البسط < درجة المقام

انظر للمقام ⇐ إذا كان يُحلل إلى عوامل مختلفة

فتكون هكذا الصورة ⇐

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} \cdot dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

(ب) إذا كان يُحلل إلى عوامل متشابهة فتكون

هكذا الصورة ⇐

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-1)} \cdot dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

محمد المسفاريني

لجنة للسفلي"

حالة ٤ ← درجة البسط < درجة المقام

(أ)

انظر للمقام ⇐

المقام عند يُحلل ككله مرفوع لأس واحد

فتكون بهذه الصورة ⇐

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^1(x^2+2)^1} \cdot dx \Rightarrow \frac{Ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

(ب) المقام عند يُحلل ككله مرفوع لأس أكبر من واحد

فتكون بهذه الصورة ⇐

$$\int \frac{1}{(x^2+5)^2} \cdot dx \Rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+d}{(x^2+5)^2}$$

$\boxed{\text{حالة ٥}}$ ⟵ درجة البسط ≥ درجة المقام

* نجري قسمة طويلة

* مثال توضيحي ⟸

Example :- Find $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} \cdot dx$?

$\boxed{\text{حالة ٥}}$

المقام | البسط

الناتج ⟵ $x^2 + x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + 2 \\
\hline
x - 1 & x^3 + x \\
 & \ominus x^3 \oplus x^2 \\
\cline{2-2}
 & x^2 + x \\
 & \ominus x^2 \oplus x \\
\cline{2-2}
 & 2x \\
 & \ominus 2x \oplus 2 \\
\cline{2-2}
 & 2
\end{array}
$$

اعكس الإشارات

الباقي ⟵ 2

نحن نجري عملية القسمة حتى تصبح درجة ~~البسط~~ الباقي < درجة المقام

$\int \left(\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}} + \text{الناتج} \right) \cdot dx$

$\int \left(\frac{2}{x-1} + x^2 + x + 2 \right) \cdot dx$

$$2\ln|x-1| + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

Example :- Write out the form of partical Fractions ? د.رانيا

① $$\frac{2x+1}{x(x-1)(x+15)(x-7)}$$

* جميع الأقواس تُحلل

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+15} + \frac{d}{x-7}$$

② $$\frac{4x+1}{(x-1)^2(x+5)^3}$$

* جميع الأقواس تحلل على بنفس العامل

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{d}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$$

سنوات

xample :- Find $\int \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx$?

$$\int \frac{1}{x(x-1)} \cdot dx$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

إيجاد الثوابت ←
① توحيد المقام
② نعوض أصفار العوامل

$$A(x-1) + Bx = 1$$

$x = 1$, $x = 0$

when $\boxed{x = 1}$ → $\boxed{B = 1}$

when $\boxed{x = 0}$ → $\boxed{A = -1}$

$$\boxed{-\ln(x) + \ln|x-1| + C}$$

سنوات

Example :- The Partial fraction decomposition of $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x+1)(x^3 + 2x^2 + x)}$ is ?

يُحلل

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)(x+1)$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

للسنوات

Example :- Find $\int \frac{2x^2}{x-1} \cdot dx$?

درجة البسط > درجة المقام

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x + 2 \\
\hline
x - 1 & 2x^2 \\
 & \ominus 2x^2 \oplus 2x \\
\hline
 & 2x \\
 & -2x + 2 \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

$$\int \left(\frac{2}{x-1} + 2x + 2 \right) dx$$

$$\boxed{2 \ln |x-1| + x^2 + 2x + c}$$

للسنوات

Example :- Find $\int \frac{2x+1}{x^2+1} \cdot dx$?

درجة البسط < درجة المقام

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx + \int \frac{1}{x^2+1}$$

$$\ln |x^2+1| + \tan^{-1}(x) + c$$

* Improper Integrals "المتكاملات المعتلة"

تكامل فيه علّة, اما في حدود التكامل أي تكون $\pm\infty$ أو الاقتران داخل التكامل غير متصل عند حدود التكامل .

حالة 1 ⟸

* $$\int_{a}^{\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{t \to \infty} \int_{a}^{t} f(x) \cdot dx$$

* $$\int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x) \cdot dx$$

* $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{c} f(x) \cdot dx + \int_{c}^{\infty} f(x) \cdot dx$$

$c \longrightarrow$ أي عدد

* يكون التكامل Convergent عندما تكون النهاية موجودة .

* يكون التكامل divergent عندما تكون النهاية غير موجودة .

حالة ٣ ⟸

* $$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

* إقتران $f(x)$ متصل على الفترة $[a,b)$ أي عند b غير متصل .

$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\cdot dx$$

* $$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

* إقتران $f(x)$ متصل على الفترة $(a,b]$ أي عند a غير متصل .

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\cdot dx$$

* $$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

* إقتران $f(x)$ متصل على $[a,b]$ ماعدا غير متصل عند c وهو عدد بين $a<c<b$.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$

* يكون التكامل convergent عندما تكون النهاية موجودة

* يكون التكامل divergent عندما تكون النهاية غير موجودة

د. رانيا

Example :- Find $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx$?

$$\lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^2} \cdot dx \longrightarrow \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big]_{1}^{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = \boxed{+1} \quad \text{conv to } 1$$

كتاب

Example :- Find $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$?

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}(x) \Big]_{t}^{0}$$

$$0 - \tan^{-1} t$$

$$\lim_{t\to-\infty} \left(-\tan^{-1}(t)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}(x) \Big]_{0}^{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

conv to π

د.رانيا

xample :- Find $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$?

غير متصل عند 3

$$\lim_{t \to 3^-} \int_{2}^{t} \frac{1}{\sqrt{3-x}} \cdot dx$$

$$\lim_{t \to 3^-} -2\sqrt{3-x} \Big]_{2}^{t}$$

$$-2\sqrt{3-t} - (-2 * 1)$$

$$\lim_{t \to 3^-} \left(-2\sqrt{3-t} + 2\right) = \boxed{2}$$ conv to $\underline{\underline{2}}$

للسنوات

Example :- Find $\int_{0}^{\infty} x e^{-x} \cdot dx$?

$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} x e^{-x} \cdot dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}$

$du = 1 \qquad v = -e^{-x}$

$$-x e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx$$

$$-x e^{-x} - e^{-x} \Big]_{0}^{t}$$

$$-t e^{-t} - e^{-t} - (0 - 1)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(-t e^{-t} - e^{-t} + 1\right) = \boxed{1}$$ conv to $\underline{\underline{1}}$

(L2)

* موضوع ليس جديد ولكنه بطريقة غير مباشرة *

⟸ ايجاد قيمة p

Example :- Find the value of p

is the integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$?

نحل السؤال بشكل طبيعي وكأننا نعرف قيمة p

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} \cdot dx \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^t$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p} \; x^{1-p}\Big]_1^t$$

$$\frac{1}{1-p}\left(t^{1-p} - 1\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right) \Longrightarrow$$

لو $\boxed{p=1}$ ← div

لو $\boxed{p<1}$ ← div

لو $\boxed{p>1}$ ← conv

$$\boxed{* \int_1^\infty \frac{1}{x^p} \cdot dx \begin{cases} p\le 1 \rightarrow \text{div} \\ p>1 \rightarrow \text{conv} \end{cases}}$$

سنوات

Example :- The value of p such that the improper integral $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3p}}$ converges are ?

$y = \ln(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = x\,dy$

$$\int_e^\infty \frac{x\,dy}{x\,y^{3p}} \Rightarrow \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{y^{3p}} \cdot dy}_{\text{يشبه القاعدة}}$$

$3p = 1$

$\boxed{p = \frac{1}{3}} \rightarrow \underline{\underline{\text{div}}}$

$p > \frac{1}{3}$ ← نجرب *

$p < \frac{1}{3}$

$$\lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{y^{3p}}\,dy$$

$$\frac{1}{-3p+1} y^{-3p+1} \Big]_1^t$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{1-3p}\left(\frac{1}{t^{3p-1}} - 1\right)$$

conv when $\boxed{p > \frac{1}{3}}$

د. رانيا

$\boxed{Q2}$ Find $\displaystyle\int \frac{x e^{2x}}{(1+2x)^2} \cdot dx$?

$u = x e^{2x}$ $\qquad\qquad$ $dv = (1+2x)^{-2}$

$du = 2x e^{2x} + e^{2x}$ $\qquad\qquad$ $v = \dfrac{-(1+2x)^{-1}}{2}$

$$-\frac{1}{2} x e^{2x} (1+2x)^{-1} + \int e^{2x} \cancel{(2x+1)} \cdot -\frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{(2x+1)}} \cdot dx$$

$$\frac{-x e^{2x}}{2(1+2x)} + -\frac{1}{4} e^{2x} + c$$

د. آلاء

د. ميسلم

$\boxed{Q3}$ Find $\displaystyle\int \sqrt{x} \, \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot dx$?

$u = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ $\qquad\qquad$ $dv = \sqrt{x}$

$du = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$ $\qquad\qquad$ $v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{\cancel{2}} * \frac{\cancel{2}}{3} * \cancel{x^{\frac{3}{2}}} * \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(1+x)} \cdot dx$$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{3} \frac{x}{x+1} \cdot dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x+1 & x \\ & -x \mp 1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \tan^{-1}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} \ln|x+1| + c$$

$$\int \left(\frac{-1}{x+1} + 1\right)$$

د. رانيا

14 Find $\int e^{\cos(x)} \sin(2x) \cdot dx$?

$$y = \cos(x)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$$
$$\frac{-dy}{\sin(x)} = dx$$

$$-\int e^{y} \cdot 2\cancel{\sin(x)}\cos(x) \cdot \frac{dy}{\cancel{\sin(x)}}$$

$$-2\int e^{y}\, y \cdot dy$$

$u = y$ $\quad dv = e^{y}$

$du = 1$ $\quad v = e^{y}$

$$ye^{y} - \int e^{y}$$

$$ye^{y} - e^{y}$$

$$-2(ye^{y} - e^{y}) + c$$

$$-2\left(\cos(x)\, e^{\cos(x)} - e^{\cos(x)}\right) + c$$

Q5 Find $\int \ln|\sqrt{x}|\,(x^3+3)\,dx$?

د. صيلام

$u = \ln(\sqrt{x})$ $\qquad$ $dv = x^3+3$

$du = \dfrac{1}{2x}$ $\qquad$ $v = \dfrac{x^4}{4} + 3x$

$$\left(\frac{x^4}{4} + 3x\right)\ln(\sqrt{x}) - \int \frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}\,dx$$

$$\boxed{\left(\frac{x^4}{4} + 3x\right)\ln(\sqrt{x}) - \frac{x^4}{32} + - \frac{3}{2}x + C}$$

كتاب

Q6 Find $\int \dfrac{dx}{\cos(x)-1}$?

$$\int \frac{1}{\cos(x)-1} * \left(\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) dx$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$-\int \frac{\cos(x)+1}{\sin^2(x)}\cdot dx$$

$$-\int \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)\sin(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)}\right)\cdot dx$$

$$\boxed{\csc(x) + \cot(x) + C}$$

$\boxed{7}$ Find $\int \operatorname{sech}(x) \cdot dx$? كتاب

$$\int \frac{2}{e^{x}+e^{-x}} \cdot dx \xrightarrow[\text{اضرب بـ } e^x]{} \int \frac{2e^{x}}{e^{2x}+1} \cdot dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= e^{x} \\ \frac{dy}{dx} &= e^{x} \\ \frac{dy}{e^{x}} &= dx \end{aligned}}$$

$$\int \frac{2\cancel{y}}{y^{2}+1} \cdot \frac{dy}{\cancel{y}} =$$

$$2\int \frac{1}{y^{2}+1} \cdot dy = 2\tan^{-1}(y) + c$$

$$\boxed{2\tan^{-1}(e^{x}) + c}$$

$\boxed{Q8}$ Find $\int x \tan^{2}(x) \cdot dx$? للسنوات

$u = x$ $\qquad dv = \tan^{2}(x) = \sec^{2}(x) - 1$

$du = 1$ $\qquad v = \tan(x) - x$

$$x(\tan(x) - x) - \int (\tan(x) - x) \cdot dx$$

$$\boxed{x(\tan(x) - x) + \ln|\cos(x)| + \frac{x^{2}}{2} + c}$$

Q9 Find $\int \frac{\sqrt{\tan(x)}}{\sin(2x)} \cdot dx$?

