Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

STATICS SUMMARY

EYAS HAMAD

اللجنة الأكاديمية للهندسة المدنية

ملخص مادة الستاتيك

يشمل الملخص شرح تفصيلي لجميع أفكار المادة وفهرس للموضوعات ليسهل الرجوع لكل موضوع

قبل البدأ بدراسة المادة تحتاج المادة الى متابعة فلا تهملها لليلة الامتحان

طريقة الدراسة :

المتابعة مع مدرس المادة ثم دراسة الموضوع الذي تم أخذه من الدوسية ثم الإنتقال الى اسئلة السنوات السابقة قبل الإمتحان بفترة

تم أخذ المعلومات والأسئلة التي وردت في هذا الملخص من الكتاب المعتمد تدريسه في الجامعة الهاشمية

(statics hibbeler 14th edition)

وأخيرا فإني أذكر هذا العمل هو محض عمل بشري , ليس للعصمة فيه سبيل , اذ الخطأ وارد , بل واقع , والعصمة ممنوعة فمن وجد فيه خطأ فليصلحه , وليقدم واجب النصح لأخيه

إعداد : إياس حمد

Eyas hamad

Civilittee

اللجنة الأكاديمية للهندسة المدنية

ملاحظة : هذا الملخص لا يشمل (CH 8)

- **Statics** deals with the equilibrium of bodies, that is those that are either at **<u>rest</u>** or move with a **<u>constant velocity</u>** .

الستاتيك يتعامل مع توازن الأجسام ، أي تلك التي هي إما في حالة **<u>السكون</u>** أو تتحرك **<u>بسرعة ثابتة</u>** .

- Where as **dynamics** is concerned with the accelerated motion of bodies.

بينما الداينميك تهتم بالحركة المتسرعة للأجسام

في الجامعة الهاشمية الداينمك لا يعطى لطلبة الهندسة المدنية .

- We can consider statics as a special case of dynamics, in which the **acceleration is zero** .

يمكننا إعتبار أن الستاتيك أنها فرع خاص من الداينميك والتي يكون فيها السرعة ثابتة أي **يعني التسارع يكون صفر .**

- **Particle**(الجزيئ) : A particle has a mass, but a size that can be **neglected.**

شيئ له كتلة ولكن حجمة **يمكننا إهماله** بمقارنته بالمحيط الذي هو فيه.

1 General Principles 3

الشابتر الأول **لا يأتي عليه بالعادة أي سؤال في الإمتحان** وهو عباره عن **معلومات بسيطه** يتوجب عليك كمهندس معرفتها والإحاطه بها وعادة يؤخذ هذا الشابتر في المحاضرة الأولى لكم .

ما عليكم إلا أن تتخذوا هذا المصدر هو **مصدر فهمك الوحيد** وسيكون كافي وافي بشرط حل جميع الأسئلة وسرعة الحل والإتقان والتركيز في الإمتحان والهدوء .

إمتحان مادة الفيرست غالبا يشمل الشباتر الأربع و**الفيرست** يعتبر **أصعب جزء** والباقي سهل إن شاء الله وعليكم أن لا تسمعوا كلام محبط عن هذه الماده .

<u>إلى طلبة الهندسة المدنيه</u> : هذه أسهل مادة لكم في القسم وستعرفون دقة كلامي عندما تنجزون مواد الإنشاءات وسوف نراكم مرة أخرى تدرسونها غاية ل رفع المعدل .

رابط الكتاب إضافة إلى حلوله موجودة على موقع الهندسة المدنية – سيفلتيي

<u>إنتهى الكلام وحان البدء بالشرح , مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح .</u>

❑ **Units(الوحدات) :**

1- **SI units** : النظام الأمريكي

2- **US** : النظام البريطاني

TABLE 1–1 Systems of Units

Name	Length	Time	Mass	Force
International System of Units SI	meter m	second s	kilogram kg	newton* N $\left(\frac{kg \cdot m}{s^2}\right)$
U.S. Customary FPS	foot ft	second s	slug* $\left(\frac{lb \cdot s^2}{ft}\right)$	pound lb

*Derived unit.

➢ Table 1–2 provides a set of **Direct conversion** factors between FPS and SI units for the basic quantities.

هنا تحويل الوحدات بين النظامين ويجب قبل أن تبدأ بحل السؤال أن تكون الوحدات متطابقة وكما جرى العادة دائما تكون الوحدات المتطابقة وخلاف ذلك يعطى في الإمتحان فهذا الجدول فقط من باب العلم بالشئ ولكونك مهندس عليك أن تعرف هذه المعلومات

TABLE 1–2 Conversion Factors

Quantity	Unit of Measurement (FPS)	Equals	Unit of Measurement (SI)
Force	lb		4.448 N
Mass	slug		14.59 kg
Length	ft		0.3048 m

➢ When a numerical quantity is either <u>**very large or very small**</u>, the units used to define its size may be modified by using a prefix .

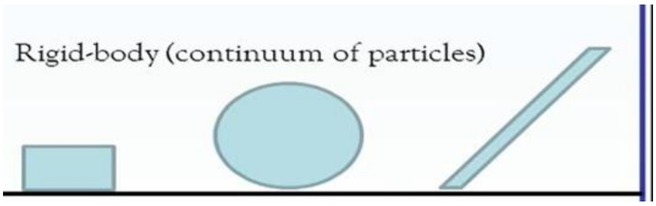
عندما تكون الكمية العددية كبيرة جدًا أو صغيرة جدًا ، قد يتم تعديل الوحدات المستخدمة لتحديد حجمها ولسهولة إستخدامها في الحسابات وتكون أكثر عملية .

- 4000 N = 4kN
- 4000000N=4*10^6 = 4MN

❖ **Rigid Body** (الجسم الجاسئ أو المثالي): **Combination** of a large number of particles in which all the particles remain at a fixed distance from one another, both before and after applying a load. This model is **important** because : the body's shape does not change when a load is applied, and so we do not have to consider the type of material from which the body is made

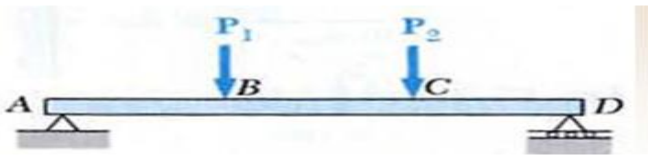
مزيج من عدد كبير من الجزيئات التي تبقى فيها جميع الجزيئات على مسافة ثابتة من بعضها البعض ، قبل وبعد تطبيق الحمل.

لا يتغير شكل الجسم عند تطبيق الحمل ، وبالتالي لا يتعين علينا النظر في نوع المادة التي يتكون منها الجسم لذلك هو مهم .



❖ **Concentrated Load :** Represents the effect of a loading which is assumed to act at **a point** on a body.

تمثل القوة المركزة تأثير التحميل الذي يُفترض أن يعمل عند **نقطة ما** على الجسم.



❖ **Distributed Load**: A load applied across <u>**a length**</u> or area instead of at one point .

تأثير القوةعلى <u>**طول أو منطقة**</u> بدلاً من نقطة واحدة .

سيتم شرحه بالتفصيل في نهاية الشابتر الرابع

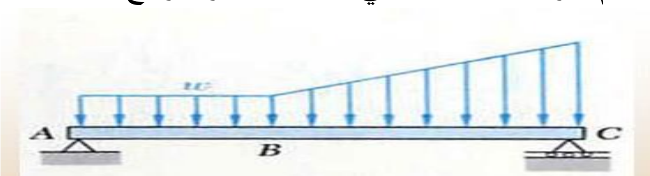


TABLE 1–3 Prefixes

	Exponential Form	Prefix	SI Symbol
Multiple			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
Submultiple			
0.001	10^{-3}	milli	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

❖ **Rounding Off Numbers : As a general rule**, any numerical figure ending in a number **greater than** five is rounded up and a number **less than** five is not rounded up .

تقريب الأرقام والمعتاد عليه في هذه المادة نريد ان تكون الإجابات مقربة لمنزلتين عشريتين وألية التقريب هي نفسها وسأوضح بالأمثلة أفضل .

نريد أن نقرب هذه الأرقام إلى **منزلتين عشريتين** .

9.38<u>6</u>6 =9.39

(الرقم الثالث أكبر من 5 لذلك نجعل 8 تصبح 9)

1.34<u>1</u>= 1.34

(الرقم الثالث أقل من 5 لذلك 4 تبقى كما هي)

3.55<u>8</u>7 = 3.56

(الرقم الثالث أكبر من 5 لذلك نجعل 5 تصبح 6)

❑ **Example.** Convert $2\ \frac{km}{h}$ to $\frac{m}{s}$,

How many $\frac{ft}{s}$ is this?

❑ **لا يأتي مثل هذا السؤال لكني وضعته من <u>باب الإحتياط فقط</u>**

$$2\ \text{km/h} = \frac{2\ \cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{1000\ \text{m}}{\cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right)$$
$$= \frac{2000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 0.556\ \text{m/s}$$

$$0.556\ \text{m/s} = \left(\frac{0.556\ \cancel{\text{m}}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{ft}}{0.3048\ \cancel{\text{m}}}\right)$$
$$= 1.82\ \text{ft/s}$$

Note :

1km=1000m

1 hr=3600s

1ft=0.3048

2 Force Vectors 17

❖ **Scalar (A) :** A scalar is any positive or negative physical quantity that can be **completely specified by its magnitude**.

العددية هي أي كمية مادية موجبة أو سالبة يمكن تحديدها بالكامل من حيث مقدارها .

➢ <u>Examples</u> of scalar quantities include length, mass, and time .

. تتضمن **أمثلة** الكميات العددية الطول والكتلة والوقت .

❖ **Vector ($\vec{A}$) :** Any physical quantity that requires both a **magnitude** and a **direction** for its complete description .

أي كمية مادية تتطلب كلاً من المقدار والاتجاه لوصفها الكامل.

➢ <u>**Examples of vectors**</u> encountered in statics are **force, position, and moment** .

. **أمثلة** على المتجهات هي القوة والموقع والعزم .

- A vector is shown graphically by an **arrow.**

يظهر المتجه بيانيا بواسطة **سهم**

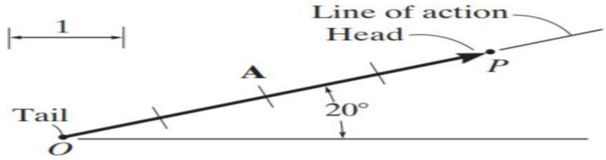
- **The length** of the arrow represents the **magnitude** of the vector .
- The **angle θ** between the vector and a fixed axis defines the **direction** of its line of action.

يمثل طول السهم مقدار المتجه .

الزاوية θ بين المتجه والمحور الثابت تعرف اتجاه المتجه .

- **The head or tip** of the arrow indicates the sense of direction of the vector .

يشير رأس السهم إلى اتجاه المتجه أي إلى أين يذهب .



❖ <u>**Multiplication and Division of a Vector by a Scalar.**</u>

ضرب وقسمة المتجهات على أعداد .

- If a vector is **multiplied by a positive scalar**, its magnitude is increased by that amount.

إذا ضرب المتجه ب عدد موجب فإن قيمته تزداد بمقدار قيمة العدد .

- **Multiplying by a negative scalar** will also change the directional sense of the vector and its magnitude is increased by that amount.

الان سنشرح كيفية الطريقة(انظر ل الرسمات) :

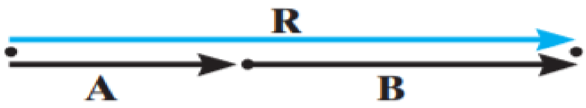
من كل متجه(رأس أو سهم) نقوم بمد خط موازي ل المتجه الثاني وبالتالي سيحدث نقطة تقاطع ثانية

ثم من نقطة إلتقاء المتجهين الأولى (نقطة التقاطع الأولى) نمد خط إلى نقطة الإلتقاء الثانية

الطريقة الثانية هي نفس الطريقة الأولى لكن هناك فرق وحيد :

الطريقة الأولى يتشكل لنا مثلثين أما في الطريقة الثانية فإننا **نكتفي ب مثلث واحد فقط** .

وإن كانوا على **نفس الإستقامة** فإننا نقوم بوضع المتجه الثاني من ذيله ونقوم بوضعه على رأس المتجه الأول كما هو موضح في الصورة التالية .



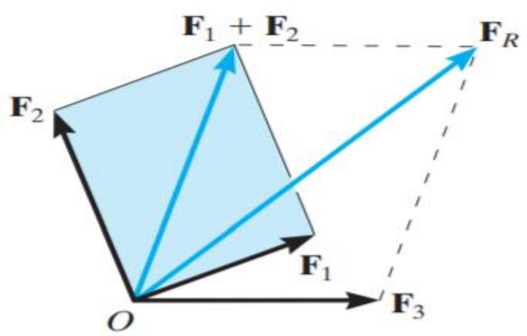
$$R = A + B$$

ملاحظة : **A+B=B+A**

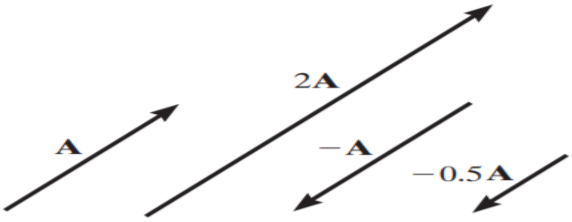
في حالة كان لدينا أكثر من متجه فلن يتغير شئ أبدا :

لنفرض أن لدينا ثلاث متجهات : نقوم بجمع المتجه الأول والثاني منتج لنا متجه محصل (الاول والثاني) ومن ثم جمع المتجه الثالث مع المتجه المحصل مكونا لدينا متجه شاملا المتجهات الثلاثة التي لدينا كما هو موضح في الصورة التالية .

$F_R=(F_1+F_2)+F_3$



- إذا ضرب المتجه ب عدد سالب فإن قيمته تقل بمقدار قيمة العدد وإيضا سوف يتغير إتجاه المتجه



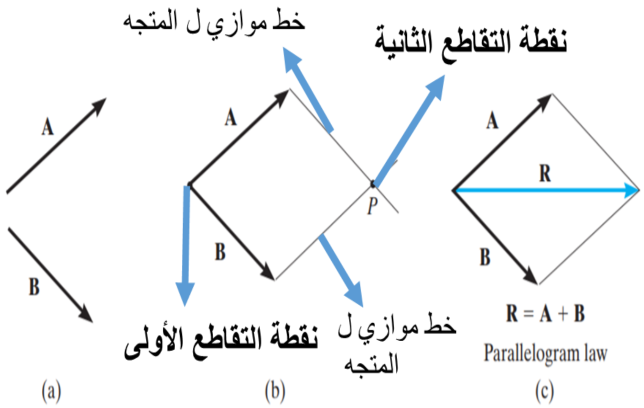
❖ **Vector Addition** :When adding two vectors together it is important to account for both their magnitudes and their directions.