للسنوات

$$\int \frac{\sqrt{\tan(x)}}{2\sin(x)\cos(x)} \cdot dx$$

$$y = \tan(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x)$$

$$\frac{dy}{\sec^2(x)} = dx$$

$$\int \frac{\sqrt{y}\,\cos^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)} \cdot dy$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{\sqrt{y}}{2y} \cdot dy$$

$$\frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy$$

$$y^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\boxed{\sqrt{\tan(x)} + c}$$

د. رانيا

Q10 Find $\int \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} \cdot dx$?

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot dx \Rightarrow$$

$$x = \tan(\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2(\theta)$$

$$dx = \sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{(\tan^2\theta+1)^2} \cdot \sec^2\theta \, d\theta$$

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} \cdot d\theta \longrightarrow \int \cos^2(\theta) \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{2} \int 1 + \cos(2\theta) \cdot d\theta$$

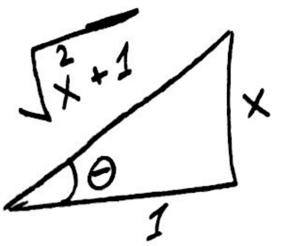
$$\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + c$$

$$x = \tan\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(x) + \frac{\sin(2\tan^{-1}(x))}{2}\right)}$$

or



$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} * \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

Q11 Write out the form partical Fractions of $\dfrac{10x+5}{x^3(x^2-1)^3(x+2)(x^2+4)^2(x^2+x+1)}$?

د. رانيا

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{d}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{(x-1)^3}+$$

$$\frac{G}{x+1}+\frac{K}{(x+1)^2}+\frac{Z}{(x+1)^3}+\frac{L}{x+2}+\frac{Nx+N1}{x^2+x+1}+$$

$$\frac{Mx+M1}{x^2+4}+\frac{Tx+T1}{(x^2+4)^2}$$

د. رانيا

Q12 find $\int x^3\cos(x^2)\cdot dx$?

$y=x^2$

$\frac{dy}{dx}=2x$

$\frac{dy}{2x}=dx$

$\int x^3\cos(y)\cdot\frac{dy}{2x}$

$\frac{1}{2}\int y\cos(y)\cdot dy$

$u=y$ $\qquad dv=\cos(y)$

$du=1$ $\qquad v=\sin(y)$

$y\sin(y)-\int\sin y$

$y\sin(y)+\cos(y)+c$

$$\boxed{x^2\sin(x^2)+\cos(x^2)+C}$$

Q13 Find $\int x^2 \sqrt{x-1} \cdot dx$?

د.رانيا

u	dv
x^2	$\sqrt{x-1}$
$2x$	$\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$
2	$\frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}$
0	$\frac{8}{105}(x-1)^{\frac{7}{2}}$

$$\boxed{\frac{2x^2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{8x}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105}(x-1)^{\frac{7}{2}} + C}$$

د. ميسم

Q14 Find $\int \ln x^2 \cdot dx$?

$\int \ln x^n \cdot dx = n \int \ln(x) dx$

$2 \int \ln(x) \cdot dx$

$u = \ln(x) \qquad dv = 1$

$du = \frac{1}{x} \qquad v = x$

$x \ln(x) - \int 1 \cdot dx$

$$\boxed{2\left[x \ln(x) - x\right] + C}$$

15 Find $\int \sin^3(x)\cdot dx$?

د. رانيا

* الشرح بالتفصيل صفحة 7

$$\int \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\cdot dx$$

$$\int \sin(x) - \int \underbrace{\sin(x)\cos^2(x)}\cdot dx$$

تكامل بالتعويض

$y = \cos(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = -\sin(x)$

$\dfrac{-dy}{\sin(x)} = dx$

$$\int \sin(x)\, y^2 \cdot \frac{-dy}{\sin(x)}$$

$$-\int y^2 \cdot dy$$

$$-\frac{y^3}{3} + C$$

$$-\frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

$$\boxed{-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C}$$

Q16 Find $\int \cos^3(x) \sin^4(x) \cdot dx$?

د. رانيا

راجع صفحة 11

$y = \sin(x)$

$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$

$\frac{dy}{\cos(x)} = dx$

$\int \cos^3(x)\, y^4 \cdot \frac{dy}{\cos(x)}$

$\int (1-y^2)\, y^4 \cdot dy$

$\int y^4 \cdot dy - \int y^6 \cdot dy$

$\frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + c$

$$\boxed{\frac{(\sin(x))^5}{5} - \frac{(\sin(x))^7}{7} + c}$$

للسنوات

Q17 Find the substitution is needed to evaluate the integral $\int \sec^6(x) \tan^6(x) \cdot dx$?

راجع صفحة 13

$$\boxed{y = \tan(x)}$$

د. آلاء

Q18 Find $\int \sec^{\frac{5}{2}}(x) \tan(x) \cdot dx$?

* هذه الحالة ليست موجودة من ضمن الحالات ⇐ بأخص الشي المميز [ملفت للنظر]

$$y = \sec(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{dy}{\sec(x)\tan(x)} = dx$$

$$\int \frac{y^{\frac{5}{2}} \tan(x)}{\sec(x)\tan(x)} \, dy$$

$$\int y^{\frac{3}{2}} \, dy$$

$$\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + c$$

$$\boxed{\frac{2}{5} \sec^{\frac{5}{2}}(x) + C}$$

Q19 Find $\int x \sec(x)\tan(x)\,.dx$?

$u = x \qquad dv = \sec(x)\tan(x)$

$du = 1 \qquad v = \sec(x)$

$x\sec(x) - \int \sec(x)\,.dx$

$$\boxed{x\sec(x) - \ln\left|\sec(x) + \tan(x)\right| + c}$$

$\int \sec(x)\tan(x)\,.dx$

$y = \sec(x)$

$\frac{dy}{dx} = \sec(x)\tan(x)$

$\frac{dy}{\sec(x)\tan(x)} = dx$

$\int y\tan(x) \cdot \frac{dy}{y\tan(x)}$

$\int 1\,.dy$

$y + c$

$\boxed{\sec(x) + c}$

20 The suitable trigonometric substitution for evaluating $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} \cdot dx$?

للسنوات

$$\boxed{x = 4\sin(\theta)}$$

للسنوات

Q21 The suitable trigonometric substitution for evaluating $\int \sqrt{1-x^2-x} \cdot dx$?

$$\boxed{x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec(\theta)}$$

للسنوات

Q22 Find $\int \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{\cos^4(x)}} \cdot dx$?

$y = \cos(x)$

$\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$

$-\frac{dy}{\sin(x)} = dx$

$-\int \frac{\sin(x)}{y^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{dy}{\sin(x)}$

$-\int y^{-\frac{4}{3}} \cdot dy$

$3y^{-\frac{1}{3}} + c$

$\frac{3}{(\cos(x))^{\frac{1}{3}}} + c$

د.رانيا

$\boxed{Q23}$ Find $\int e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\,.\,dx$?

$$\boxed{\begin{aligned} e^{x} &= \sin(\theta) \\ e^{x}dx &= \cos(\theta)\,d\theta \\ dx &= \frac{\cos(\theta)\,d\theta}{e^{x}} \end{aligned}}$$

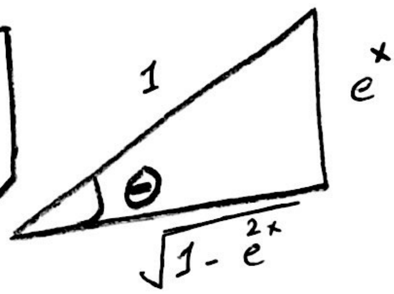
$$\int \sin(\theta)\cos(\theta)\,\frac{\cos(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta)}$$

$$\int \cos^{2}(\theta)\,d\theta \longrightarrow$$

$$\int \frac{1}{2}d\theta + \int \frac{\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin(2\theta)}{4} + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\sin^{-1}(e^{x}) + \frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{2} + c}$$



$$\boxed{\begin{aligned} \theta &= \sin^{-1}(e^{x}) \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}}$$

سيغلتي #

$\boxed{Q24}$ Find $\int \frac{3x^2+11x+4}{x\,(x+2)^2} \cdot dx$? للسنوات

$\boxed{33}$ راجع صفحة

راجع صفحة 33

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

* نوحد مقامات

$$A(x+2)^2 + B(x)(x+2) + Cx = 3x^2 + 11x + 4$$

* نعوض أصفار العوامل

$x = 0 \longrightarrow 4A = 4$ $\quad \boxed{A = 1}$

$x = -2 \longrightarrow -2C = -6$ $\quad \boxed{C = 3}$

$x = 1 \longrightarrow 9 + 3B + 3 = 18$ $\quad \boxed{B = 2}$

لعوض عندي

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} \right) dx$$

$$\boxed{\ln(x) + 2\ln(x+2) + \frac{-3}{x+2} + C}$$

سنوات

$\boxed{Q25}$ According to the method of Partial fractions, there is an equation of the form $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$ for some numbers A, B an C what is the number C ?

$$A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = x$$

$x = 3 \longrightarrow 2C = 3$ $\boxed{C = \frac{3}{2}}$

كتاب

$\boxed{Q26}$ Find $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} \cdot dx$?

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

$A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x) + (Dx+E)x = 1-x+2x^2-x^3$

$A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2+Ex =$

$1-x+2x^2-x^3$

نساوي المعاملات $\Leftarrow$

$(A+B).x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$

$= 1 - x + 2x^2 - x^3$

$\boxed{A+B} = 0 \longrightarrow$ لا يوجد شيء في الطرف الأيمن من الدرجة الرابعة

$\boxed{C=-1}$

$2A + -A + D = 2$

$\boxed{A+D=2}$

$-1+E=-1$

$\boxed{E=0}$

$\boxed{A=1}$

$\boxed{B=-1}$

$\boxed{D=1}$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{x^2+1}$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$

نكامله

$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \tan^{-1}(x)$

$- \frac{1}{2(x^2+1)} + K$

عجنة سيغلتي

أسئلة شاملة

محمد المسفارجي

* أسئلة فقط بالتكامل المعتل ⟸

د. ميلسم

$\boxed{Q1}$ Find $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x\,Ln(x)} \cdot dx$?

$$\boxed{\begin{array}{l} y = Ln(x) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ dx = x\,dy \end{array}}$$

$$\int \frac{1}{xy} \cdot x\,dy$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy$$

نغير الحدود ⟸

$$x \to e \qquad y \to 1$$

$$x \to \infty \qquad y \to \infty$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{y} \cdot dy \longrightarrow \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{y}\,dy$$

$$Ln(y) \Big]_{1}^{b} \longrightarrow Ln(b) - Ln(1)$$

$$\lim_{b\to\infty} Ln(b) = \boxed{\infty}$$

div

2 Given that $\int \frac{4}{x^2-1} \cdot dx =$ للسنوات

$2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + c$ Find

$$\int_2^{\infty} \frac{4}{x^2-1} \cdot dx \quad ?$$

* تكامل محدود نلغي c

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{4}{x^2-1} \cdot dx$$

$$2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| \Big]_2^b$$

$$2\ln|b-1| - 2\ln|b+1| - \left[2\ln|1| - 2\ln|3| \right]$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[2\ln|b-1| - 2\ln|b+1| + 2\ln|3| \right]$$

$$= \boxed{2\ln 3 = \ln 9}$$

Q3 Find $\int_{-\infty}^{0} e^{4x}\, dx$?