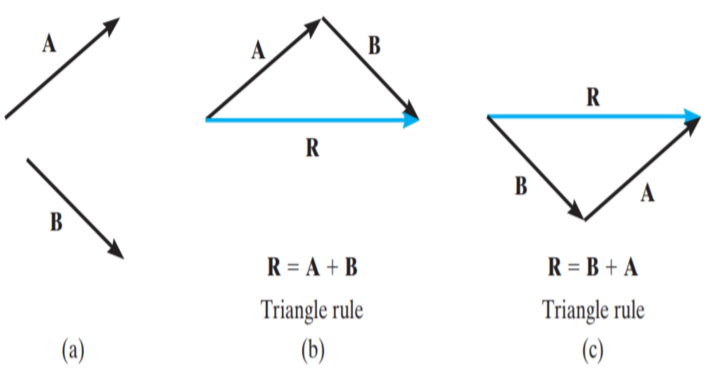
➢ To do this we must use the **parallelogram law** of addition or **triangle rule .**

عندما نريد جمع المتغيرين من المهم الإنتباه إلى مقدار كل متجه و إتجاه كل واحد منهم ويتم ذلك عن طريقتين وسنقوم بتوضحيهم الأن بالتفصيل الممل .

➢ As a special case, if the two vectors A and B are **collinear .**

حالة خاصة من الجمع : إذا كانوا على نفس الإستقامة سنوضح كيف تتم عملية الجمع .





❖ Vector Subtraction :

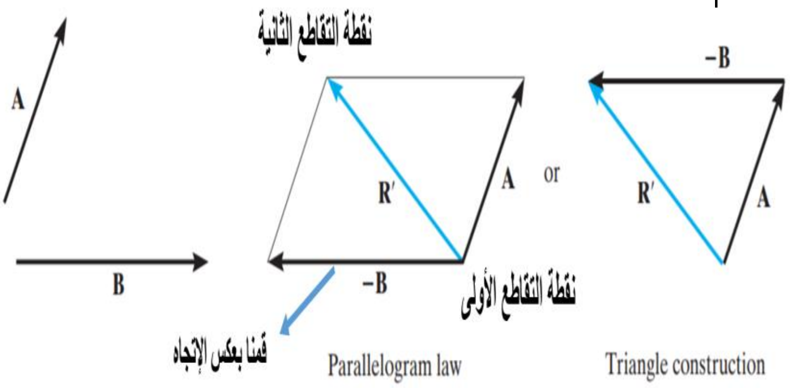
The resultant of the difference between two vectors A and B of the same type .

الطريقة التي قد تعلمناها في الجمع ستكون **مشابهة** في الطرح لكن بعض **الإختلافات فقط** .

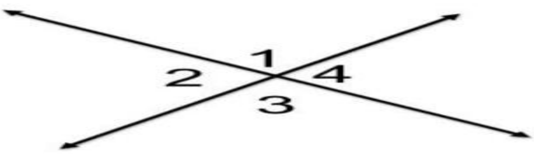
نعتبرهم في البداية جمع ونضع ذيل كل متجه على الذيل الأخرل المتجه **<u>لكننا الأن في الطرح</u>** لذلك **<u>نعكس</u>** إتجاه المتجه الثاني أي كأننا نعمل إمتداد له ومن ثم نمد خط موازي لكل متجه وبالتالي حدوث نقطة التقاطع ومن نقطة التقاطع الأولى نمد خط ل نقطة التقاطع الثاني .

الطريقة الأولى يتكون لنا مثلثين **والطريقة الثانية** فقط مثلث واحد كما ناقشنا في حالة الجمع .

$$R' = A - B = A + (-B)$$



- ما قبل البدء بالحل سنضع **<u>مراجعه بسيطة</u>** بعض النقاط الهامة جدا في حل الأسئلة ولا بد من تذكرها جيدا وإتقانها .



1) الزاويتان المتجاورتان : وهما زاويتين متجاورتين على خط مستقيم مجموع قياسهما 180درجة .

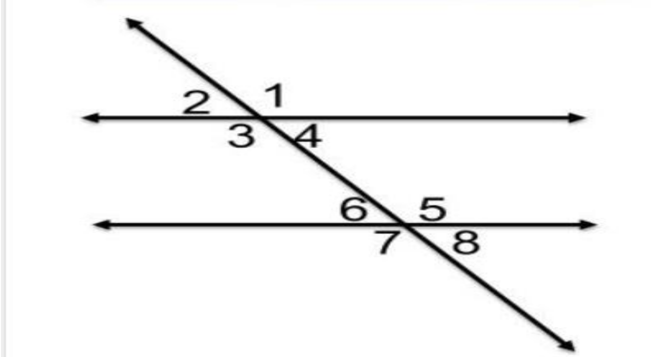
$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = 180$ درجة .

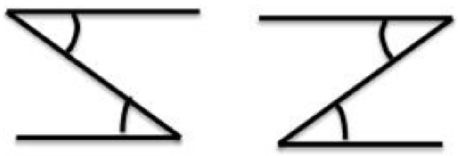
$\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180$ درجة .

2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس : هما زاويتان لهما الرأس نفسه وتقعان في جهتين مختلفين، وهي زوايا متساوية.

$\measuredangle 1 = \measuredangle 3$

$\measuredangle 2 = \measuredangle 4$



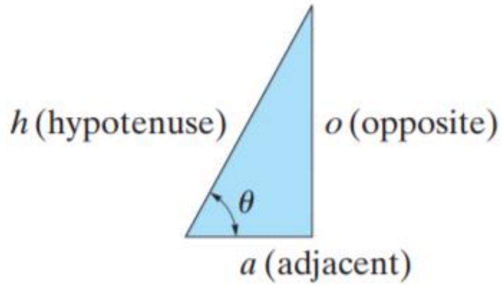


1) الزوايا المتبادلة : وهما كل زاويتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع وتقعان داخل الخطين الاخرين وتشكلان حرف z تقريبا .

إذا كان المستقيمان متوازيان :

$\measuredangle 6 = \measuredangle 4$

$\measuredangle 5 = \measuredangle 3$

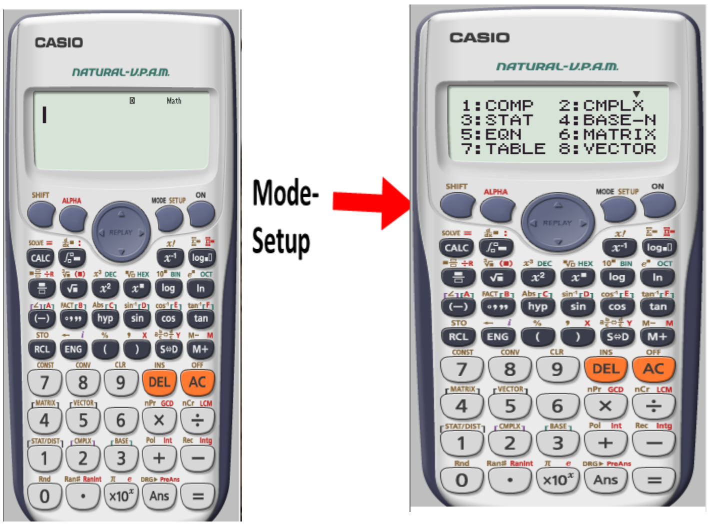


$$\sin\theta = \frac{o}{h}$$

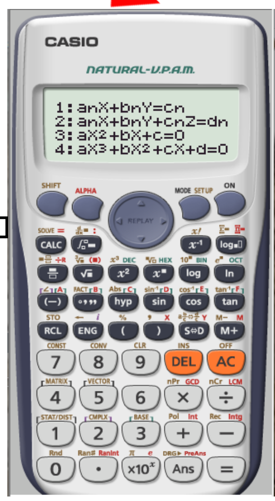
$$\cos\theta = \frac{a}{h}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a}$$

نظام حل المعادلات عن طريق الة الحاسبة

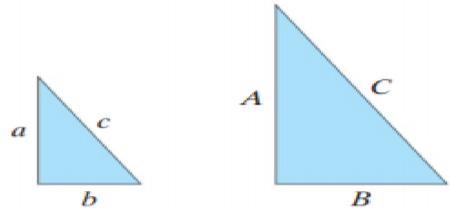


5



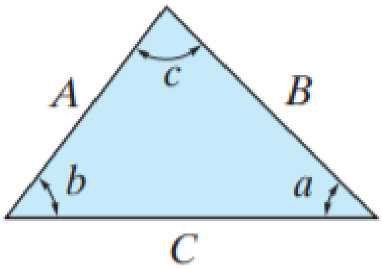
اضغط 1 ثم أدخل المعاملات

تشابه المثلثات



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

قوانين خاصة بالمثلثات غير قائمة الزاوية



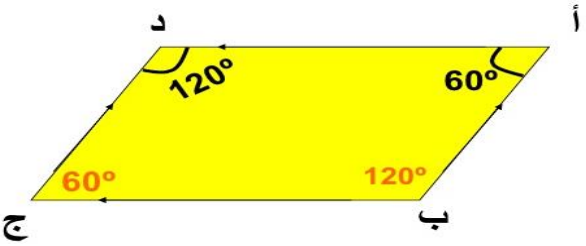
Cosine law:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

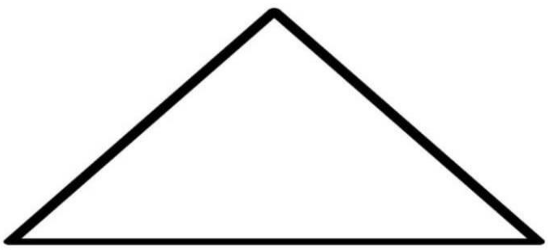
Sine law:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

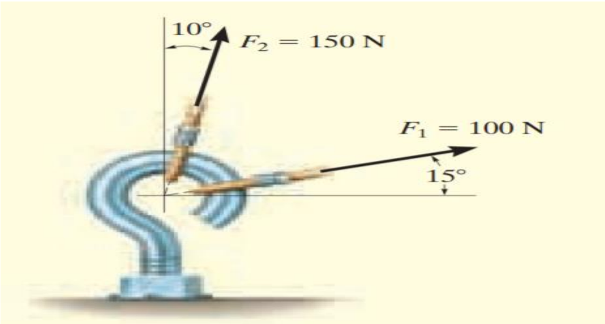
كل زاويتان متقابلتين متساويتان



مجموع زوايا المثلث 180 درجة

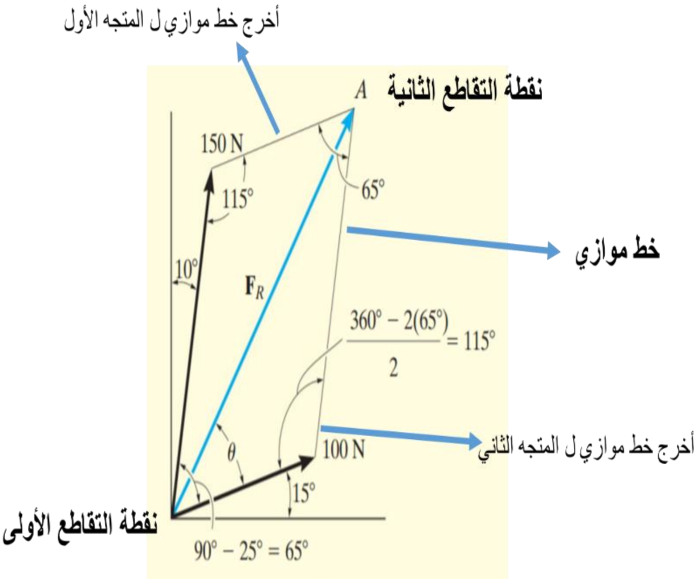


- **Example2.1 :** The screw eye in is subjected to two forces, F_1 and F_2. Determine the **magnitude and direction of the <u>Resultant force</u>** ? .

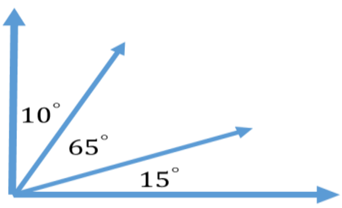


- **<u>ملاحظة :</u>** طريقة الرسم **اختيارية** أي في الإمتحان أنت لست مجبرا على إستخدامها إلا إذا طلب منك لأن هناك طريقة التحليل اسهل وأبسط بكثير وسنتحدث عنها لاحقا .

- **<u>الخطوة الأولى :</u>** نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية وهذه تكون **<u>القوة المحصلة</u>**

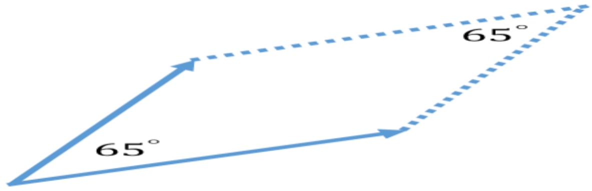


<u>الخطوة الثانية :</u> مهارتك في الزوايا يجب أن تكون قوية ولقد تحدثنا عن بعض الأساسيات التي سوف تحتاجونها



الزاوية كاملة هي 90 والزاوية بين المتجهين هي

<u>90-(10+15) =65</u>

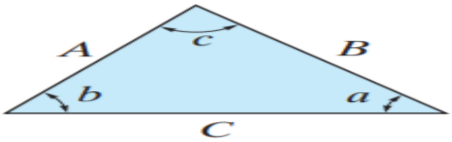


<u>ملاحظة هامة :</u> مجموع زوايا متوازي الأضلاع هو 360 وكل زاويتين **متقابلتين متساويتين**

<u>الخطوة الثالثة :</u> هذه هي القوانين التي سوف يتم استخدامها في هذا الشابتر :

بشرط أن لا يكون المثلث قائم الزاوية .

قوانين مهمة جدا وسيتم إستخدامها بشكل كبير فعليكم الإستعانه بهم دائما وحفظهم .



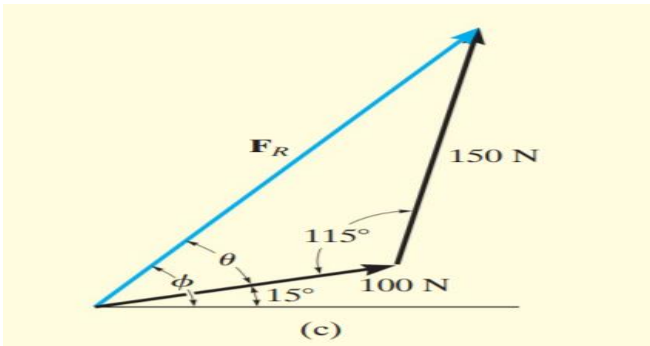
Cosine law:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

Sine law:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

<u>يتم إستخدامهم</u> في **<u>إيجاد قوة المحصلة أو إيجاد زاوية غير معروفة</u>**



$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115°}$$
$$= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6\text{ N}$$
$$= 213\text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

<u>القوة المحصلة</u> تم إستخدام قوانين المثلثات :

نعلم مقدار متجهين ولا نعلم مقدار المتجه الثالث ولكننا نعلم الزاوية المحصورة بين المتجه الأول والمتجه الثاني

Applying the law of sines to determine θ,

$$\frac{150\text{ N}}{\sin\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\sin 115^\circ} \qquad \sin\theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}}(\sin 115^\circ)$$

$$\theta = 39.8^\circ$$

Thus, the direction ϕ (phi) of $\mathbf{F}_R$, measured from the horizontal, is

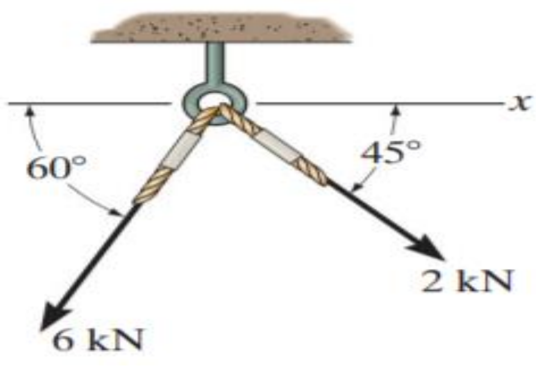
$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

نريد إيجاد **الزاوية الخاصة بالقوة المحصلة** وبالتالي سوف نستخدم قوانين المثلثات :

نعرف مقدار المتجه الأول ونعرف الزاوية المقابله له ونعرف مقدار القوة المحصلة والزاوية المقابلة له ونحن لم نأخذ قيمة المتجه الثاني لأننا لا نعرف مقدار الزاوية المقابله له .

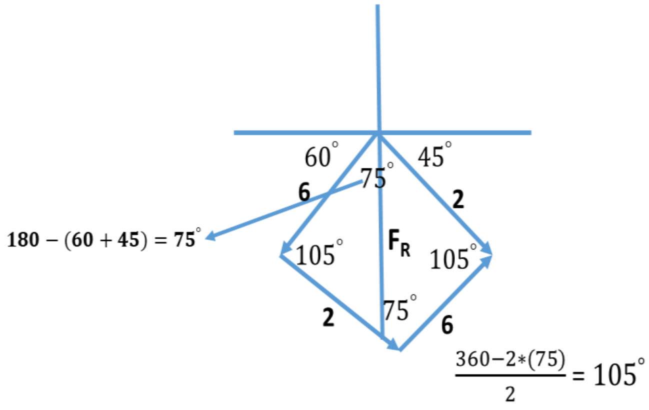
أوجدنا قيمة الزاوية الداخلية التي تخص المثلث ونحن نريد **الزاوية كاملة إلى أن نصل محور السينات الموجب** لذلك نجمع 15 درجة مع الزاوية الداخلية ل المثلث

- **F2-1.** Determine the magnitude of the resultant force acting on the screw eye and its direction measured **clockwise from the x axis** ?



الخطوة الأولى : نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية وهذه تكون **القوة المحصلة**

الخطوة الثانية : مهارتك في الزوايا يجب أن تكون قوية ولقد تحدثنا عن بعض الأساسيات التي سوف تحتاجونها .

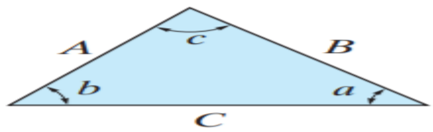


الخطوة الثالثة :

هذه هي القوانين التي سوف يتم استخدامها في هذا الشابتر :

بشرط أن لا يكون المثلث قائم الزاوية .

قوانين مهمة جدا وسيتم إستخدامها بشكل كبير فعليكم الإستعانه بهم دائما وحفظهم .



Cosine law:
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$
Sine law:
$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

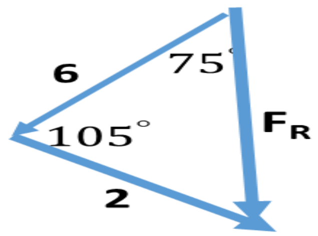
$$F_R = \sqrt{(2\text{ kN})^2 + (6\text{ kN})^2 - (2)(2\text{ kN})(6\text{ kN})\cdot\cos(105)} =$$

$$6.80\text{ kN}$$

$$\frac{\sin(\phi)}{6\text{ kN}} = \frac{\sin(105)}{6.80\text{ kN}}$$

$$\phi = 58$$

$$\theta_R = \phi + 45 = 103$$

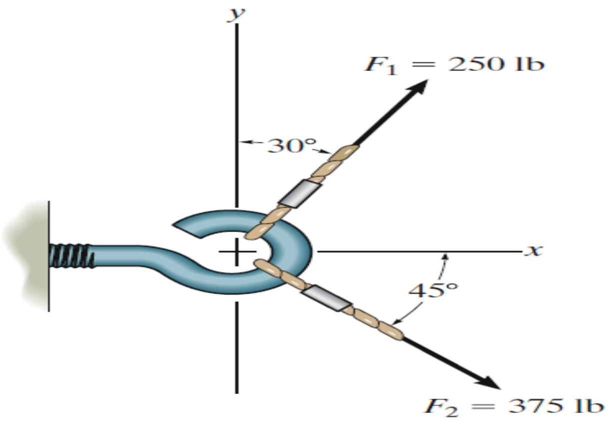


نبدأ من **محور السينات الموجب** لأنه هكذا طلب السؤال

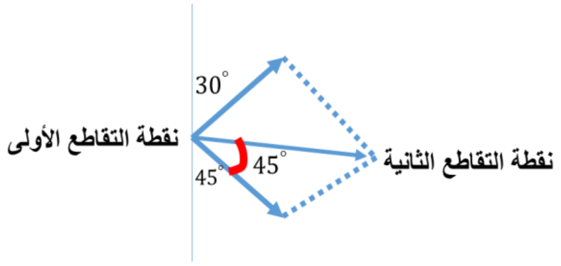
❑ **Proplem2.3** : Determine the magnitude of the **resultant force** $F_R = F_1 + F_2$ and its direction, measured **counterclockwise** from the **positive x axis** ?

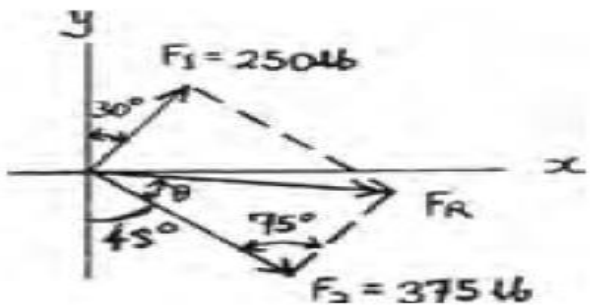
Note :

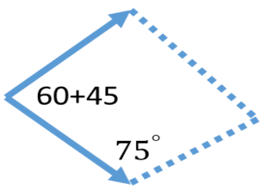
Counterclockwise : عكس عقارب الساعه



الخطوة الأولى : نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية و هذه تكون **القوة المحصلة**





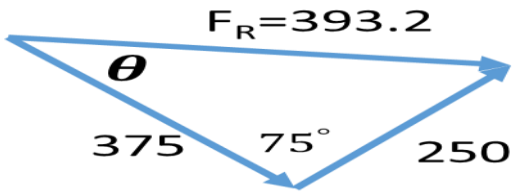


الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .

$$\frac{360-2*(45+60)}{2} = 75^\circ$$

الخطوة الثالثة :

نستخدم قوانين المثلثات لإيجاد القوة المحصلة والزواية الخاصة بها



$$\frac{393.2}{\sin 75^\circ} = \frac{250}{\sin \theta}$$

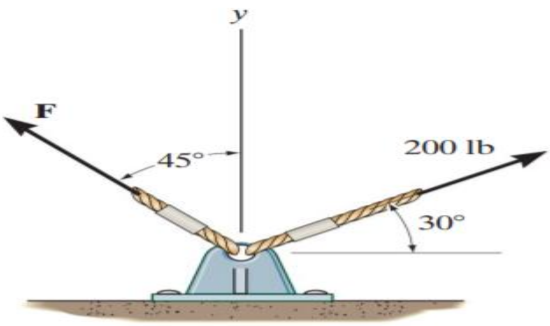
$$\theta = 37.89^\circ$$

$$F_R = \sqrt{(250)^2 + (375)^2 - 2(250)(375)\cos 75^\circ} = 393.2 = 393 \text{ lb}$$

$$\emptyset = 37.89 + 45 + 180 + 90 = 352.89$$

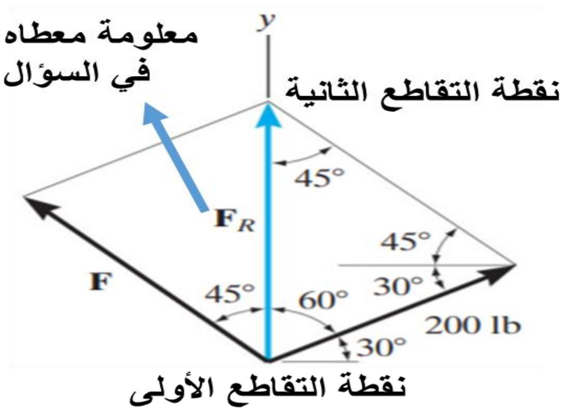
يجب أن تكون الزاوية مع محور السيني الموجب لأنه طلب في السؤال

- **Example2.3 :** Determine the magnitude of the component force F in and the magnitude of the resultant force F_R if F_R is directed along the **positive y axis** ?

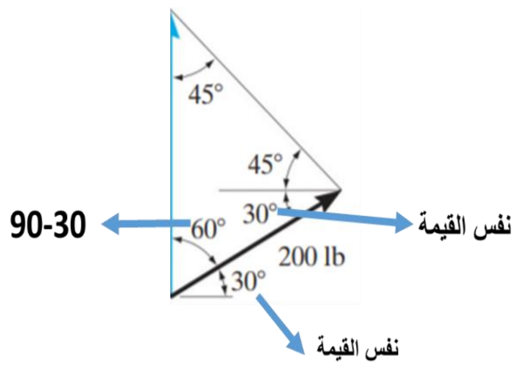


- المطلوب من هذا السؤال إيجاد قيمة القوة المحصلة ومركبات المتجه الثاني سنحل كما إعتدنا من قبل وما زالت الأمور صعبة لأنك في البداية ولكن ثق تماما بأنك على قدر الأسئلة التي سوف تحلها ستكون الأمور أكثر سهولة .

الخطوة الأولى : نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية وهذه تكون **القوة المحصلة**



الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .

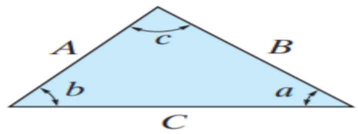


الخطوة الثالثة :

نستخدم قوانين المثلثات **وبالأخص القانون الثاني** لماذا ؟

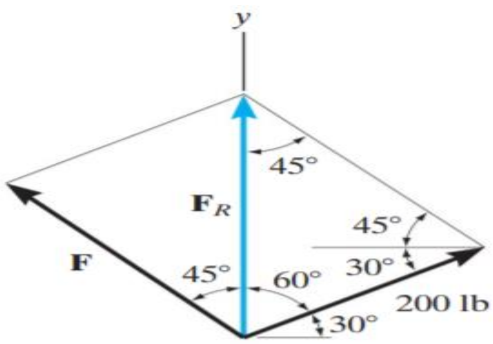
لأننا لا نملك قيمة المتجهات لذلك استعنا بالقانون الثاني

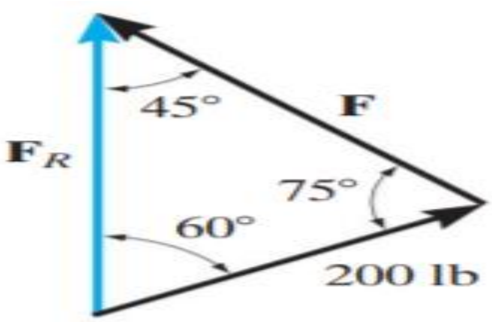
قمنا بتطبيقه **مرتين** لكي نجد كامل المعلومات المطلوبة



Cosine law:
$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$
Sine law:
$\dfrac{A}{\sin a} = \dfrac{B}{\sin b} = \dfrac{C}{\sin c}$

(c)





$$\frac{F}{\sin 60^\circ} = \frac{200\text{ lb}}{\sin 45^\circ}$$

$$F = 245\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\frac{F_R}{\sin 75^\circ} = \frac{200\text{ lb}}{\sin 45^\circ}$$

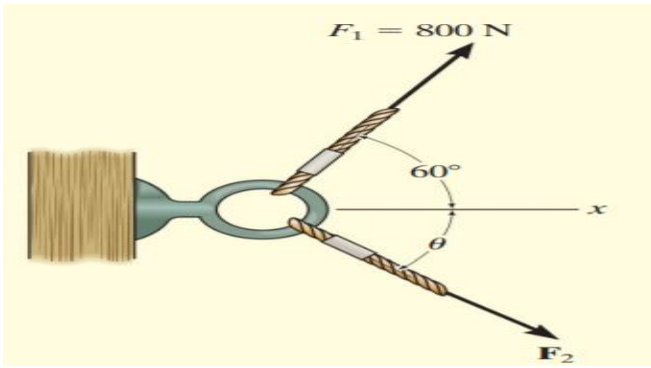
$$F_R = 273\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$

❑ **Example2.4 :** It is required that the **resultant force** acting on the eyebolt be directed along the **positive x axis** and that F_2 have a **minimum magnitude.**

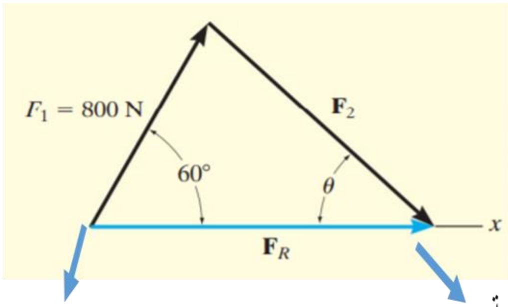
Determine this **magnitude**, the **angle θ** and the corresponding **resultant force** ?