سنوات

$$\lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{4x} \cdot dx$$

$$\left. \frac{e^{4x}}{4} \right]_{b}^{0} \longrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{4b}$$

$$\frac{1}{4} \lim_{b \to -\infty} \left(1 - \underbrace{e^{4b}}_{\text{zero}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}} \quad \text{conv to } \frac{1}{4}$$

سنوات

Q4 Find $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x)^{\frac{6}{7}}}\, dx$?

$$\lim_{b \to 0^+} \int_{b}^{1} x^{-\frac{6}{7}} \cdot dx \longrightarrow \left. 7x^{\frac{1}{7}} \right]_{b}^{1}$$

$$\lim_{b \to 0^+} \left(7 - 7b^{\frac{1}{7}}\right) \longrightarrow \boxed{7}$$

conv to 7

$\boxed{5}$ Find $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$?

د. ميسم

* احذر يوجد علتان يجب تجزئة التكامل

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x-1)} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$A(x-1) + Bx = 1$$

$$x=0 \to A=-1$$
$$x=1 \to B=1$$

$$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$\ln|x-1| - \ln|x| \Big]_b^2$$

$$\ln|2-1| - \ln|2| - [\ln|b-1| - \ln|b|]$$

$$\lim_{b\to 1^+} [-\ln|2| - \ln|b-1| + \ln|b|]$$

$$= \infty$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\ln|x-1| - \ln|x| \Big]_2^b$$

$$\ln|b-1| - \ln|b| - [\ln|1| - \ln|2|]$$

$$\lim_{b\to\infty} [\ln|b-1| - \ln|b| + \ln|2|]$$

$$= \underline{\ln 2}$$

$$\infty + \ln|2|$$
$$= \boxed{\infty}$$

$\downarrow$

<u>div</u>

Scanned by CamScanner

د. آلاء

Q6 Find the set of all values of p for which the integral is improper

(1) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{p+3x}$?

حتى يكون غير متصل نساوي المقام بالصفر

$$p + 3x = 0$$

$$p = -3x$$

$$-\frac{p}{3} = x$$

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$-1 \leq \frac{-p}{3} \leq 2$$

$$-3 \leq -p \leq 6$$

$$\boxed{3 \geq p \geq -6}$$

(2) $$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - p} \ ?$$

$$\sqrt{x} - p = 0$$

$$\sqrt{x} = p$$

$$x = p^2$$

$$0 \le x \le 9$$

$$0 \le p^2 \le 9$$

$$\boxed{0 \le p \le 3}$$

للسنوات

$\boxed{Q7}$ Find positive value of a

such that $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot dx = 1$?

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot dx = 1$$

$$\frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \Big]_0^t = 1$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right) = 1 \longrightarrow \tan^{-1}(\infty) = a$$

$$\boxed{a = \frac{\pi}{2}}$$

Q8 Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) \cdot dx$?

كتاب

$$\lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \sec(x) \cdot dx$$

$$\ln|\sec(x) + \tan(x)| \Big]_0^b$$

$$\ln|\sec(b) + \tan(b)| - [\ln|\underbrace{\sec(0)}_{1} + \underbrace{\tan(0)}_{0}|]$$

$$\lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec(b) + \tan(b)| = \boxed{\infty}$$

div

سبخلي

لجنة سيغلتي

التفاضل والتكامل ②

محمد المغاريني

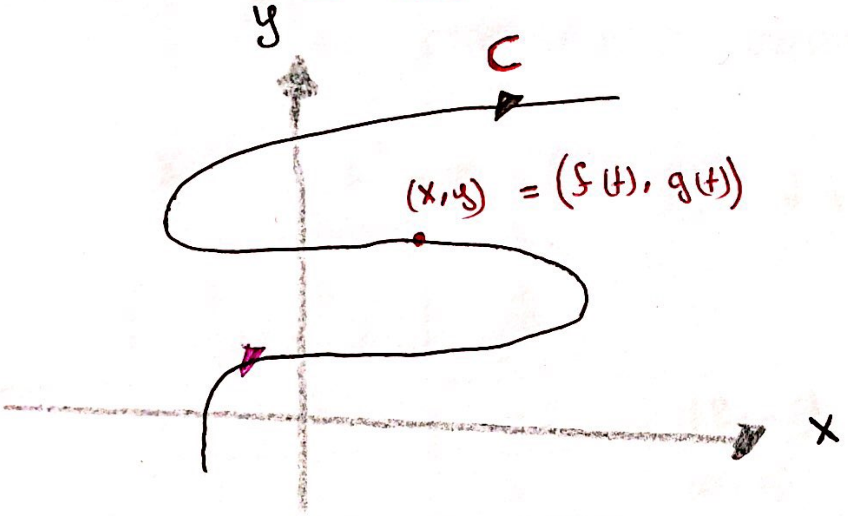
CH 10

منحنيات

Curves Defined by Parametric Equations.

حدودي

معادلات



* من باب الفهم ⇐

* لا يمكن تمثيل هذا المنحنى بعلاقة $y = f(x)$ لأنه يفشل باختبار الخط العمودي.

* t ← تدل على الزمن "غالباً" وقد تدل على أي شيء آخر.

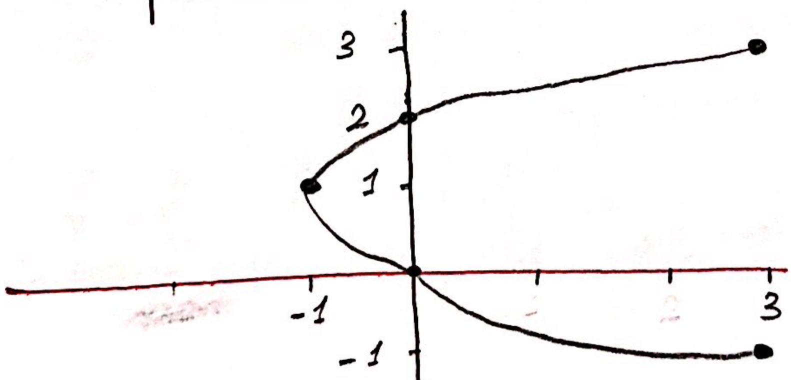
$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right] \rightarrow \text{parametric equation}$$

Example :- Sketch the curve defined by the parametric equations

$x = t^2 - 1$ $\quad y = t + 1$

t	x $t^2 - 1$	y $t + 1$	
-2	3	-1	$(3,-1)$
-1	0	0	$(0,0)$
0	-1	1	$(-1,1)$
1	0	2	$(0,2)$
2	3	3	$(3,3)$

* نعوض قيم t من عندنا



* نجعل t موضوع القانون في y ثم نعوضه في x

Parabola

القطع المكافئ

$t = y - 1$

$x = (y-1)^2 - 1 = y^2 - 2y$

$$\boxed{x = y^2 - 2y}$$

xample :- What curve represented by the following parametric equation

(1) $x = \cos(t)$ $\quad y = \sin(t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

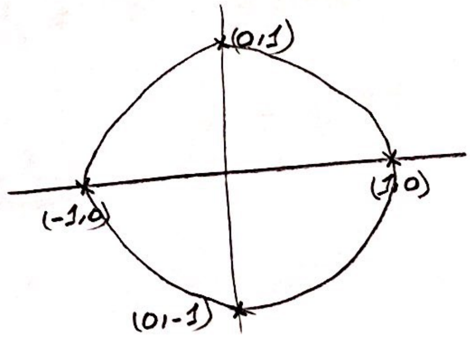
نستخدم متطابقة

ملزم بقيم محددة

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

t	$\cos(t)$	$\sin(t)$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	1	0



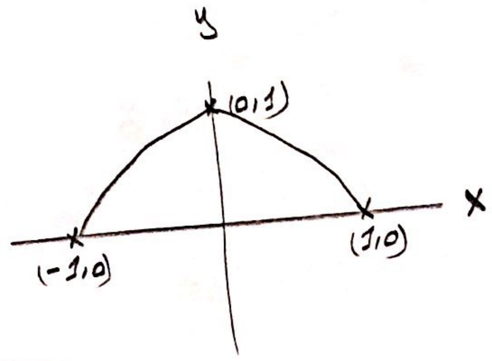
$$x^2 + y^2 = 1$$

(0,0)	المركز	دائرة
1	نصف القطر	

$x = \cos(t) \qquad y = \sin(t) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

t	$\cos(t)$	$\sin(t)$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0



نصف دائرة

③ $x = 5 + 2\cos(t) \qquad y = 3 + 2\sin(t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)$

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$

دائرة المركز $(5,3)$
نصف القطر 2

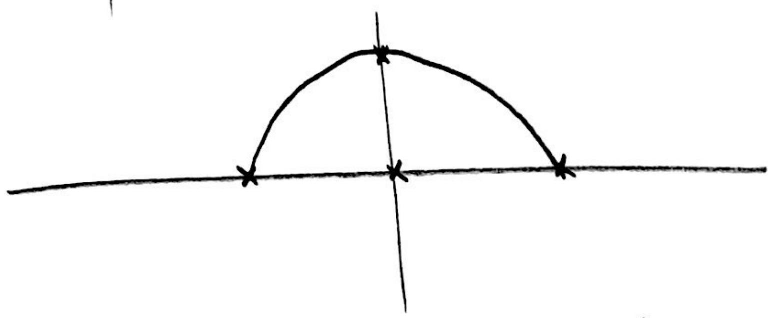
$x = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ $\qquad$ $y = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

$x^2 + y^2 = \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ $\qquad$ $-\pi \leq t \leq \pi$

$x^2 + y^2 = 1$

* نفس القيمة مختلفات الإشارة
نصف دائرة

t	$\sin\left(\frac{t}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{t}{2}\right)$
$-\pi$	-1	0
0	0	1
π	1	0



نصف دائرة

لسيخلي

xample :- Find the Cartesion equation

(1) $x = \sin(t)$ $\quad y = \csc(t)$ $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$?

$$y = \frac{1}{\sin(t)}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

(2) $x = e^{2t}$ $\quad y = t + 1$

$$\ln x = \ln e^{2t}$$

$$2t = \ln x$$

$$t = \frac{1}{2} \ln x$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(x) + 1$$

$$\boxed{y = \ln \sqrt{x} + 1}$$

(3) $x = \sqrt{t}$ $\quad y = 1 - t$

$$x^2 = t$$

$$\boxed{y = 1 - x^2}$$

* في حالة إعطاء نقطتين $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$

وطلب منك Paretmetric equations

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad 0 \le t \le 1$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

د. آلاء

Ex :- Find the paretmetric equation for the line pass through $(1,5)(2,8)$?

$$\overset{x_1}{(1}, \overset{y_1}{5)} \qquad \overset{x_2}{(2}, \overset{y_2}{8)}$$

$$x = 1 + t$$
$$y = 5 + 3t$$

سيغلتي

* معادلة دائرة مركزها (a,b) ونصف القطر r

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

* لو طلب معادلة paretmetric equation والمعطى

معادلة بـ دلالة y, x ⟸ إفرض أحد

المتغيرين بـ t وأكمل الحل.