سؤال جيد وفكرته عليكم الإنتباه لها :

يقول السؤال أن القوة المحصلة على المحور السيني الموجب و يقول أن قيمة القوة الثانية مجهولة ونريدها أن تكون أقل قيمة فكيف لها أن يتحقق هذا الشرط ؟



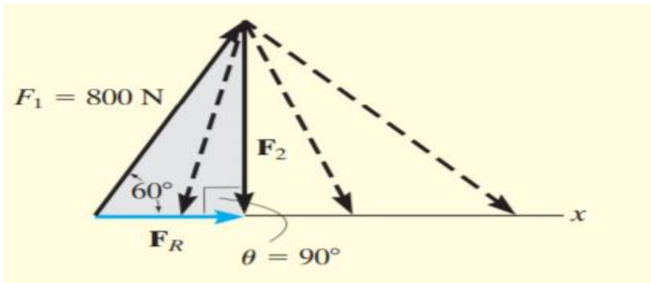
<u>الخطوة الأولى :</u> نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية و هذه تكون **<u>القوة المحصلة</u>**



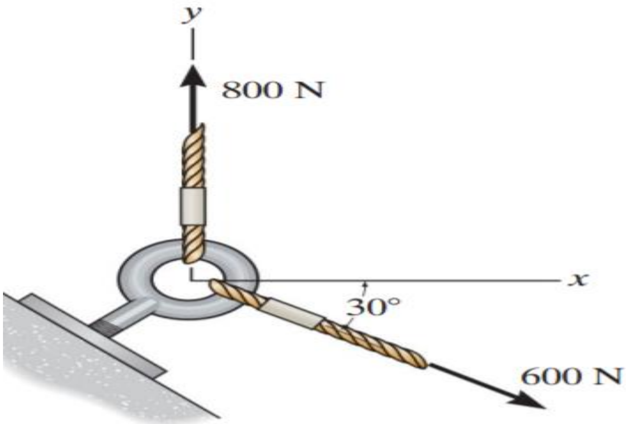
نقطة التقاطع الثانية

نقطة التقاطع الأولى

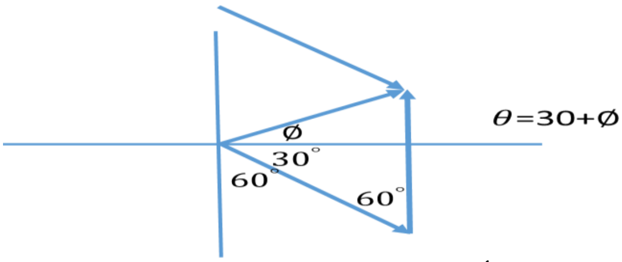
هنا لقد أخذنا الجزء العلوي وتركنا الجزء السفلي وكلاهما صحيح



❑ **F2-3 :** Determine the magnitude of the **resultant force** and its **direction** measured counterclockwise from the positive x axis ?

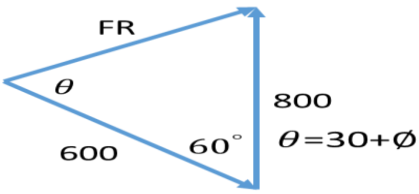


❑



❑ **<u>الخطوة الأولى :</u>** نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية و هذه تكون **<u>القوة المحصلة</u>**

❑ **الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .**



❑ **الخطوة الثالثة :**

نستخدم قوانين المثلثات لإيجاد القوة المحصلة والزواية الخاصة بها

F_R=721.2=

$$\sqrt{600^2+800^2-2*600*800*\cos 60}$$

$$\frac{721.2}{\sin 60}=\frac{800}{\sin\theta}$$

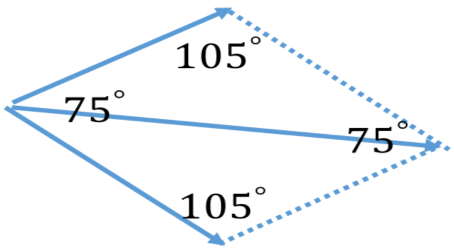
$$\theta = 73.9$$

$$\emptyset = 73.9-30 = 43.9$$

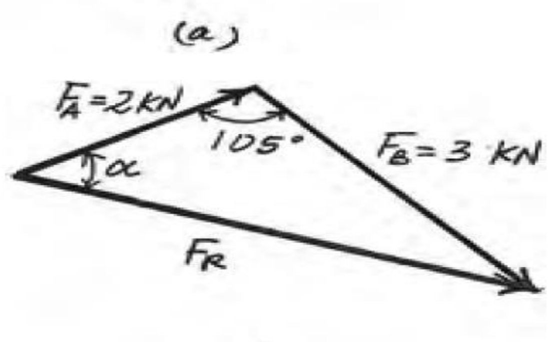
❑ **<u>ملاحظة هامة :</u>**

مجموع زوايا متوازي الأضلاع هو 360

وكل زاويتين **متقابلتين متساويتين**



$$\frac{360-2*75}{2}=105$$



$$F_R=\sqrt{2^2+3^2-2(2)(3)\cos 105^\circ}$$
$$=4.013\text{ kN}=4.01\text{ kN}$$

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin 105^\circ}{4.013}\qquad \alpha=46.22^\circ$$

$$\phi=\alpha-30^\circ=46.22^\circ-30^\circ=16.2^\circ$$

نريد الزاوية من القوة المحصلة ل محور السينات الموجب

تكون قيمة المتجه الثاني **اقل شئ** عندما تكون زاوية **90** أي زاوية قائمة .

أي قمنا بتحليل القوة الأولى إلى مركبتين :

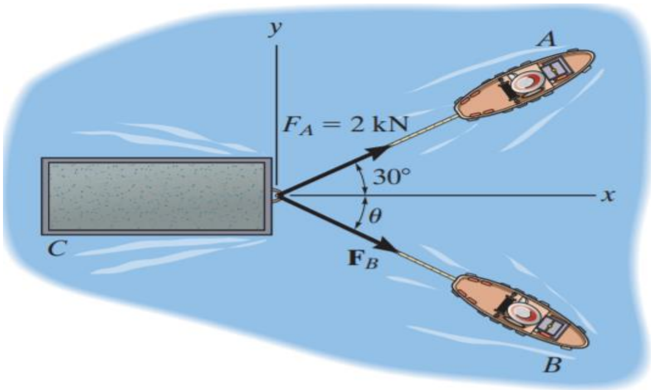
المركبة السينية هي المركبة المحصلة

المركبة الصادية هي القوة الثانية

$$F_R=(800\text{ N})\cos 60^\circ=400\text{ N}$$
$$F_2=(800\text{ N})\sin 60^\circ=693\text{ N}$$

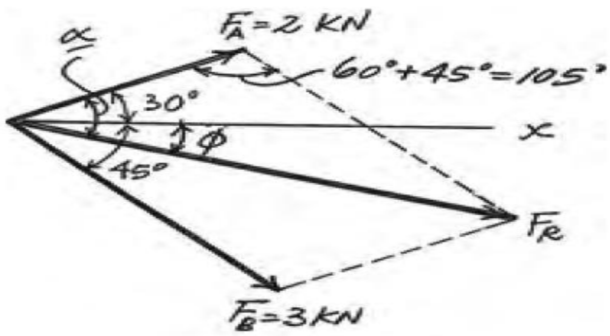
Note : **محل ما الزاوية تنام بكون جيب التمام**

❑ **Prop2.31** . If F_B = 3 kN and θ = 45°, determine the **magnitude** of the **resultant** force of the two tugboats and its direction measured clockwise form the **<u>positive x axis</u>** ?



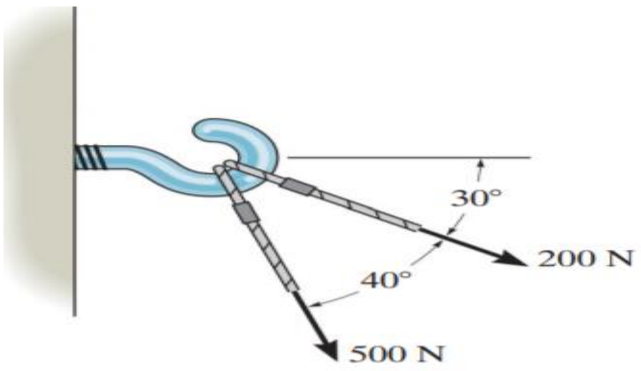
❑

❑ **<u>الخطوة الأولى :</u>** نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية و هذه تكون **<u>القوة المحصلة</u>**

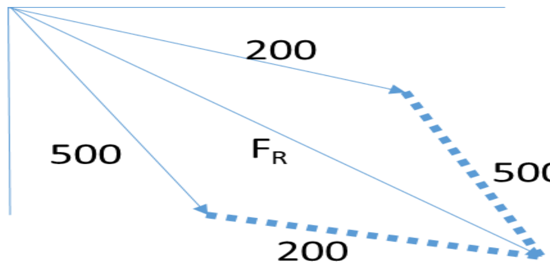


❑ **الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .**

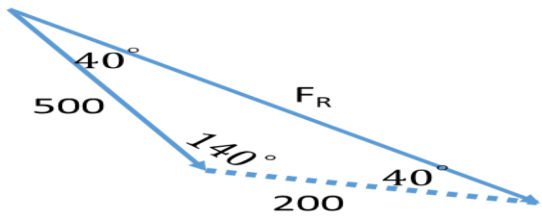
❑ **F2-2 .** Two forces act on the hook. Determine the **<u>magnitude of the resultant force ?</u>**



<u>الخطوة الأولى :</u> نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة تقاطع الثانية ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية وهذه تكون <u>القوة المحصلة</u>



الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .

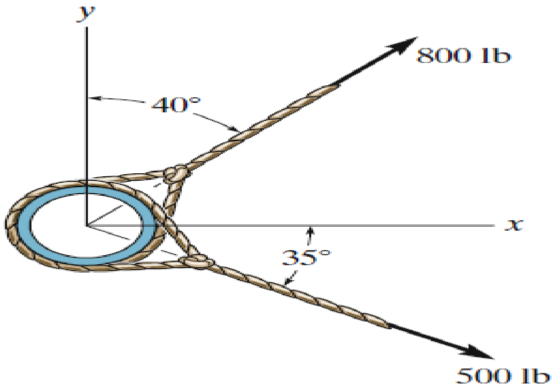


$$\frac{360-2*(40)}{2} = 140$$

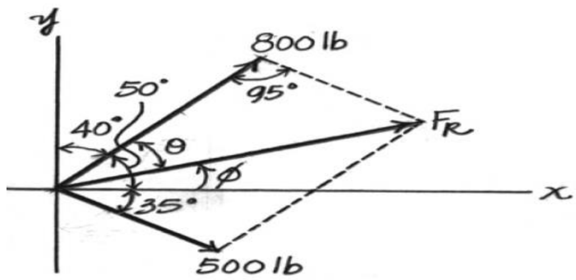
$$F_R = \sqrt{200^2 + 500^2 - 2(200)(500)\cos 140^\circ}$$
$$= 666 \text{ N}$$

كل ما قد تعلمناه الأن كان عبارة عن <u>محاور عالمية</u> ولكن فيه حالة كانت المحاور ليست عالمية <u>فما الحل وما ألية التعامل معها ؟</u>
الأمور <u>متشابهة</u> من حيث القوانين والمبدأ وكما قلت سابقا الرسم غير مطالب به للأمام لأننا سنتعلم طريقة أسهل و أسرع , وفي الإمتحان <u>غير مجبر</u> على إستخدام الرسم لكن نستخدمه في حال الطلب لأن معظم الطلبة يواجهون صعوبة فيه .

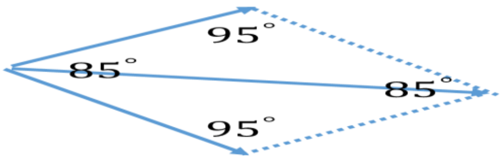
❑ **Prop2.10 .** Determine the magnitude of the resultant force and its direction, measured counterclockwise from the **<u>positive *x* axis</u>** ?



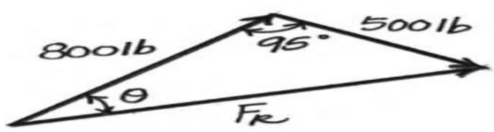
<u>الخطوة الأولى :</u> نرسم من كل متجه خط موازي ل المتجه الأخر إلى أن يحدث نقطة **تقاطع الثانية** ومن ثم نصل خط بين نقطة التقاطع الأولى مع الثانية وهذه تكون **<u>القوة المحصلة</u>**



الخطوة الثانية : بعض المهارات في إيجاد الزوايا .



$$\frac{360-2*(35+50)}{2} = 95$$



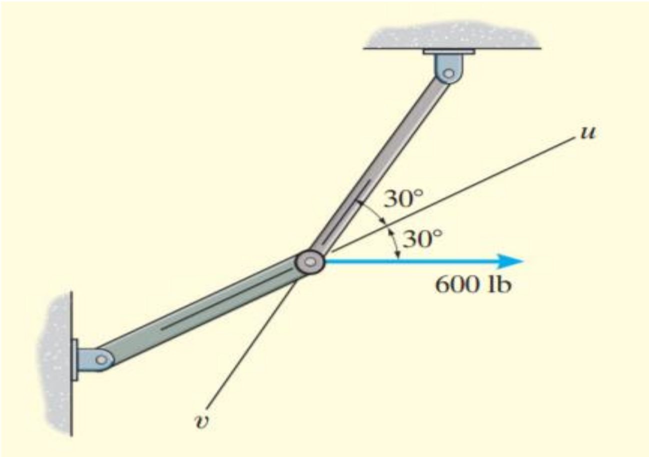
$$F_R = \sqrt{800^2 + 500^2 - 2(800)(500)\cos 95^\circ} = 979.66 \text{ lb} = 980 \text{ lb}$$

$$\frac{\sin\theta}{500} = \frac{\sin 95^\circ}{979.66}; \qquad \theta = 30.56^\circ$$

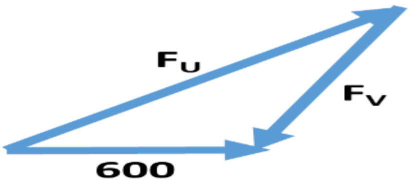
$$\phi = 50^\circ - 30.56^\circ = 19.44^\circ = 19.4^\circ$$

نريد الزاوية من القوة المحصلة ل محور السينات الموجب

- **Example2.2 . Resolve the horizontal 600-lb force in into components acting along the u and v axis and determine the magnitudes of these components ?**

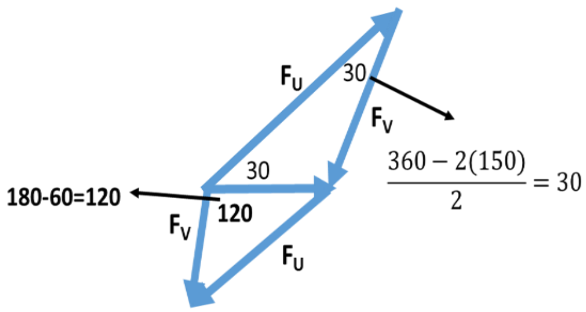


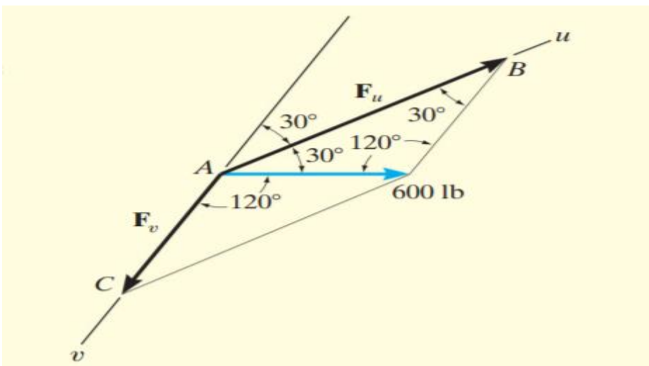
- **الخطوة الأولى : من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .**
- **u and v هم المحاور المطلوبة**

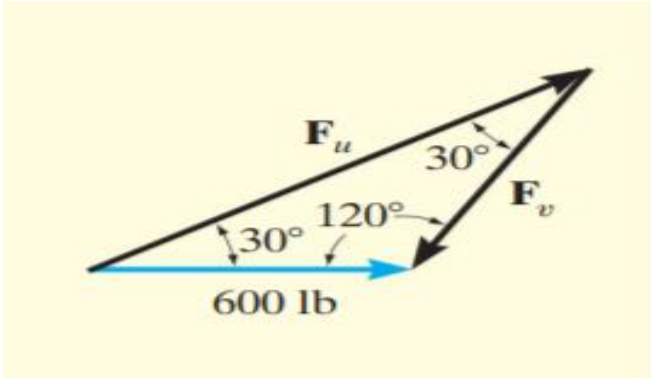


أخذنا مثلث واحد فقط هنا

الخطوة الثانية: بعض المهارات البسيطة في الزوايا







Use sine law :

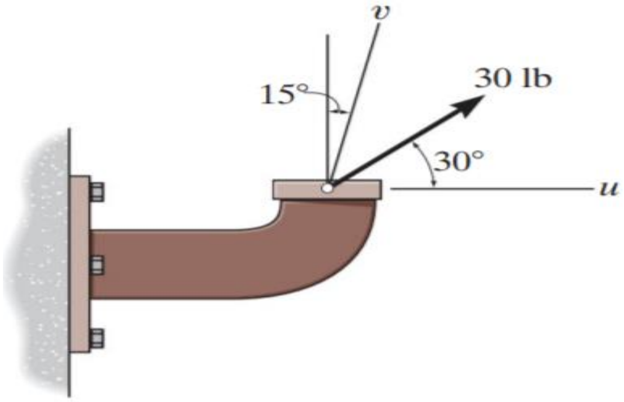
$$\frac{F_u}{\sin 120^\circ} = \frac{600 \text{ lb}}{\sin 30^\circ}$$

$$F_u = 1039 \text{ lb}$$

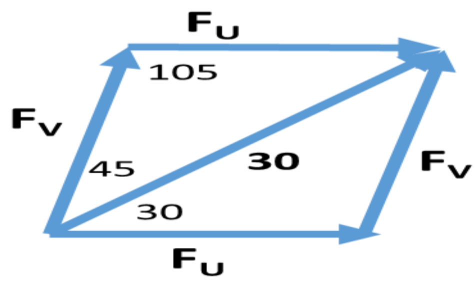
$$\frac{F_v}{\sin 30^\circ} = \frac{600 \text{ lb}}{\sin 30^\circ}$$

$$F_v = 600 \text{ lb}$$

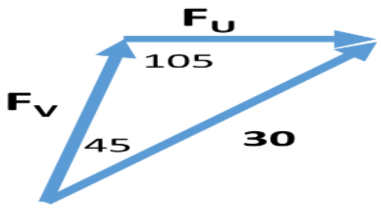
❑ **F2.4 . Resolve the 30-lb force into components along the u and v axes, and determine the magnitude of each of these components ?**



الخطوة الأولى : من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .



$$\frac{360-2(45+30)}{2}=105$$



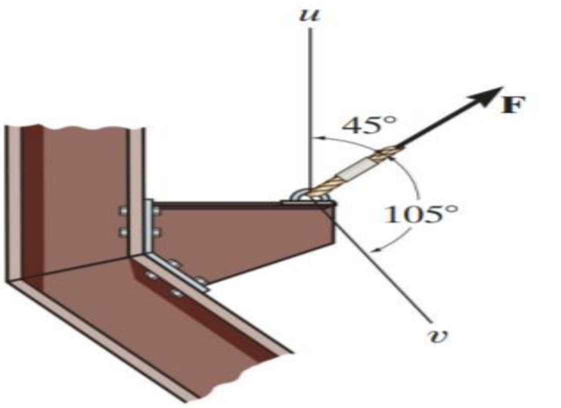
$$\frac{\sin(45)}{F_u\ \text{lb}}=\frac{\sin(105)}{30\ \text{lb}}$$

$$F_u = 22.0\ \text{lb}$$

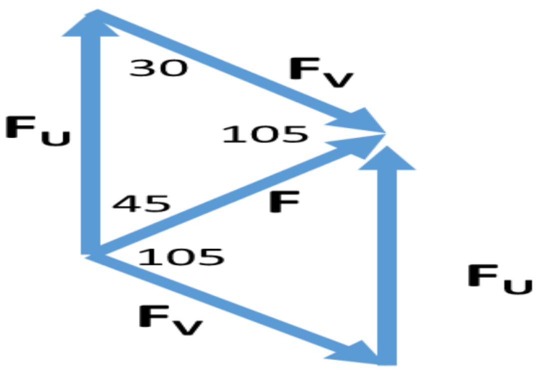
$$\frac{\sin(30)}{F_v\ \text{lb}}=\frac{\sin(105)}{30\ \text{lb}}$$

$$F_v = 15.5\ \text{lb}$$

❑ **F2–6. If force F is to have a component along the u axis of F_u = 6 kN, determine the magnitude of F and the magnitude of its component F_v along the v axis ?**



الخطوة الأولى : من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .



$$\frac{360-2(150)}{2}=30$$

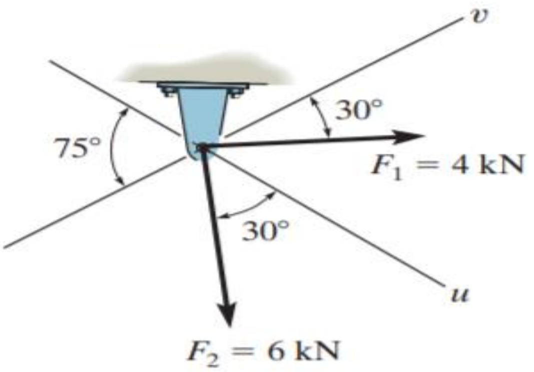
$$\frac{\sin(30)}{F\ \text{kN}}=\frac{\sin(105)}{6\ \text{kN}}$$

$$F = 3.11\ \text{kN}$$

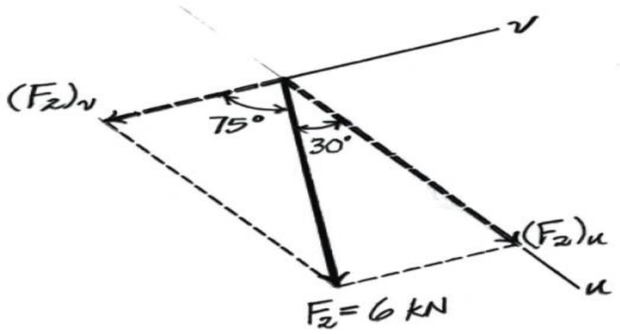
$$\frac{\sin(45)}{F_v\ \text{kN}}=\frac{\sin(105)}{6\ \text{kN}}$$

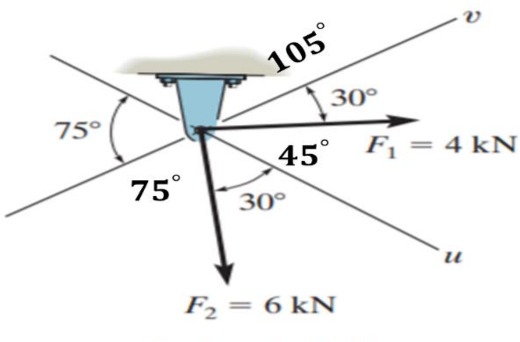
$$F_v = 4.39\ \text{kN}$$

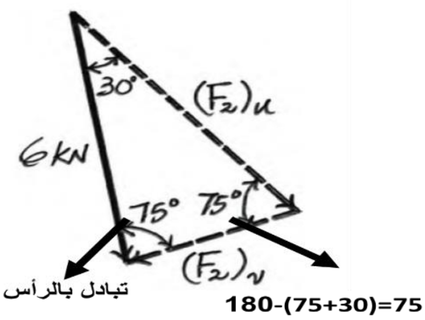
❑ **Prop2.8 . Resolve the force F_2 into components acting along the u and v axes and determine the magnitudes of the components ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .
<u>الخطوة الثانية:</u> بعض المهارات البسيطة في الزوايا



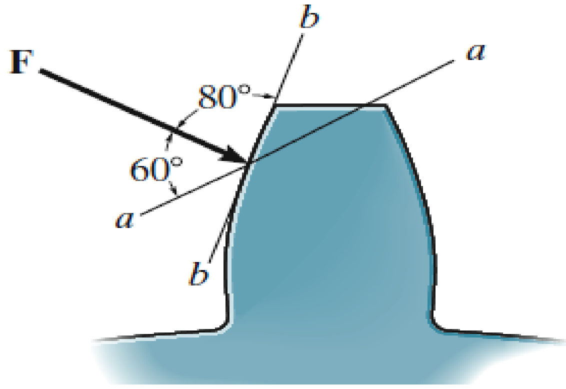




$$\frac{(F_2)_u}{\sin 75^\circ} = \frac{6}{\sin 75^\circ}; \qquad (F_2)_u = 6.00 \text{ kN}$$

$$\frac{(F_2)_v}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 75^\circ}; \qquad (F_2)_v = 3.106 \text{ kN} = 3.11 \text{ kN}$$

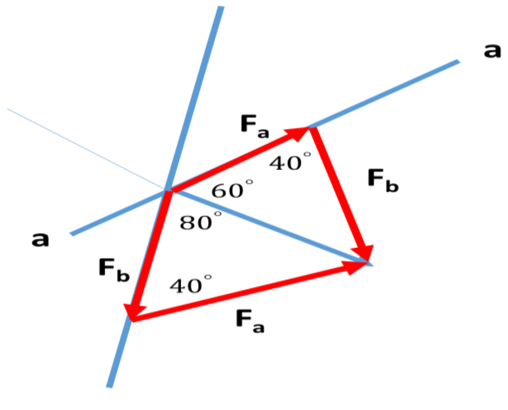
❑ **<u>Prop2.13 .</u> The force acting on the gear tooth is 20Ib Resolve this force into two components acting along the lines *aa* and *bb* ?**



❑

❑ <u>الخطوة الأولى :</u> من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .

❑ <u>نسحب</u> القوة لتكون الأمور أسهل

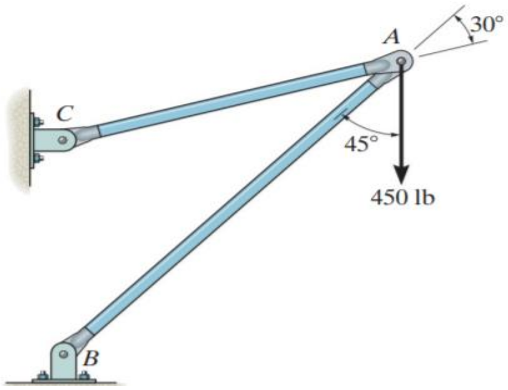


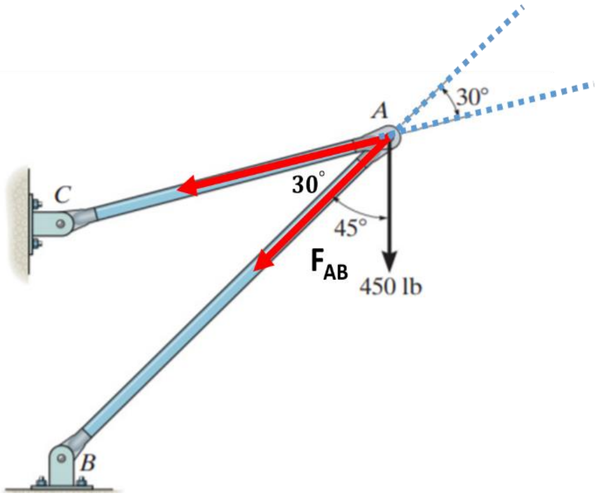
$$\frac{20}{\sin 40^\circ} = \frac{F_a}{\sin 80^\circ}; \qquad F_a = 30.6 \text{ lb}$$

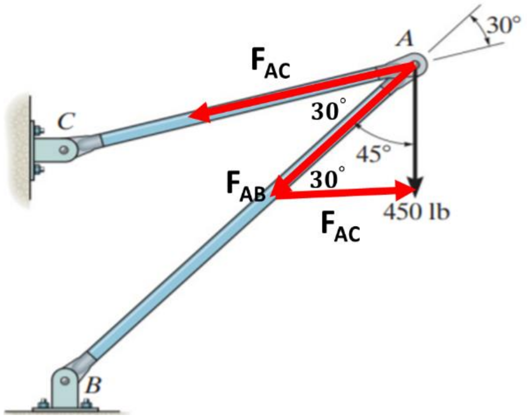
$$\frac{20}{\sin 40^\circ} = \frac{F_b}{\sin 60^\circ}; \qquad F_b = 26.9 \text{ lb}$$

❑

❑ F2-5. The force F = 450 lb acts on the frame. Resolve this force into components acting along members AB and AC, and determine the magnitude of each component ?







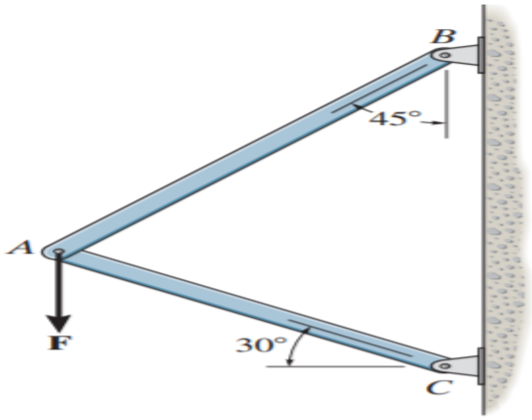
❑ $\frac{450}{\sin 30^\circ} = \frac{FAC}{\sin 45^\circ}$

❑ FAC=636.4

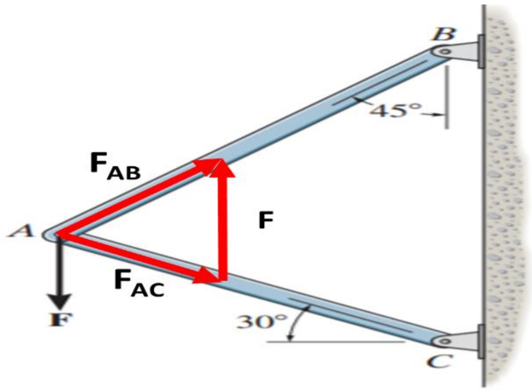
❑ $\frac{450}{\sin 30^\circ} = \frac{FAB}{\sin 105^\circ}$

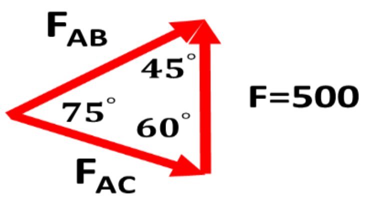
❑ FAB=896.3

❑ Prop2-4. The vertical force F acts downward at A on the two membered frame. Determine the magnitudes of the two components of F directed along the axis of AB and AC. Set F = 500 N ?