د. آلاء

Ex :- Find the a paretmetric equation

for the curve $y = 2x + 1$?

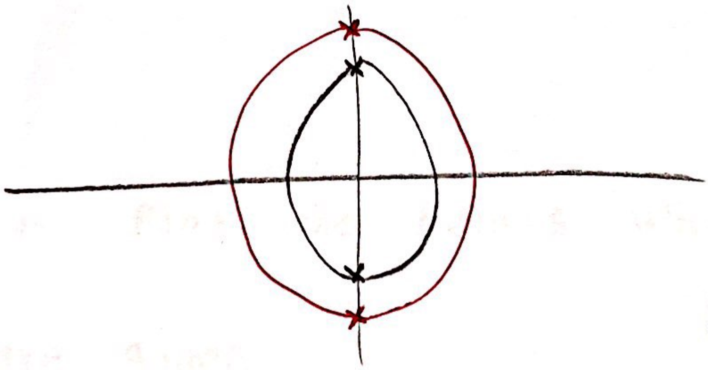
$x = t \longrightarrow$ فرض

$y = 2t + 1$

$x = \sin(2t) \qquad y = \cos(2t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 = \sin^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$

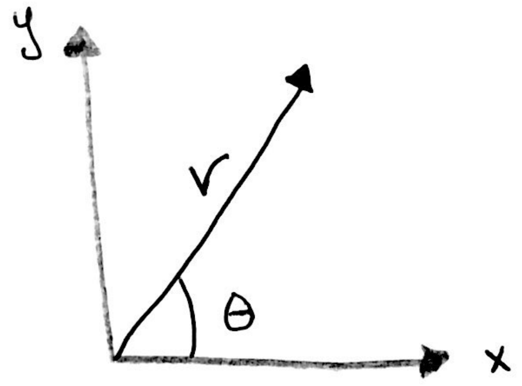
t	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	0	-1
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
2π	0	1



* دائرتين منطبقتين على بعض لكني رسمتها هكذا من باب التوضيح

* Polar coordinates (r, θ)

* هي طريقة أخرى لـ تمثيل النقاط



* نحلل r إلى
مركبة x و
مركبة y

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

* نستخدمهم عند
التحويل من
(r,θ) إلى (x,y)

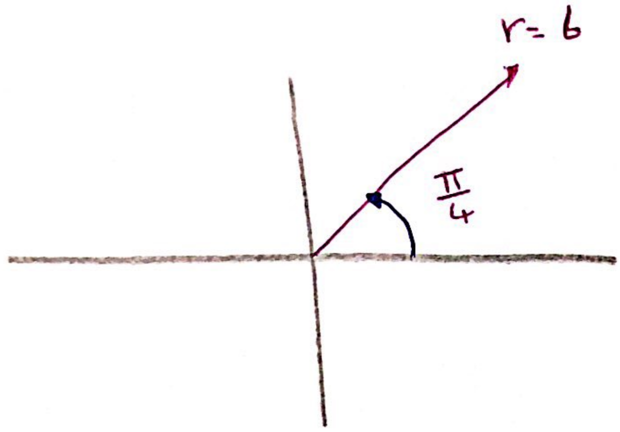
د. آلاء

Ex :- Plot the points whose polar coordinates are given

① $\left(6, \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow r = 6$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

① إبدء بالزاوية
② حدد في أي ربع
③ حدد إشارة الزاوية
④ ارسم الزاوية ثم الشعاع

$\theta = \frac{\pi}{4}$ → ربع أول / إشارة (+) /



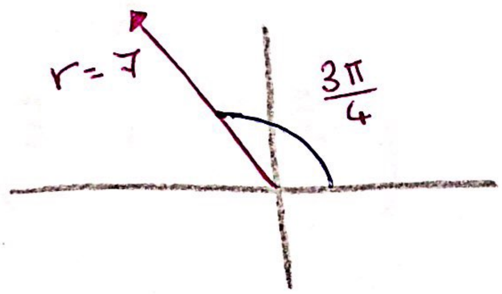
* لو إشارة θ
سالبة مع عقارب الساعة

② $\left(7 , \frac{3\pi}{4}\right)$

$\theta = \frac{3\pi}{4} * \frac{180}{\pi} =$

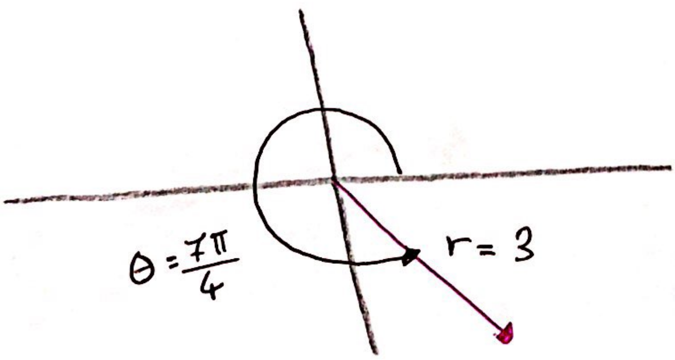
$\boxed{135}$

إشارة الزاوية
موجبة



③ $\left(3 , \frac{7\pi}{4}\right)$

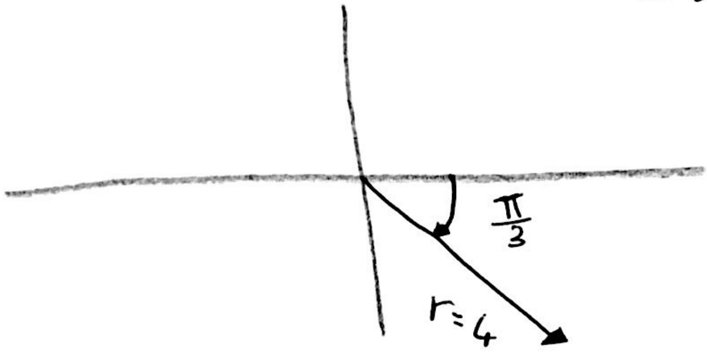
$\theta = \frac{7\pi}{4} * \frac{180}{\pi} = \boxed{315}$



③ $\left(4 , -\frac{\pi}{3}\right)$

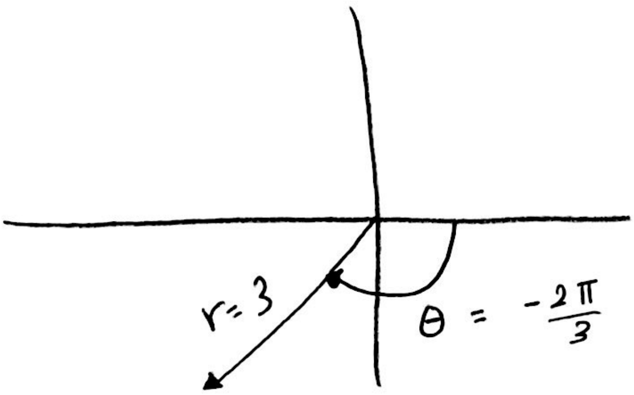
$\theta = -\frac{\pi}{3}$

* إشارة الزاوية سالبة مع عقارب الساعة



④ $\left(3 , -\frac{2\pi}{3}\right)$

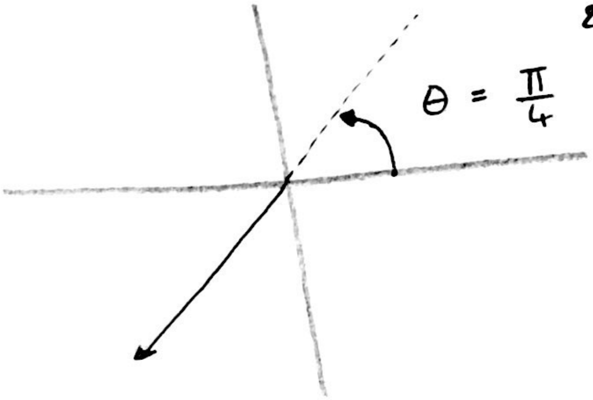
$\theta = -\frac{2\pi}{3} * \frac{180}{\pi} = \boxed{-120}$



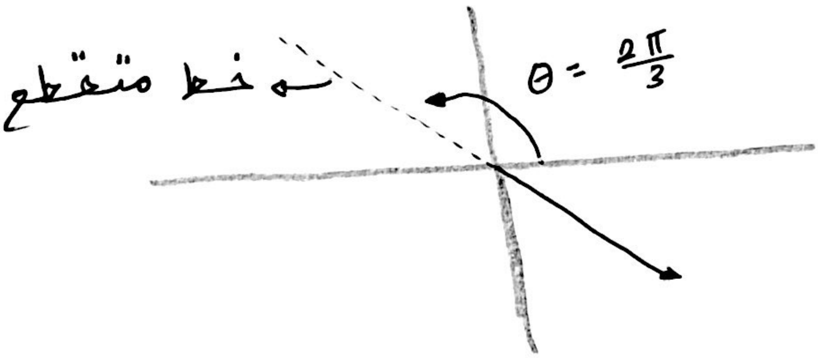
محمد السفاريني

(5) $\left(-6 , \frac{\pi}{4}\right)$

* عندما تكون r سالبة
نحل كالمعتاد على الزاوية مع
خط متقطع

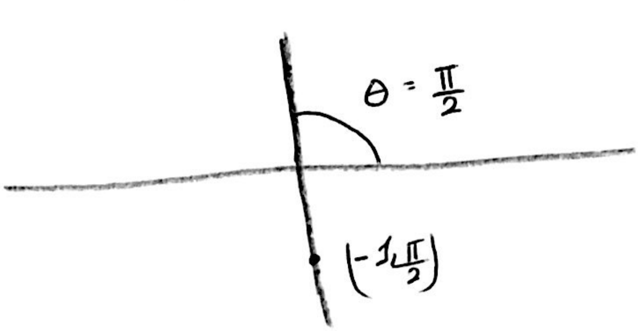


(6) $\left(-2 , \frac{2\pi}{3}\right)$



زاوية
عند المحاور

(7) $\left(-1 , \frac{\pi}{2}\right)$



* ملاحظة مهمة ⇐

* إذا تم تمثيل النقطة بـ (x, y) ← rectangular or Cartesian

* إذا تم تمثيل النقطة بـ (r, θ) ← Polar coordinates

Ex :- Convert the point $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ from polar to cartesian coordinates ?

$$x = r\cos(\theta) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$y = r\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$(1, \sqrt{3})$$

Ex :- Convert the points from polar to cartesian coordinates ?