❑ الخطوة الأولى : من ذيل القوة نرسم مركبات القوة على المحاور المطلوبة ونكتفي بجزء واحد ويمكنك رسم الرسمة كاملة ومن ثم أخذ مثلث واحد كما فعلنا مسبقا .





$$\frac{F_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{500}{\sin 75^\circ}$$

$$F_{AB} = 448 \text{ N}$$

$$\frac{F_{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{500}{\sin 75^\circ}$$

$$F_{AC} = 366 \text{ N}$$

➢ ما قمنا به سابقا كان عبارة عن تحليل قوة وحساب قوة المحصلة والزاوية الخاصة بها عن طريق الرسم ولا بد أن أكثركم وجد صعوبة فيها وقلت لكم هذه طريقة أولى للحل والأن سنأخذ الطريقة الثانية وهي التحليل وهي أسهل بكثير .

➢ When a force is <u>resolved</u> into two components along the x and y axis, the components are then called rectangular components.

عند تحليل قوة إلى مركباتها السينية والصادية , هذه المركبات تسمى بالمركبات المستطيلة .

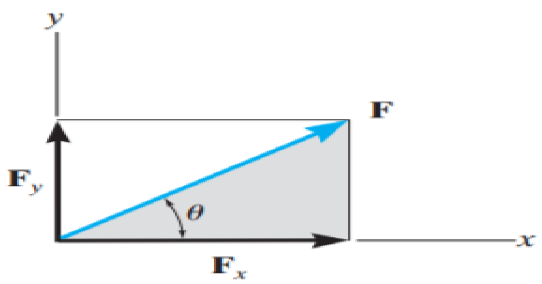
➢ For analytical work we can represent these components in one of two ways, using either <u>scalar or Cartesian vector notation</u>.

نسبة إلى العمل التحليلي يمكننا تمثيل المركبات بطريقتين , الطريقة العددية والطريقة الكارتيزن وسنقوم بشرحهم بالتفصيل الممل .

❖ Scalar Notation :

- يمكن لنا تمثيله بطريقتين أو شكلين ويجب فهمهم بشكل ممتاز لأنه في حال لم تستطع أن تحلل القوة في السؤال فستخسر جزء كبير من علامته وقد تخسره كامل .

<u>الشكل الأول</u> : أن يعطيك متجه مع زاوية فنقوم بتحليلها إلى مركبتين

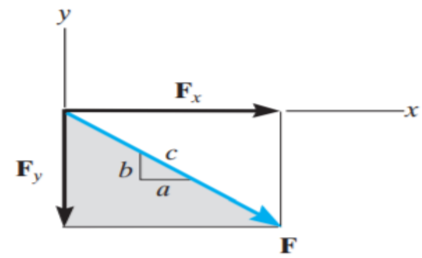


$$F_x = F\cos\theta \quad \text{and} \quad F_y = F\sin\theta$$

محل ما الزاوية بتنام بكون جيب التمام

لا بد ايضا من الإنتباه أن في حال كانت المركبة في إتجاه محور السيني السالب تكون سالبة وفي حال كانت متجهة ل المحور الصادي الموجب فتكون موجبة وهكذا ...

- <u>الشكل الثاني</u> هو أن يعطيك بدلا من الزاوية يعطيك مثلث صغير و هنا يجب الإنتباه وفهمة جيدا .



$$\frac{F_y}{F} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{F_x}{F} = \frac{a}{c}$$

لو نلاحظ المثلث الصغير يشبه المثلث الكبير فمن قاعدة تشابه المثلثات يمكننا أن نستفيد .

F_x and a

هم ضلعين متوازيين

F_y and b

هم ضلعين متوازيين

$$F_x = F\left(\frac{a}{c}\right) \qquad F_y = -F\left(\frac{b}{c}\right)$$

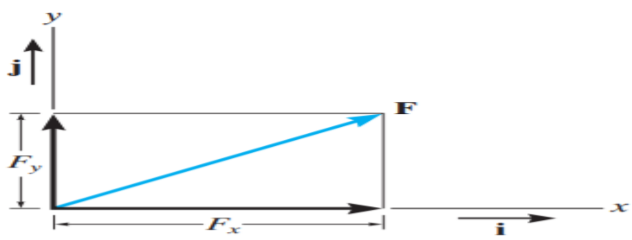
<u>خلاصة الكلام : إنتبه ل إشارة المحور</u>

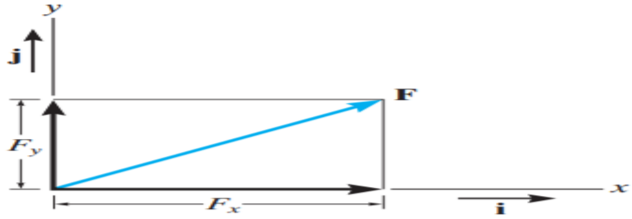
المركبة السينية: طول الضلع الموازي ل محور السينات مقسوما على الوتر مضروبا ب القوة
المركبة الصادية: طول الضلع الموازي ل محور الصادرات مقسوما على الوتر مضروبا بالقوة

❖ Cartesian Vector Notation :

- It is also possible to represent the x and y components of a force in terms of Cartesian unit vectors i and j. They are called unit vectors because they have a dimensionless magnitude of 1, and so they can be used to designate the directions of the x and y axis, respectively .

أيضا يمكننا تمثيل مركبات السينية والصادية بدلالة متجه الوحدات الدال على المحاور ومتجه الوحده قيمته واحد ويمكننا إستخدامهم للتعبير عن الإتجاه عن المحاور

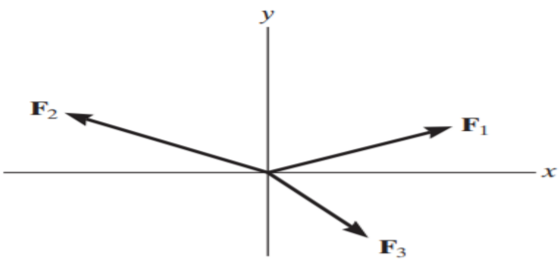




$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$$

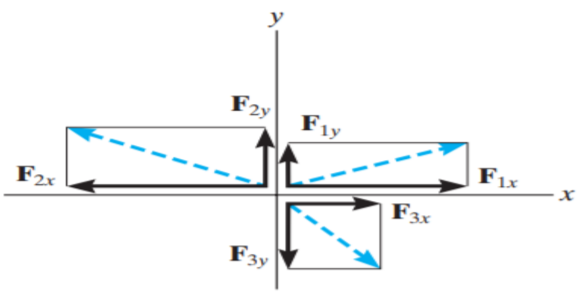
هذا إن كان في قوة واحدة لكن إن كان أكثر من قوة فما العمل ؟
نحلل كل قوة إلى مركباتها ومن ثم نجمع المركبات السينية مع بعضها البعض و هكذا ..

❖ **Coplanar Force Resultants :**
When several forces
several forces act on a body .
نستطيع الحل بالطريقتين وكلاهما صحيح ويعطيان نفس الجواب .



(a)

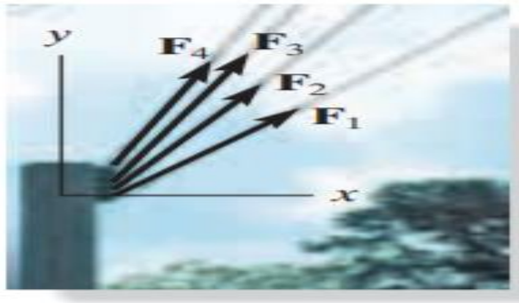
$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\,\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\,\mathbf{i} + F_{2y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\,\mathbf{i} - F_{3y}\,\mathbf{j}$$



(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}\\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j}\\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$

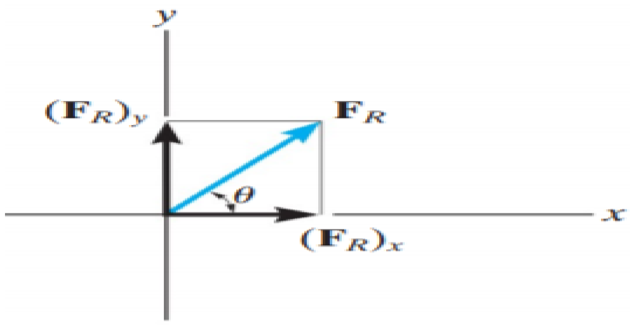
Scalar notation(Coplanar Force)



$$\boxed{\begin{aligned}(F_R)_x &= \Sigma F_x\\ (F_R)_y &= \Sigma F_y\end{aligned}}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \quad (F_R)_x = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$+\uparrow \quad (F_R)_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

نحن كل ما قمنا بشرحه لغاية الآن : الوصول للقوة المحصلة والزاوية المحصلة الخاصة بها .

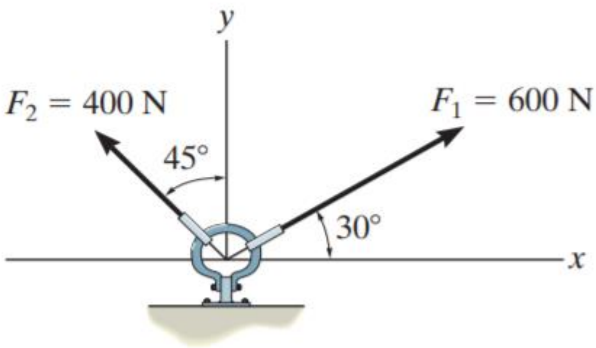


$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right|$$

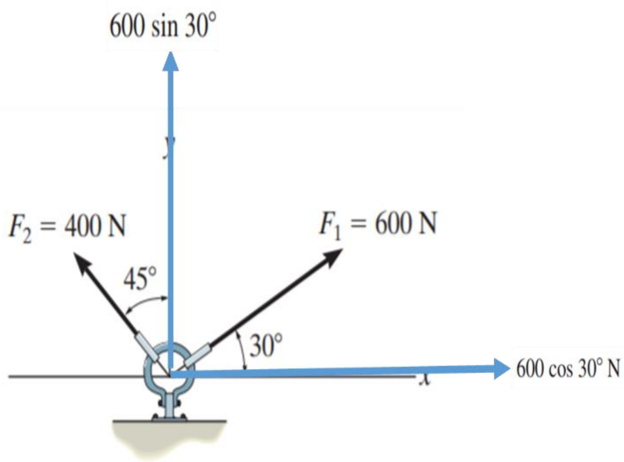
في الإمتحان يكون لك الخيار في الحل , إما الرسم أو التحليل وأنا أفضل التحليل إلا اذا طلب طريقة الرسم .

- **Example2.6 : The link in a is subjected to two forces F_1 and F_2. Determine the magnitude and direction of the resultant force ?**

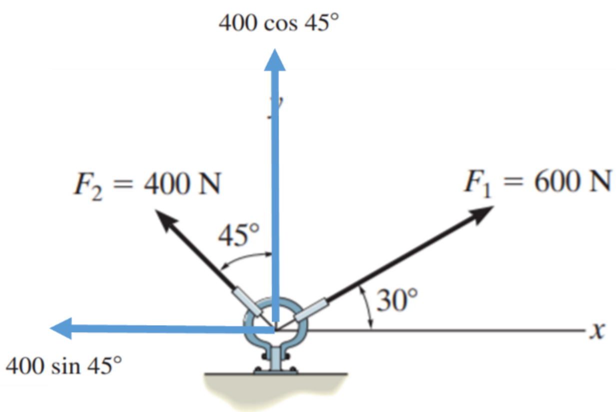


<u>الخطوة الأولى :</u>

نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور



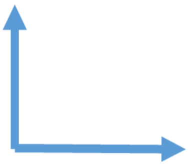
محل ما الزاوية تنام جيب التمام



<u>الخطوة الثانية :</u> نطبق قانون مجموع القوى يساوي صفر مع الإنتباه ل إشارة المحور

$$(F_R)_x = \Sigma F_x$$
$$(F_R)_y = \Sigma F_y$$

<u>ربع أول</u>



$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \qquad (F_R)_x = 600 \cos 30^\circ \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N}$$
$$= 236.8 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \qquad (F_R)_y = 600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N}$$
$$= 582.8 \text{ N} \uparrow$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$F_R = \sqrt{(236.8 \text{ N})^2 + (582.8 \text{ N})^2}$$
$$= 629 \text{ N}$$

<u>الخطوة الرابعة :</u> نجد الزاوية الخاصة ب القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

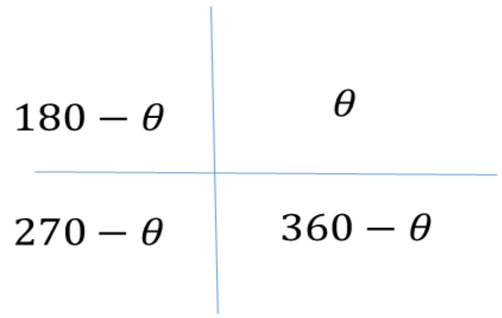
$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{(F_R)_y}{(F_R)_x} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{582.8 \text{ N}}{236.8 \text{ N}}\right) = 67.9^\circ$$

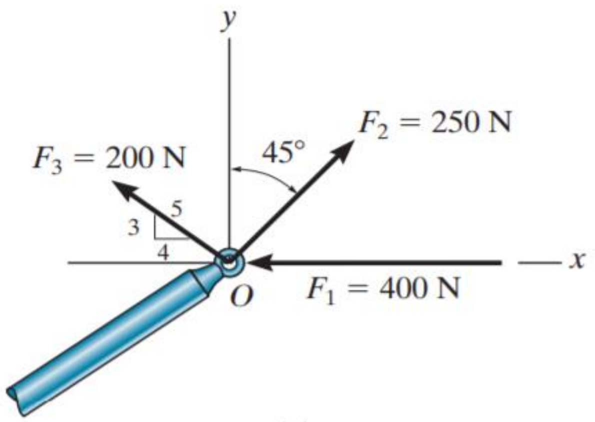
فيما يخص <u>الزاوية</u> عليكم الإنتباه جيدا :
الأصل أن نخرج الزاوية مع المحور السيني الموجب لكن <u>في حال لم يطلب</u> ويحدد السؤال لك فأنك غير مجبر والأن سأقول لكم طريقة سهلة لتحديد الزاوية

<u>لا تعوض الإشارة السالبة في القانون أبدا</u> لكن يجب عليك معرفة في <u>أي ربع أنت</u> وذلك عن طريق إشارة مجموع القوى السينية والصادية بعد ذلك نطبق ما كتب في الاسفل

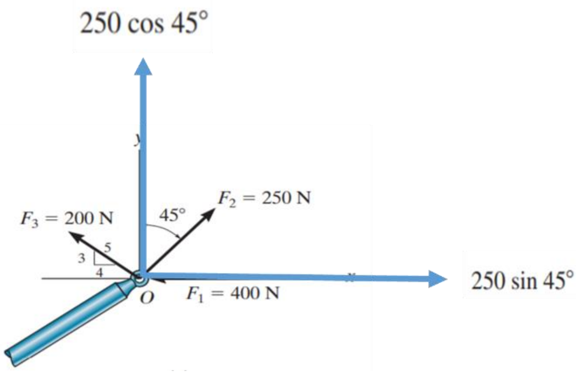
يمكننا كتبة الزاوية ونرسم بجانبها في أي ربع هي



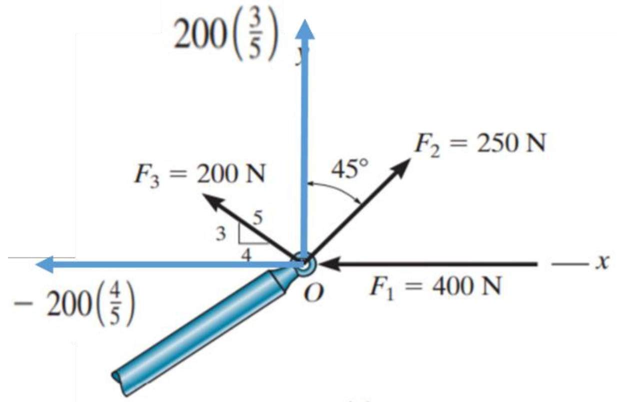
- **Q. The end of the boom O in a is subjected to three concurrent and coplanar forces. Determine the magnitude and direction of the resultant force ?**



<u>الخطوة الأولى :</u>
نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور



القوة التي تنطبق على المحاور هي لا تحلل .



<u>الخطوة الثانية :</u> نطبق قانون مجموع القوى يساوي صفر مع الإنتباه ل إشارة المحور

$$\xrightarrow{+}(F_R)_x = \Sigma F_x;\quad (F_R)_x = -400\text{ N} + 250\sin 45^\circ\text{ N} - 200\left(\tfrac{4}{5}\right)\text{ N}$$
$$= -383.2\text{ N} = 383.2\text{ N}\leftarrow$$

$$+\uparrow(F_R)_y = \Sigma F_y;\quad (F_R)_y = 250\cos 45^\circ\text{ N} + 200\left(\tfrac{3}{5}\right)\text{ N}$$
$$= 296.8\text{ N}\uparrow$$

<u>ربع ثاني</u>

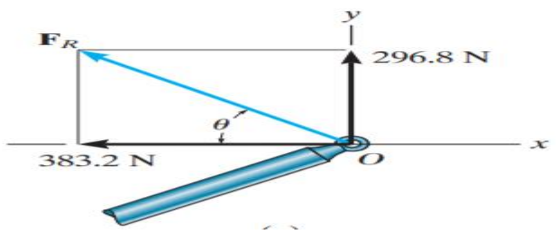
<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$F_R = \sqrt{(-383.2\text{ N})^2 + (296.8\text{ N})^2}$$
$$= 485\text{ N}$$

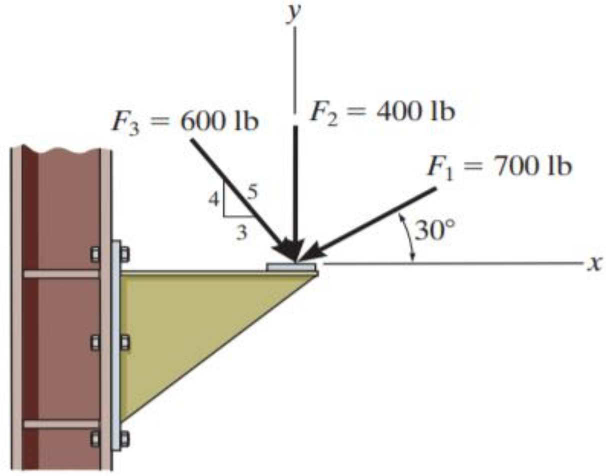
<u>الخطوة الرابعة :</u> نجد الزاوية الخاصة ب القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{296.8}{383.2}\right) = 37.8^\circ$$



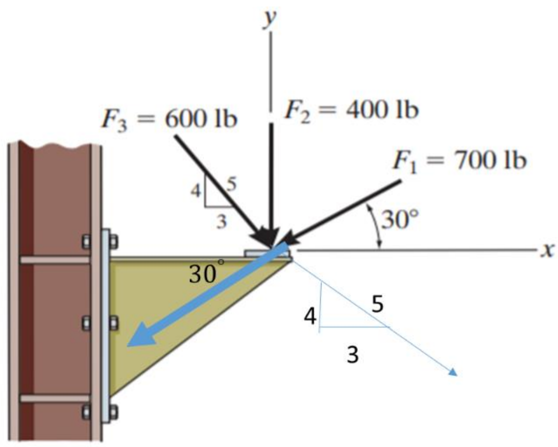
قد <u>يطلب منك</u> على المحور السيني الموجب أو محور محدد .

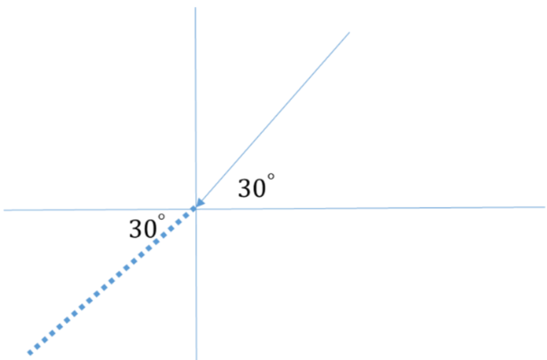
- **F2-9. Determine the magnitude of the resultant force acting on the corbel and its direction θ measured counterclockwise from the x axis ?**



<u>الخطوة الأولى :</u>
نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور

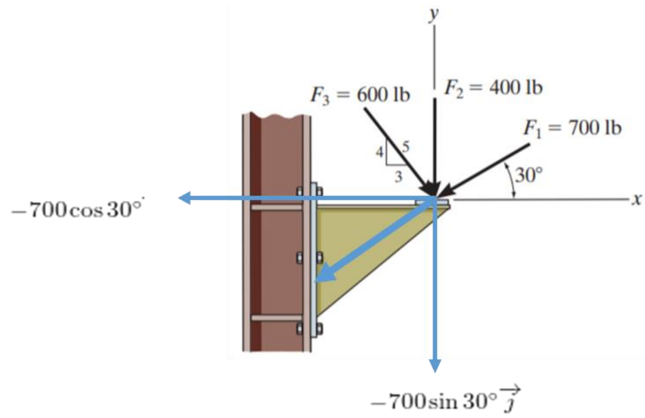
<u>ملاحظة هامة ومفيدة :</u> يمكنك سحب القوة في حال شكلها لم يعجبك سأوضح لك الأن في الرسمة .



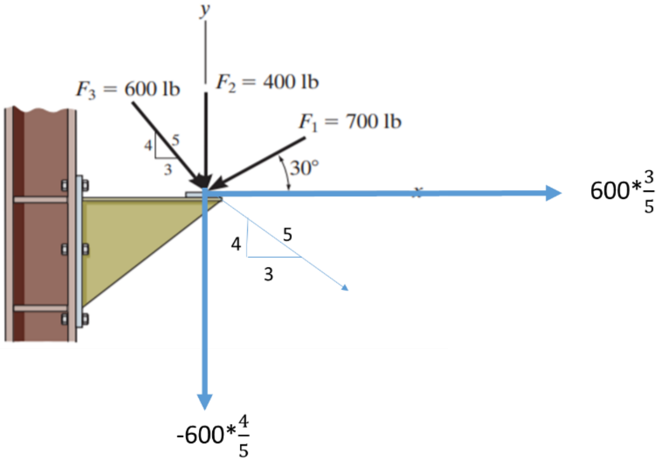


هذا هو المقصود بسحب القوة

<u>الخطوة الأولى :</u>
نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور



القوة التي تنطبق على المحور <u>لا تحلل</u>



<u>الخطوة الثانية :</u> نطبق قانون مجموع القوى يساوي صفر مع الإنتباه ل إشارة المحور
<u>ربع ثالث</u>

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$$
$$(F_R)_x = -(700 \text{ lb}) \cos 30° + 0 + \left(\tfrac{3}{5}\right)(600 \text{ lb})$$
$$= -246.22 \text{ lb}$$
$$+\uparrow(F_R)_y = \Sigma F_y;$$
$$(F_R)_y = -(700 \text{ lb}) \sin 30° - 400 \text{ lb} - \left(\tfrac{4}{5}\right)(600 \text{ lb})$$
$$= -1230 \text{ lb}$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

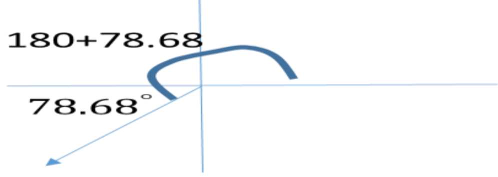
$$F_R = \sqrt{(246.22 \text{ lb})^2 + (1230 \text{ lb})^2} = 1254 \text{ lb}$$

<u>الخطوة الرابعة :</u> نجد الزاوية الخاصة ب القوة المحصلة

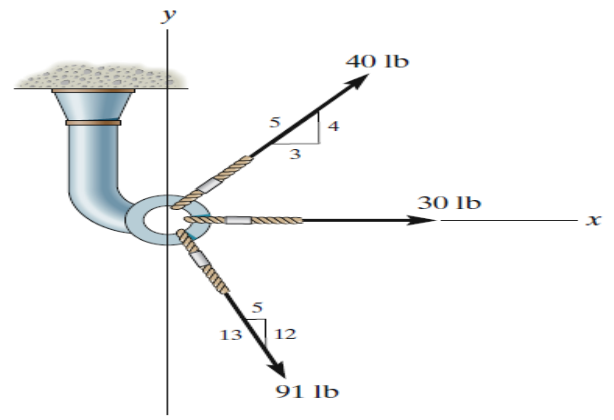
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1230 \text{ lb}}{246.22 \text{ lb}}\right) = 78.68°$$

$$\theta = 180° + \phi = 180° + 78.68° = 259°$$

طالب السؤال إن نكون عكس عقارب الساعه

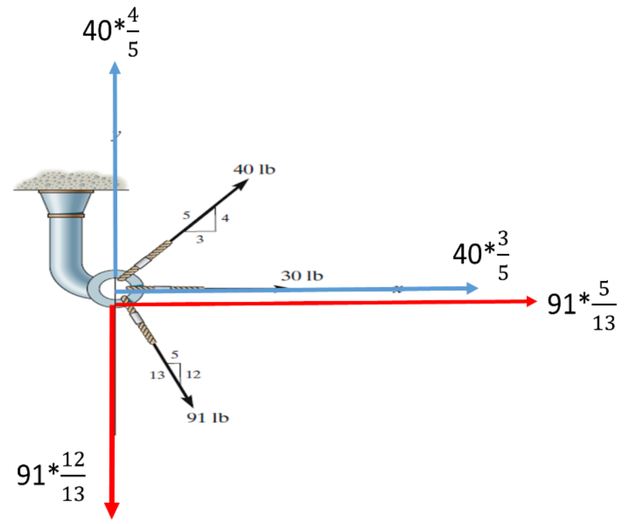


❑ **Prop2.44 . Determine the magnitude of the resultant force and its direction, measured clockwise from the positive *x* axis ?**



❑ <u>الخطوة الأولى :</u>

❑ نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور



❑ <u>الخطوة الثانية : </u>نطبق قانون مجموع القوى يساوي صفر مع الإنتباه ل إشارة المحور

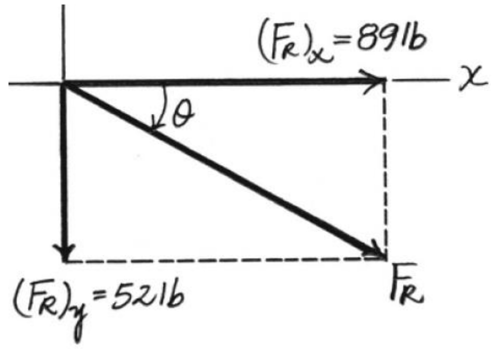
$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = 40\left(\frac{3}{5}\right) + 91\left(\frac{5}{13}\right) + 30 = 89 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = 40\left(\frac{4}{5}\right) - 91\left(\frac{12}{13}\right) = -52 \text{ lb} = 52 \text{ lb}\downarrow$$

❑ <u>الخطوة الثالثة : </u>نجد القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{89^2 + 52^2} = 103.08 \text{ lb} = 103 \text{ lb}$$

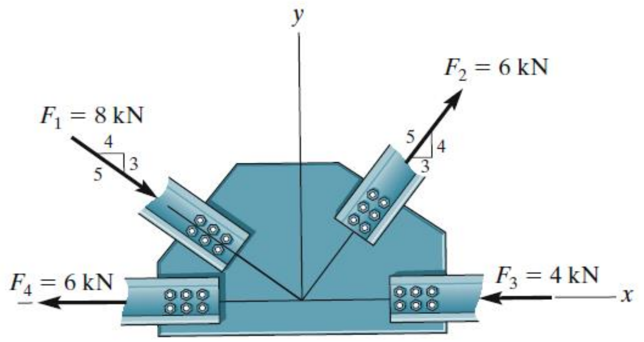
❑ <u>الخطوة الرابعة : </u>نجد الزاوية الخاصة ب القوة المحصلة عن طريق تطبيق القانون

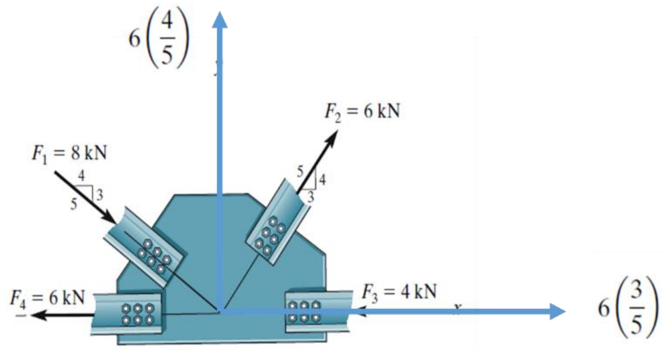


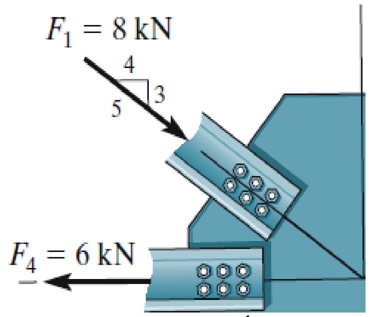
مع عقارب الساعه ومن المحور السيني الموجب <u>نبدأ</u>

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{52}{89}\right) = 30.30° = 30.3°$$

❑ **Prop2.37 . Determine the *x* and *y* components of each force acting on the *gusset plate* of a bridge truss ?**