① $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{3\pi}{4} * \frac{180}{\pi} = 135$

$x = r\cos(\theta) = -2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$y = r\sin(\theta) = -2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

② $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ $\theta = -\frac{2\pi}{3} * \frac{180}{\pi} = -120$

$x = r\cos(\theta) = 2\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -1$

$y = r\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$\left(-1, -\sqrt{3}\right)$

③ $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

$x = r\cos(\theta) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$y = r\sin(\theta) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

$(0, -2)$

$\boxed{15}$

* $(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi) \rightarrow$ عندما تكون الزاوية عكس عقارب الساعة

* $(r, \theta) = (r, (\theta - 2n\pi)) \rightarrow$ عندما تكون الزاوية مع عقارب الساعة

* $(-r, \theta) = (r, (\theta + \pi)) \rightarrow$ عندما تكون الزاوية عكس عقارب الساعة

* $(-r, \theta) = (r, (\theta - \pi)) \rightarrow$ عندما تكون الزاوية مع عقارب الساعة

سنوات

Ex :- Convert the point $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ to polar coordinate with $r > 0$ and $0 \leq \theta \leq 2\pi$?

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16} = \pm 4 = \boxed{4}$

أهمل $r=-4$ عنا السؤال قال $r>0$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

* لتحديد الزاوية ⟸

① انظر للنقطة في أي ربع تقع

② انظر إلى جواب $\tan^{-1}$ واعرف متى يكون $\tan$ موجب و $\tan$ سالب

③ في الربع الأول تبقى الزاوية كما هي

في الربع الثاني $180 - \theta$

في الربع الثالث $180 + \theta$

في الربع الرابع $360 - \theta$

④ ثم نحدد من خلال الشرط نضيف أو نطرح $\pi, 2\pi$

* النقطة في الربع الثالث و $\tan$ موجب

في الربع الأول والثالث ← نأخذ الربع الثالث

* نضيف π ← $\frac{\pi}{4} + \pi = \boxed{\frac{5\pi}{4}}$

* شرط السؤال $0 \leq \theta \leq 2\pi$ عكس عقارب

الساعة لذلك نضيف 2π

$$\left(r, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

Ex :- Convert the point $(-1, \sqrt{3})$ to Polar coordinate with $r < 0$ and $0 \le \theta \le 2\pi$?

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = \pm 2 = \boxed{-2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

المنقطة في الربع الثاني و tan يكون سالب
في الربع الثاني والربع الرابع ← الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{0 \le \theta \le 2\pi}$$

عكس عقارب الساعة
لذلك نضيف π

$$\left(-2, \frac{5\pi}{3}\right)$$

* تحويل معادلات بدلالة (x,y) إلى (r,θ)

نستخدم ⟵

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ex :- Find a polar equation for the curve represented by the given cartesian equation ?

(1) $xy = 4$

$$(r\cos(\theta))(r\sin(\theta)) = 4$$

$$r^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = 4$$

$$2\sin(\theta)\cos(\theta)\, r^2 = 8$$

$$r^2 = \frac{8}{\sin(2\theta)} = \boxed{8\csc(2\theta)}$$

② $4y^2 = x$

$$4(r\sin(\theta))^2 = r\cos(\theta)$$

$$4r^2\sin^2(\theta) = r\cos(\theta)$$

* القسمة على r غلط لأنها قد تكون صفر

$$4r^2\sin^2(\theta) - r\cos(\theta) = 0$$

$$r(4r\sin^2(\theta) - \cos(\theta)) = 0$$

$r = 0$ and $r = \dfrac{\cos(\theta)}{4\sin^2(\theta)}$

$$\boxed{r = \frac{\cos(\theta)}{4\sin^2(\theta)}}$$

* لو عوضنا $\theta = \frac{\pi}{2}$ الناتج يكون $r = 0$ لذلك لم نأخذه لأنه موجود

محمد السفاريني

③ $y = 2$

$r \sin(\theta) = 2$

$$\boxed{r = 2\csc(\theta)}$$

④ $y = \sqrt{3}\, x$

$\frac{y}{x} = \sqrt{3} \rightarrow \tan(\theta) = \frac{y}{x}$

$\tan(\theta) = \sqrt{3}$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

⑤ $x^2 + (y-3)^2 = 9$

$x^2 + \underbrace{y^2 - 6y + 9}$ $= 9$

مفكوك
العبارة التربيعية

$x^2 + y^2 - 6y = 0$

$$r^2 - 6r\sin(\theta) = 0$$

$$r(r - 6\sin\theta) = 0$$

$$r = 0 \qquad r = 6\sin(\theta)$$

$$\boxed{r = 6\sin(\theta)}$$

Ex :-

* تحويل المعادلات من $(r,\theta) \rightarrow (x,y)$

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

→ * نستخدمهم عند التحويل

① $r^2 = r\cos(\theta)$

$$\boxed{x^2 + y^2 = x}$$

② $r\cos(\theta) = -4$

$$\boxed{x = -4}$$

③ $r = \sin(\theta)$

* نضرب ب r للطرفين

$$r^2 = r\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = y$$

$$x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}}$$

④ $r = \sec(\theta)\tan(\theta)$

$$r = \frac{1}{\cos(\theta)} * \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$r\cos^2(\theta) = \sin(\theta)$$ *نضرب r للطرفين

$$r^2\cos^2(\theta) = r\sin(\theta).$$

$$(r\cos(\theta))^2 = r\sin(\theta)$$

$$\boxed{x^2 = y}$$

5 $\theta = \frac{\pi}{4}$

نجيب tan للطرفين *

$$\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{y}{x} = 1$$

$$\boxed{y = x}$$

6 $r = \dfrac{4}{3\cos(\theta) - 2\sin(\theta)}$

ضرب تبادلي *

$$3r\cos(\theta) - 2r\sin(\theta) = 4$$

$$\boxed{3x - 2y = 4}$$

* Polar curves $\Longrightarrow$

* مهم جداً في درس المساحات

* $\boxed{r = a}$

ربّع المعطى فيني

$r^2 = a^2$

$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$ $\longrightarrow$

circle دائرة

المركز = $(0,0)$

a = نصف القطر

Ex :- The polar equation $r = 5$ represent ?

$r = 5$

$r^2 = 25$

$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

Circle

center = $(0,0)$

radius = 5

Ex :- Sketch the graph of

$r = 2$?

$r = 2$

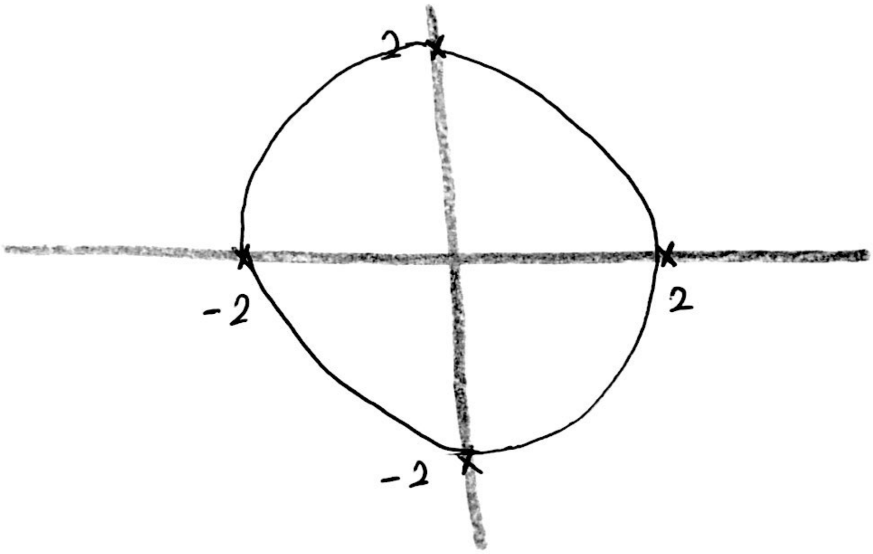
$r^2 = 4$

$\boxed{x^2 + y^2 = 4}$

<u>circle</u>

centere $(0,0)$

radius $= 2$



سيغلي

$$\boxed{r = 2a\cos(\theta) + 2b\sin(\theta)}$$

* إضرب كل حد بـ r

$$r^2 = 2ar\cos(\theta) + 2br\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2}$$

Circle

center $= (a,b)$

radius $= \sqrt{a^2+b^2}$

Ex :- The Polar equation

$r = 10\cos(\theta) + 6\sin(\theta)$ represent ?

* اضرب كل الـ بـ r

$$r^2 = 10r\cos(\theta) + 6r\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 10x + 6y$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 6y = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25 + 9$$

<u>Circle</u>

center $= (5, 3)$

radius $= \sqrt{34}$

* لو كان a يساوي صفر $\Leftarrow$

$$r = 2b\sin(\theta)$$

* نضرب بـ r

$$r^2 = 2br\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 2by$$

$$x^2 + y^2 - 2by = 0$$

$$\boxed{x^2 + (y-b)^2 = b^2}$$ $\Rightarrow$ Circle

center = $(0, b)$

radius = b

* لو كان b يساوي صفر $\Leftarrow$

$$r = 2a\cos(\theta)$$

* نضرب بـ r

$$r^2 = 2ar\cos(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$\boxed{(x-a)^2 + y^2 = a^2} \Longrightarrow \underline{\underline{\text{circle}}}$$

center = $(a, 0)$

radius = a

Ex :- Sketch the graph of $r = 4\sin(\theta)$?

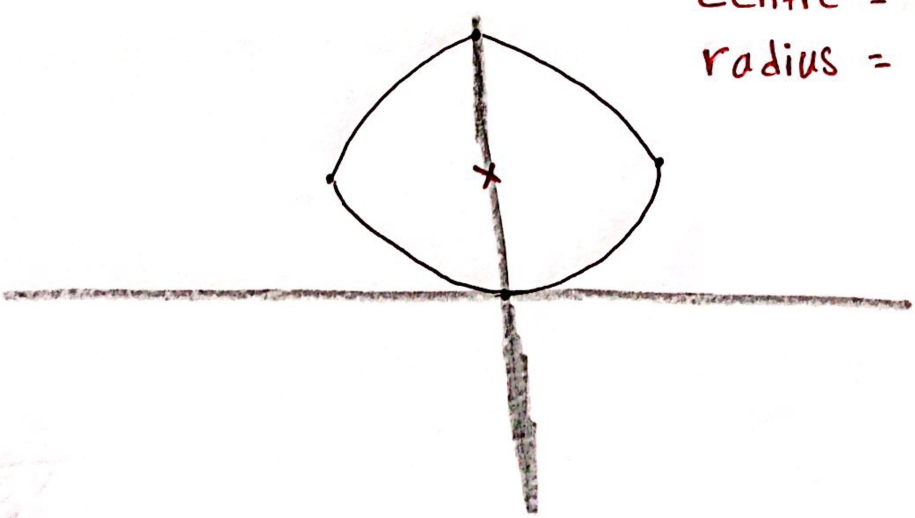
$$r = 4\sin(\theta) \longrightarrow r^2 = 4r\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 4y \longrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 + (y-2)^2 = 4}} \longrightarrow \underline{\underline{\text{circle}}}$$

centre = $(0, 2)$

radius = 2



* ملاحظات ⟸

* في حالة $\boxed{a=0}$ الرسمة تكون إما الجزء العلوي أو السفلي وذلك يتحدد حسب قيمة b

$b \oplus \rightarrow$ علوي

$b \ominus \rightarrow$ سفلي

* في حالة $\boxed{b=0}$ الرسمة تكون إما على اليمين أو على اليسار وذلك يتحدد حسب قيمة a

$a \oplus \rightarrow$ يمين

$a \ominus \rightarrow$ يسار

* نصف القطر دائماً موجب .

⊛ Cardioid

$$r = a(1 + \cos(\theta))$$

$$\boxed{r = a + a\cos(\theta)}$$

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{r = a - a\cos(\theta)}$$

* الرسمة تكون على x-axis ولكن رأس الرسمة اما أن يكون على ⊕x أو ⊖x وذلك يتحدد عن طريق إشارة cos(θ)

⊕ → ⊗⊕

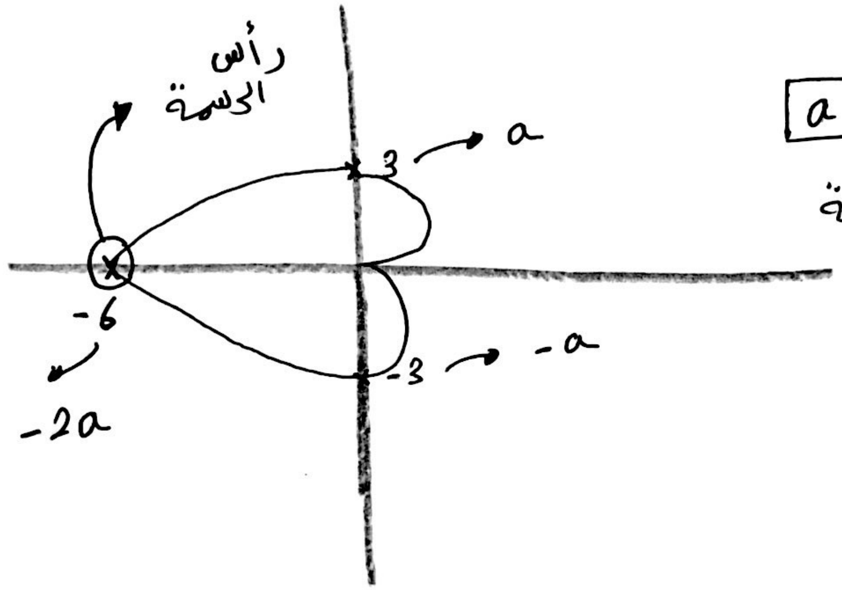
⊖ → ⊗⊖

* قيمة a يجب أن تكون موجبة

Ex :- SkecH the graph

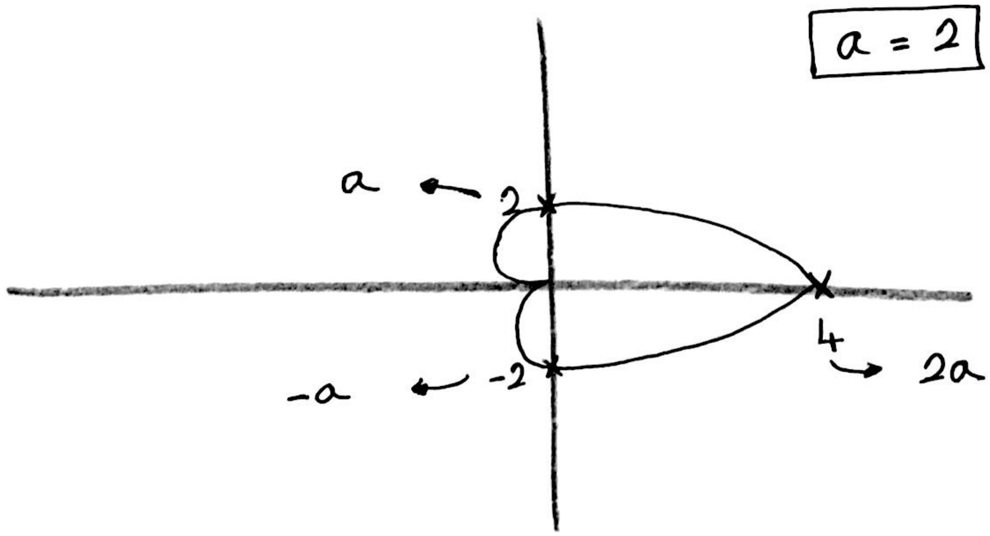
1. $r = 3 - 3\cos(\theta)$

2. $r = 2 + 2\cos(\theta)$?



$\boxed{a = 3}$

* عند رأس الجسمة $\pm 2a$



$\boxed{a = 2}$

* $r = a(1+\sin(\theta))$

$$\boxed{r = a + a\sin(\theta)}$$

$r = a(1-\sin(\theta))$

$$\boxed{r = a - a\sin(\theta)}$$

* المرسمة بتكون على y-axis ولكن رأس المرسمة إما أن يكون على y⊕ أو y⊖ وذلك يتحدد عن طريق إشارة $\sin(\theta)$

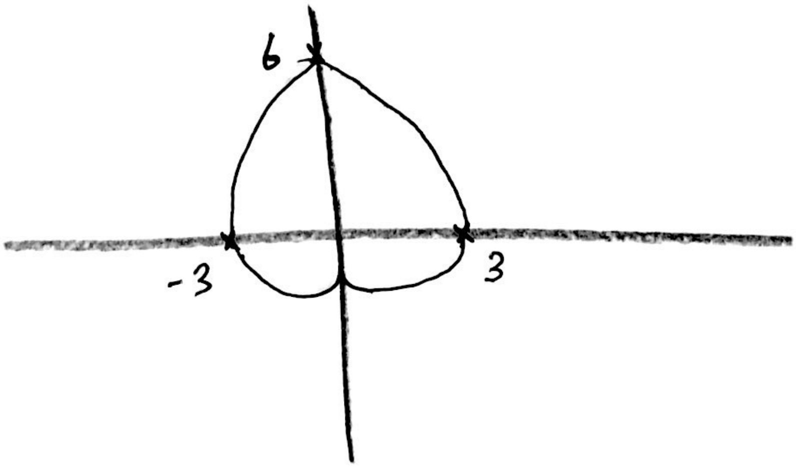
$\oplus \longrightarrow y\oplus$

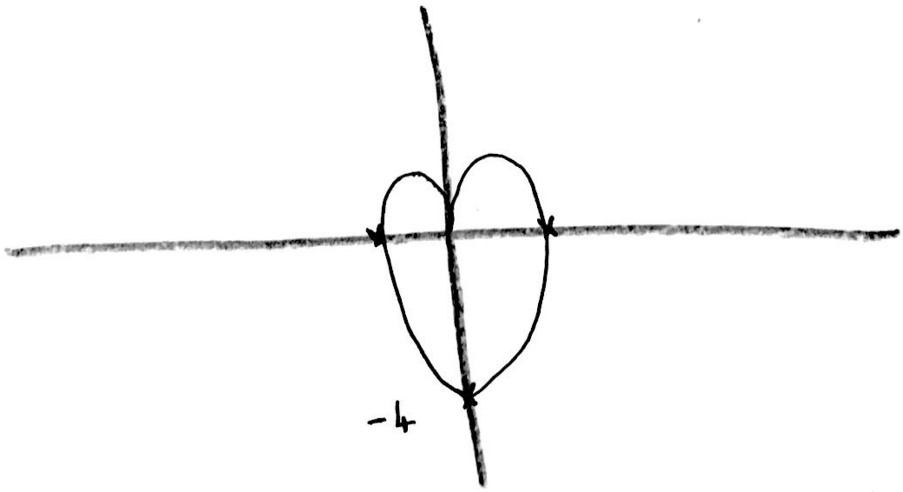
$\ominus \longrightarrow y\ominus$

Ex :- Sketch the graph of

① $r = 3 + 3\sin(\theta)$

② $r = 2 - 2\sin(\theta)$





* Area in polar $\Rightarrow$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta 1}^{\theta 2} r^2 \, d\theta \longrightarrow$$

وجود منحنى واحد

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta 1}^{\theta 2} \left((r_2)^2 - (r_1)^2 \right)^2 \cdot d\theta$$

وجود منحنيين

ملاحظة $\Leftarrow$

الزوايا هنا تكون بدلالة الأرباع .

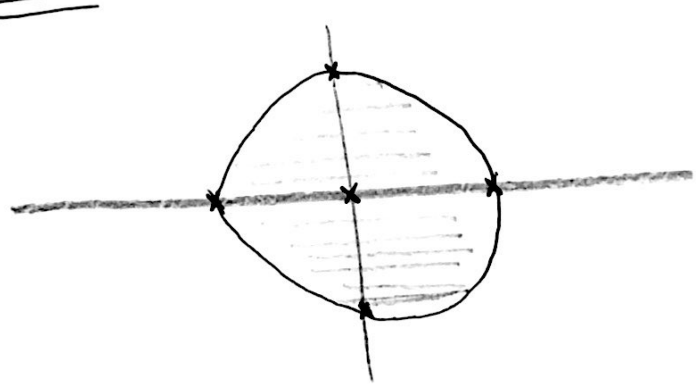
لسنوات

Ex :- The area enclosed by the polar curve $r = 2$ equals ?

$r = 2$ ربّع الطرفين

$r^2 = 4$

$$x^2 + y^2 = 4$$



* نستخدم القانون الأول لوجود منحنى واحد

$$\frac{1}{2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} r^2 \, d\theta \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 4 \cdot d\theta$$

$$= \boxed{4\pi}$$

* الزاوية لفّنا ⇐

$\theta 1 \rightarrow 0$

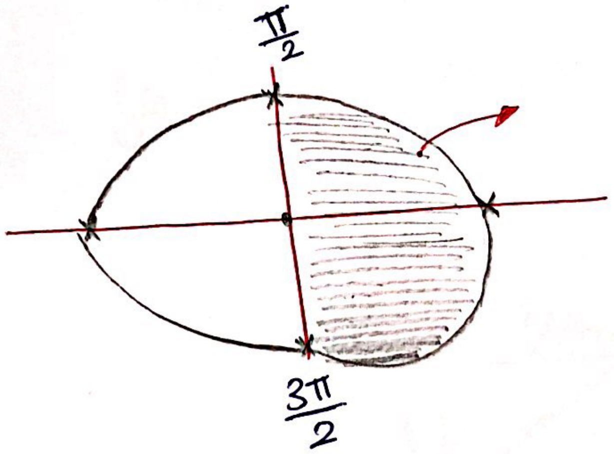
$\theta 2 \rightarrow 2\pi$

د. آلاء

Ex :- Find the area of the region in the right half plane and inside $r = 5$?

$r = 5$

$r^2 = 25 \longrightarrow x^2 + y^2 = 25$



المنطقة المطلوبة

* نستخدم القانون الأول وهو

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (5)^2 \, d\theta$$

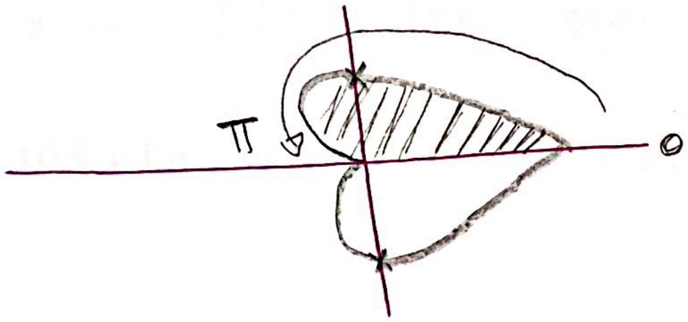
* الحد السفلي يجب أن يكون أصغر من الحد العلوي

منحنى واحد ← القانون الأول

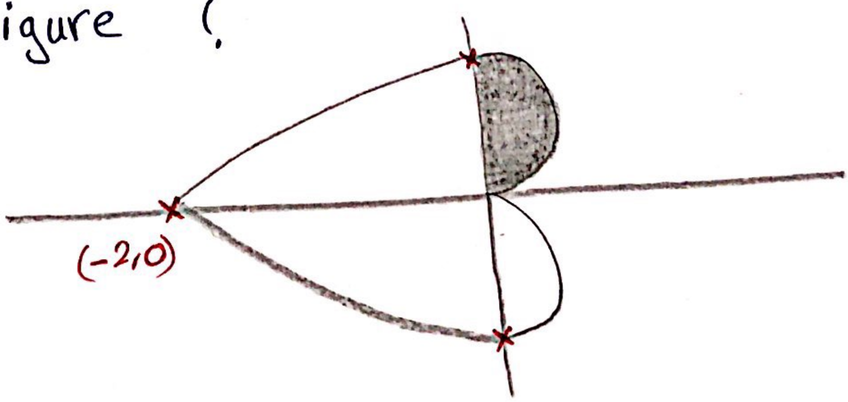
$$\frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (1+\cos(\theta))^2 \cdot d\theta$$

<u>or</u> $$2 * \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \cdot d\theta$$

* لمعرفة الزاوية ابدأ من المنطقة المظللة و اعرف الى أين تصل



Ex :- Find the area from the figure ?



ملاحظات مهمة ⇐

فـ نختار هذه الزوايا

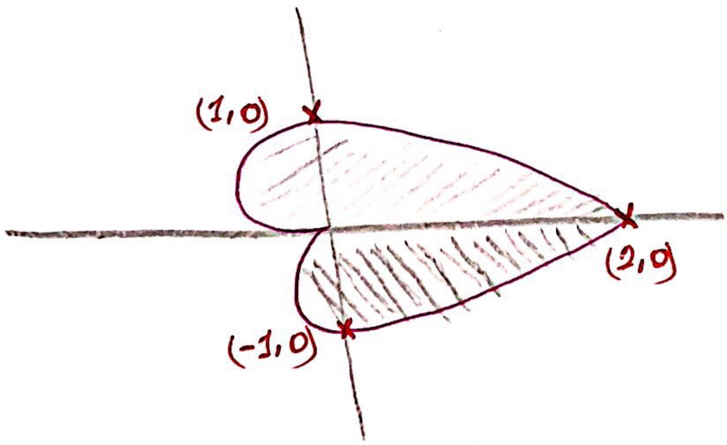
$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

or

$\theta_1 = 0$ $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

نضرب بـ 2 لاننا أخذنا ربع واحد فقط

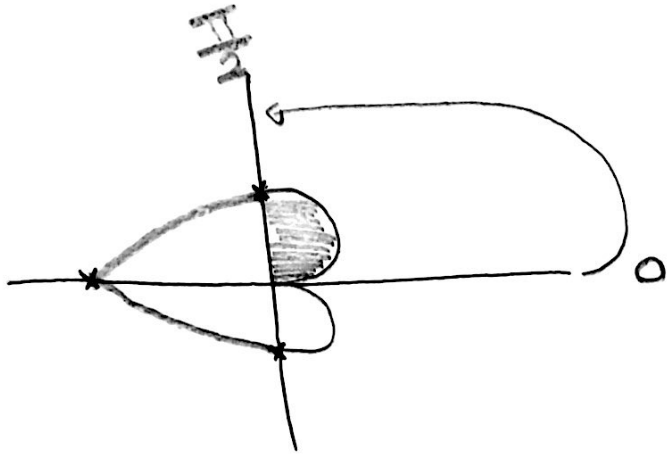
Ex :- Find the area of the region inside $r = 1 + \cos\theta$?



من خلال الرسمة نعرف $\Leftarrow$

$$r = 1 - \cos(\theta)$$

الزاوية إمشي مع المنطقة المظللة

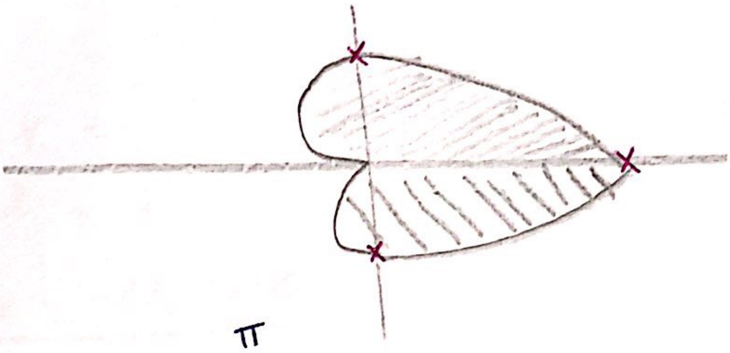


$$\frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos(\theta)\right)^2 \cdot d\theta$$

للتعليق

سنوات

Ex :- The area of the region enclosed by cardiod $r = 3 + 3\cos(\theta)$ is ?



$$2 * \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3 + 3\cos(\theta))^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (3 + 3\cos(\theta))^2 \, d\theta$$

Ex :- Find the area of the region that lied inside the circle $r = 3\sin(\theta)$ and Outside the Cardioid $r = 1 + \sin(\theta)$?

$r = 3\sin(\theta)$

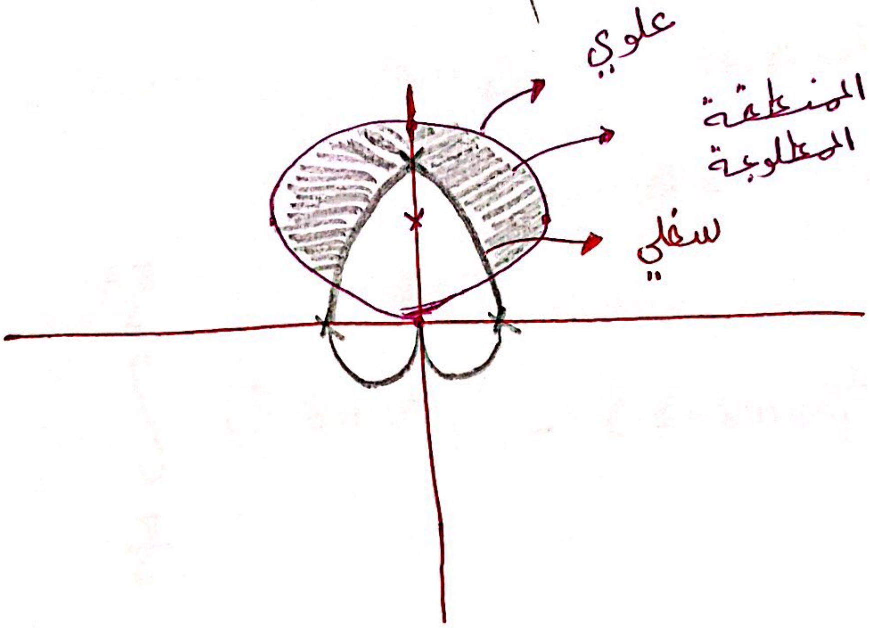
$r^2 = 3r\sin(\theta)$

$x^2 + y^2 - 3y = 0$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

$r = 1(1 + \sin(\theta))$

$\underline{a = 1}$



* نلاحظ وجود منحنيين نستخدم القانون الثاني .

* في حال وجود منحنيين يجب أن نساوي المنحنيات .

$$3\sin(\theta) = \sin(\theta) + 1$$

$$2\sin(\theta) = 1$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

حدود التكامل

* لمعرفة الاقتران العلوي من السفلي

اذهب للرسمة وحدد .

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3\sin(\theta))^2 - (1+\sin(\theta))^2 \, d\theta$$

Ex :- Find the area Outside $r = 2 - 2\cos(\theta)$ and Inside $r = 4$?

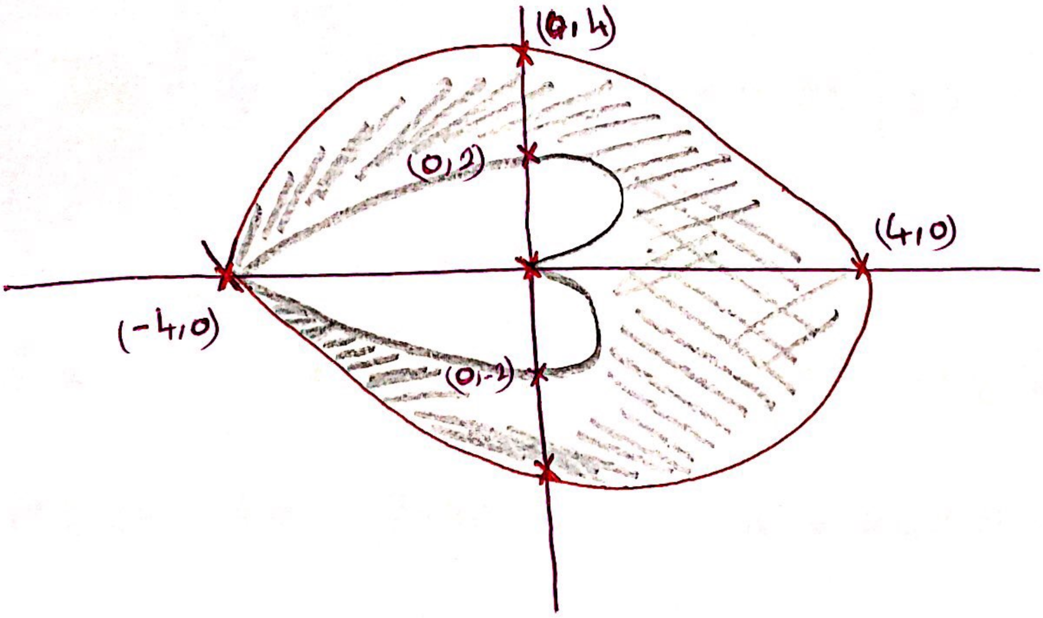
$r = 4$

$r^2 = 16$

$\boxed{x^2 + y^2 = 16}$

$r = 2(1 - \cos(\theta))$

$\underline{a = 2}$



$r = 4 \leftarrow$ العلوي

$r = 2 - 2\cos(\theta) \leftarrow$ السفلي

$$2 - 2\cos(\theta) = 4$$

$$-2 = 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = -1$$

$$\theta = \pi$$

$$2 * \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[16 - (2 - 2\cos(\theta))^2\right] d\theta$$

or $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[16 - (2 - 2\cos(\theta))^2\right] d\theta$

للسنوات

Ex :- The area of the region inside the polar curve $r = 2\sin(\theta)$ and outside the polar curve $r = \sqrt{2}$?

$r = 2\sin(\theta)$

$r^2 = 2r\sin(\theta)$

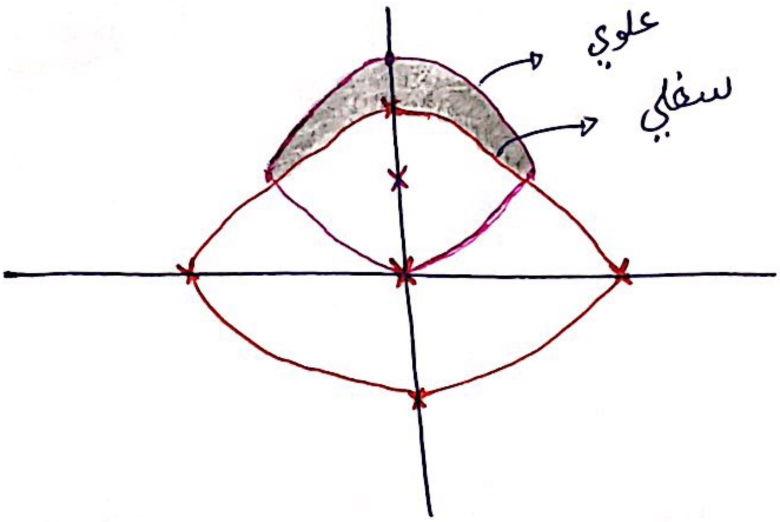
$x^2 + y^2 - 2y = 0$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$r = \sqrt{2}$

$r^2 = 2$

$x^2 + y^2 = 2$



$r = 2\sin(\theta)$ ← العلوي

$r = \sqrt{2}$ ← السفلي

$2\sin(\theta) = \sqrt{2}$

$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (4\sin^2(\theta) - 2)\, d\theta$$

Ex :- Find the Area of the region inside $r = 6$ to the right of the line $r = 3\sec(\theta)$?

$r = 6$

$r^2 = 36$

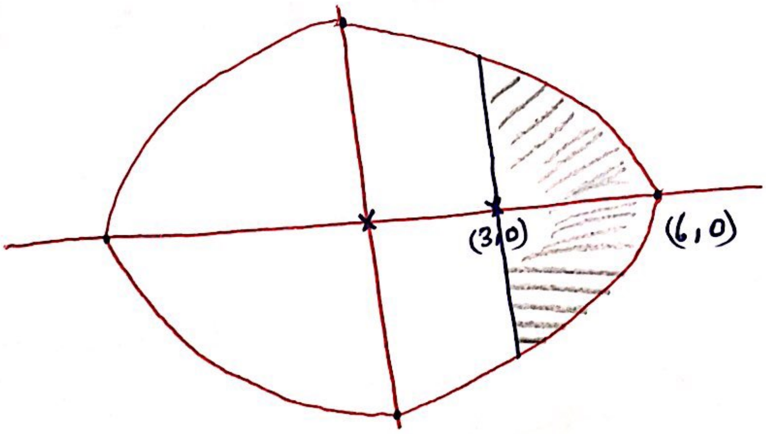
$\boxed{x^2 + y^2 = 36}$

$r = 3\sec(\theta)$

$r = \dfrac{3}{\cos(\theta)}$

$r\cos(\theta) = 3$

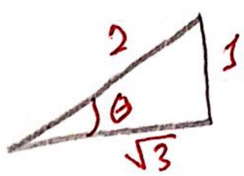
$\boxed{x = 3}$



$6 = 3\sec(\theta)$

$\sec(\theta) = 2$

$\cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \theta = \dfrac{-\pi}{3} , \dfrac{\pi}{3}$



$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(36 - 9\sec^2(\theta)\right) d\theta$$

or

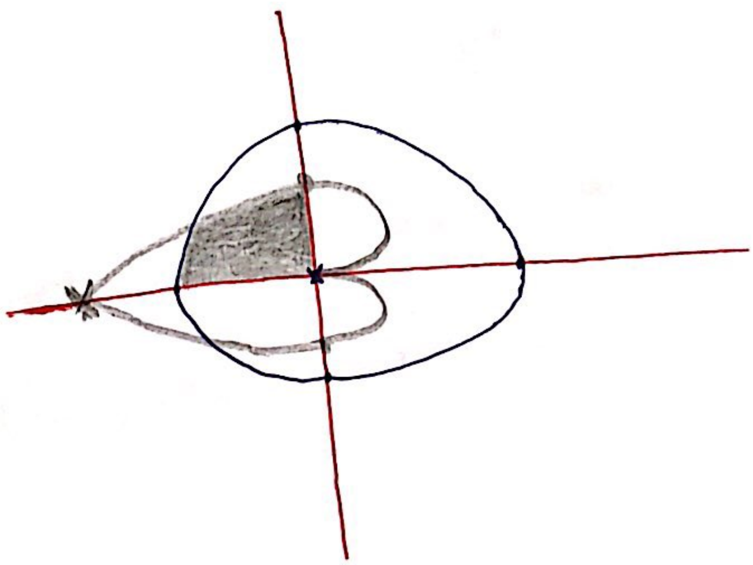
$$2 * \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(36 - 9\sec^2(\theta)\right) d\theta$$

Ex :- Find the Area that is common $r = 2 - 2\cos(\theta)$ and $r = 3$ in second quadrant ?

$r = 3$

$r^2 = 9$

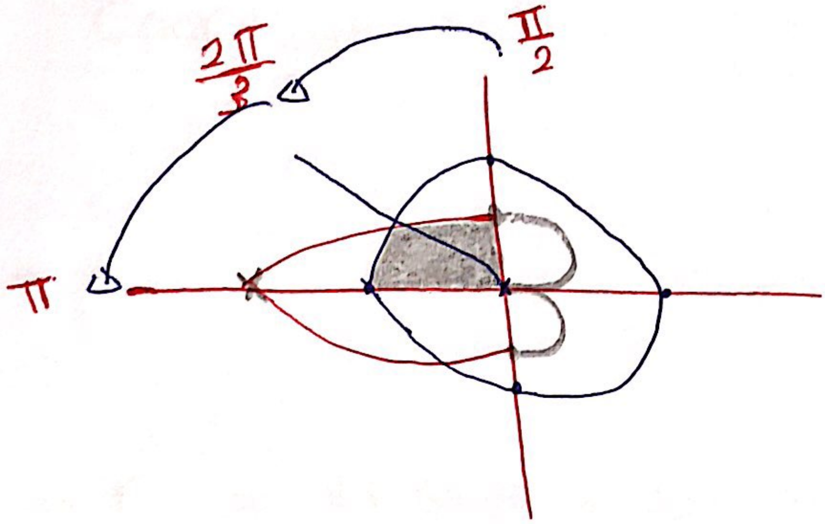
$$\boxed{x^2 + y^2 = 9}$$



$$2 - 2\cos(\theta) = 3$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} = 120$$



$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (2 - 2\cos(\theta))^2 \, d\theta \quad + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (3)^2 \, d\theta$$

* عندما ننظر الى المنطقة المحصورة

لا يوجد علوي وسفلي

أسئلة متنوعة

Q1 Write the equation سنوات

$r = \pi \sin(\theta) + 2a\cos(\theta)$ in rectangular

Coordinates ? $\boxed{a \neq 0}$

* إضرب المعادلة بـ r ثم أكمل المربع

$r^2 = \pi r \sin(\theta) + 2ar\cos(\theta)$

$x^2 - \pi y + y^2 - 2ax = 0$

$$\boxed{(x-a)^2 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{\pi^2}{4}}$$

$\boxed{Q2}$ Write the equation سنوات

$$x^2 + y^2 - e^3 x = e^3 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

in Polar coordinates ?

$$r^2 - e^3 r\cos(\theta) = e^3 r$$

$$r^2 = r(e^3 + e^3 \cos(\theta))$$

$$\boxed{r = e^3 + e^3 \cos(\theta)}$$

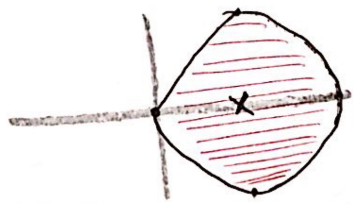
سنوات

$\boxed{Q3}$ Find the Area of the region that enclosed by $r = \cos(\theta)$?

$$r = \cos(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = x$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$



$$2 * \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Q4 Write the equation سنوات

$$4\pi^2 = \frac{r(r - 2\pi\cos(\theta))}{\sin(2\theta)\cot(\theta) + 2\sin^2(\theta)}$$

in rectangular equation ?

$\sin(2\theta)\cot(\theta) + 2\sin^2(\theta) \longrightarrow$

$2\sin(\theta)\cos(\theta) \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + 2\sin^2(\theta) \longrightarrow$

$2\cos^2(\theta) + 2\sin^2(\theta) \longrightarrow 2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$

$= 2$

$$4\pi^2 = \frac{r^2 - 2\pi r\cos(\theta)}{2}$$

$$8\pi^2 = x^2 + y^2 - 2\pi x$$

$$\boxed{(x-\pi)^2 + y^2 = 9\pi^2}$$

$\boxed{Q5}$ Write out the integral formulas that represent the area of the region common to the circles

سنوات

$r = 2\sin(\theta)$ and $r = 2\cos(\theta)$?

$r = 2\sin(\theta)$

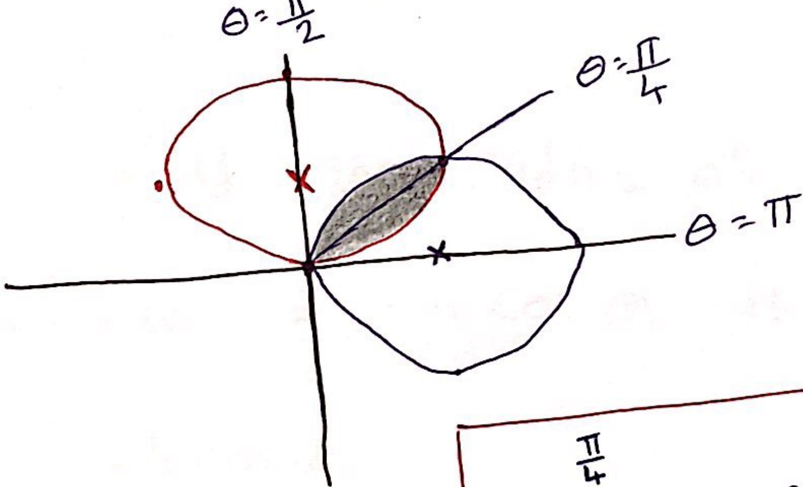
$x^2 + y^2 - 2y = 0$

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 = 1}$$

$r = 2\cos(\theta)$

$x^2 - 2x + y^2 = 0$

$$\boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$



$2\sin(\theta) = 2\cos(\theta)$

$\tan(\theta) = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin(\theta))^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(\theta))^2\, d\theta}$$

Q6 Find the angles of intersection between the polar curves $r = 6\sin(\theta)$ and $r = 3$? لسنوات

$$6\sin(\theta) = 3$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{5\pi}{6}}$$

Q7 Find the radius of the circle $r = -4\cos(\theta)$ is ? لسنوات

$$r = -4\cos(\theta)$$

$$r^2 = -4r\cos(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = -4x$$

$$x^2 + 4x + y^2 = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \longrightarrow \boxed{r = 2}$$

د. ميسم

$\boxed{Q8}$ Find the parametric eq for $9x^2 + 4y^2 = 36$?

نقسم على 36 ←

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{4}\cos(t) \\ y &= \sqrt{9}\sin(t) \end{aligned}}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

د. ميسم

$\boxed{Q9}$ find the Cartezian eq

$x = 2\sin^2(t)$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$?

$y = 4\cos^2(t)$

$\sin^2(t) = \frac{x}{2}$ $\quad \cos^2(t) = \frac{y}{4}$

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$

$$\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1}$$