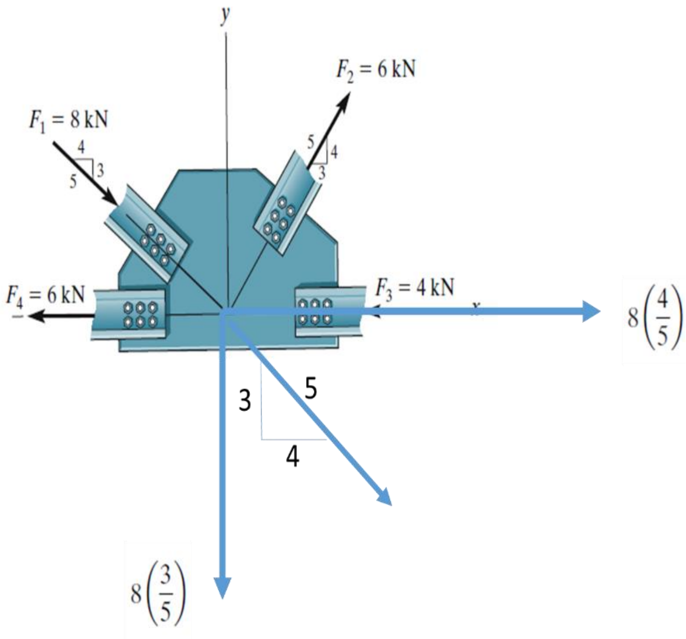






❑ <u>الخطوة الأولى :</u>

نحلل كل قوة إلى مركبة سينية ومركبة صادية مع الإنتباه ل إشارات المحاور



<u>الخطوة الثانية :</u> نطبق قانون مجموع القوى يساوي صفر مع الإنتباه ل إشارة المحور

$$(F_1)_x = 8\left(\frac{4}{5}\right) = 6.40 \text{ kN} \rightarrow$$

$$(F_1)_y = 8\left(\frac{3}{5}\right) = 4.80 \text{ kN} \downarrow$$

$$(F_2)_x = 6\left(\frac{3}{5}\right) = 3.60 \text{ kN} \rightarrow$$

$$(F_2)_y = 6\left(\frac{4}{5}\right) = 4.80 \text{ kN} \uparrow$$

$$(F_3)_x = 4 \text{ kN} \leftarrow$$

$$(F_3)_y = 0$$

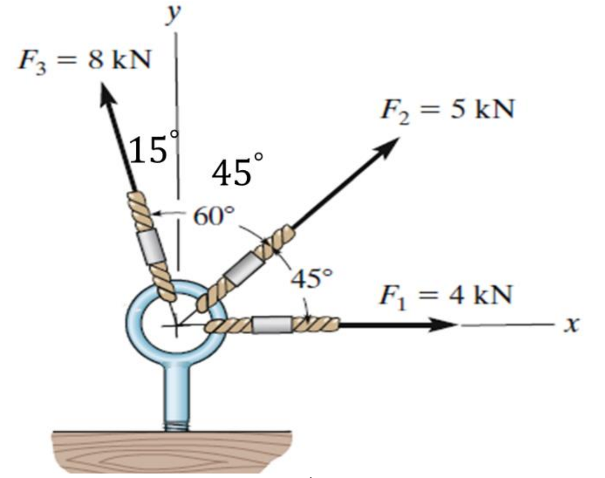
$$(F_4)_x = 6 \text{ kN} \leftarrow$$

$$(F_4)_y = 0$$

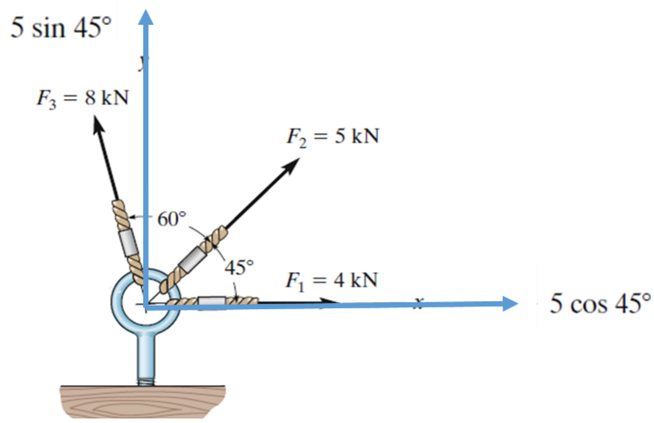
F3 --- F4

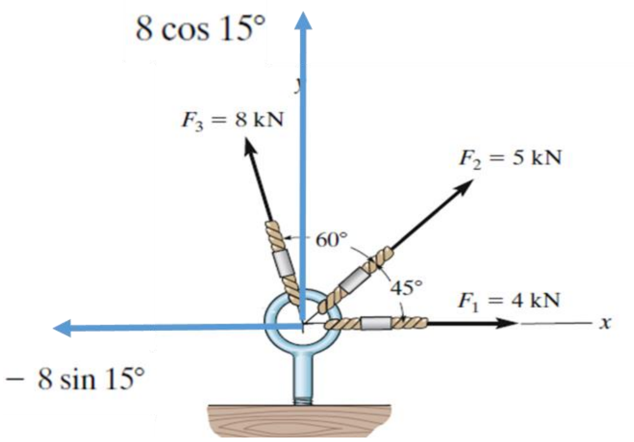
منطبقة على محور السينات لذلك المركبة الصادية صفر و <u>وكن حذرا</u> من إشارة المحور .

- **Prop2-41 . Determine the magnitude of the resultant force and its direction, measured counterclockwise from the positive x axis ?**



- **<u>الخطوة الأولى :</u>**





<u>الخطوة الثانية</u>

$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = 4 + 5\cos 45^\circ - 8\sin 15^\circ = 5.465 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = 5\sin 45^\circ + 8\cos 15^\circ = 11.263 \text{ kN} \uparrow$$

ربع الأول

الخطوة الثالثة : نجد القوة المحصلة

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{5.465^2 + 11.263^2} = 12.52 \text{ kN} = 12.5 \text{ kN}$$

الخطوة الرابعة : نجد الزاوية الخاصة ب القوة المحصلة

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{11.263}{5.465}\right) = 64.12° = 64.1°$$

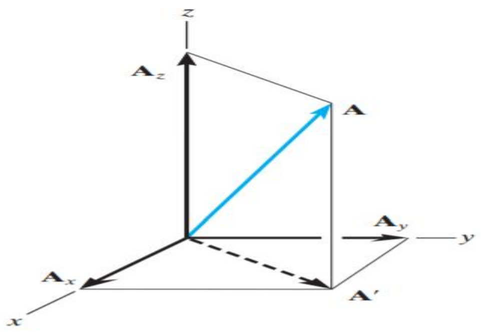
والأن قد انتهينا من شرح نظام ثنائي الأبعاد ونصيحتي لكم أن تتمكنوا منه كثيرا لأنه صدقا للأمام سيكون الإعتماد عليه كبير أما الأن سنبدأ ب النظام ثلاثي الأبعاد , الأمور ستبدأ بزيادة المستوى وتحتاج إلى مراجعة ومتابعة .

كيف نتعامل مع المتجهات بالنظام ثلاثي الأبعاد . سأشرح بطريقه مختلفة لكي يصل المضمون بشكل وافي .

- ❑ **Rectangular Components of a Vector: A vector A may have one, two, or three rectangular components along the x, y, z coordinate axis, depending on how the vector is oriented relative to the axis.**

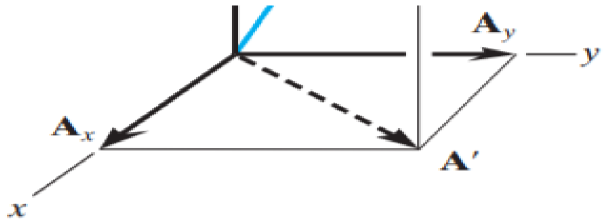
للمتجه لديه ثلاث مركبات على النظام ثلاثي الأبعاد فكيف لنا بأن نجدهم بطريقه سهلة .

- ➢ **We resolve the vector A to component A_Z and A'** الخطوة الأولى
- ➢ **Then we will resolve A' to A_X and A_Y**
- ➢ الخطوة الثانية

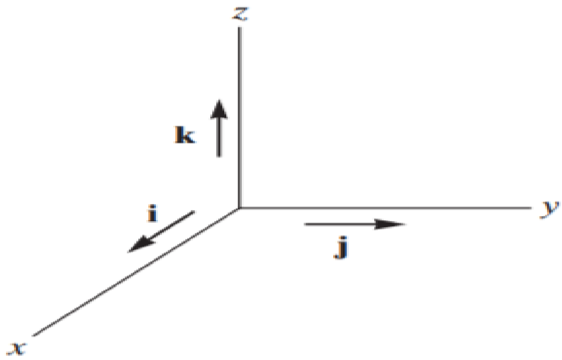


الخطوة الأولى

الخطوة الثانية

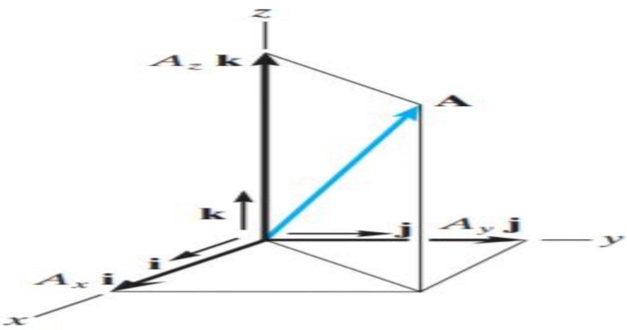


- ❑ **Cartesian Unit Vectors: In three dimensions, the set of Cartesian unit vectors, i, j, k, is used to designate the directions of the x, y, z axes, respectively .**
- ❑ المتجه الكارتيزي قمنا بمناقشته سابقا في النظام ثنائي الأبعاد ولكن هنا في الثلاثي الأبعاد وهو عباره عن متجه قيمته واحد ويكون فقط للدلالة على الإتجاه وقد يكون موجب أو سالب وذلك إعتمادا على إشارة المحور وسنوضح كل ذلك بالتفصيل الممل .



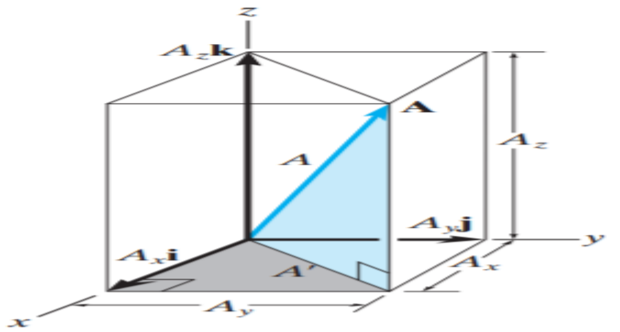
- ❑ Cartesian Vector Representation: Since the three components of A in act in the positive i, j, and k directions .
- ❑ تمثيل المتجهات بالطريقة الكارتيزين وهذا المتجه لديه ثلاث مركبات وجميعهم يحملون إشارات موجبة لأنهم يقعون على المحاور الموجبة كما هو مبين وإمتداد هذه المحاور تكون قيمة المحور نفسة ولكن بالسالب .
- ❑ **We can write A in Cartesian vector form .**

يمكننا كتابه المتجه هكذا كما هو مكتوب في الأسفل



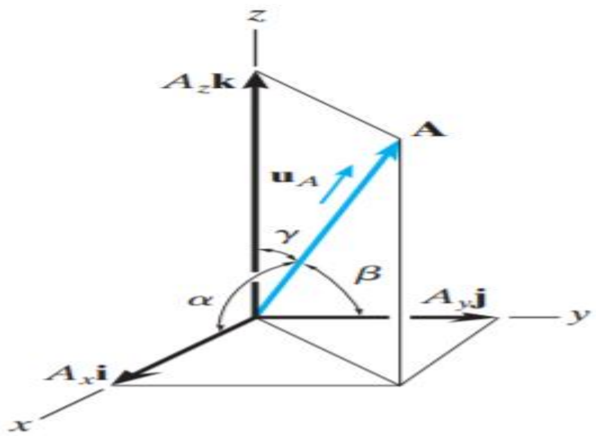
$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}}$$

- **Magnitude of a Cartesian Vector:**



$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- **Coordinate Direction Angles. We will define the direction of A by the coordinate direction angles α (alpha), β (beta), and γ (gamma) .**



$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

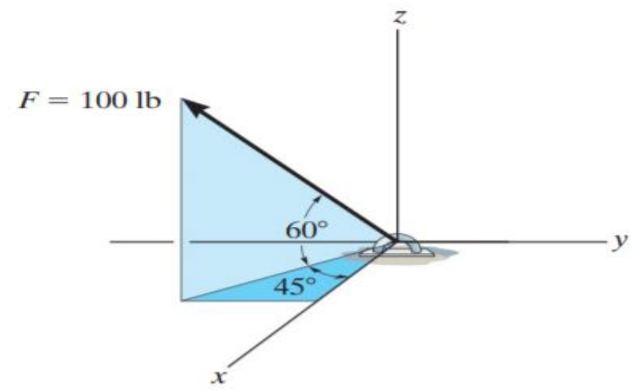
- إن علمت قيمة زاويتين وتريد الثالثة فاستخدم هذا القانون

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

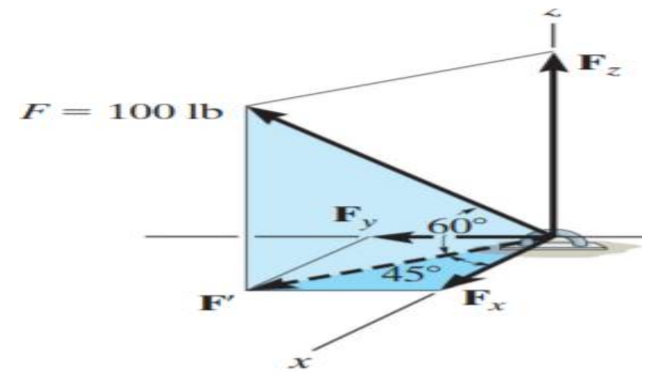
- **If this is generalized and applied to a system of several concurrent forces, then the force resultant is the vector sum of all the forces in the system and can be written .**
- إن إردنا قيمة القوة المحصلة فيكون عبارة عن مجموع القوى على جميع المحاور كما هو مكتوب في القانون .

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$$

- **Express the force F shown in a as a Cartesian vector ?**



من النظرة الأولى يتبين لنا أن هذا المتجه لديه ثلاثة مركبات فنطبق الطريقة التي قلنا عنها في بداية شرحنا للموضوع



الخطوة الأولى : نحلل المتجه إلى مركبتين , مركبة على محور الزيد والمركبة الأخرى تقع بين المحور السيني والصادي .

$$F_z = 100 \sin 60° \text{ lb} = 86.6 \text{ lb}$$
$$F' = 100 \cos 60° \text{ lb} = 50 \text{ lb}$$

الخطوة الثانية : نحلل المتجه الذي قد حصلنا عليه إلى مركبة سينية وصادية مع ضرورة الإنتباه إلى المحاور وإذا كانت القيمة موجبة أم سالبة

$$F_x = F' \cos 45° = 50 \cos 45° \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$
$$F_y = F' \sin 45° = 50 \sin 45° \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$

الخطوة الثالثة : نكتب المتجه بالصورة الكارتيزين ونقوم بإيجاد مقدار المتجه عن طريق تطبيق القانون

$$\mathbf{F} = \{35.4\mathbf{i} - 35.4\mathbf{j} + 86.6\mathbf{k}\} \text{ lb}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$= \sqrt{(35.4)^2 + (35.4)^2 + (86.6)^2} = 100 \text{ lb}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{F_x}{F}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F}\mathbf{j} + \frac{F_z}{F}\mathbf{k}$$

$$= \frac{35.4}{100}\mathbf{i} - \frac{35.4}{100}\mathbf{j} + \frac{86.6}{100}\mathbf{k}$$

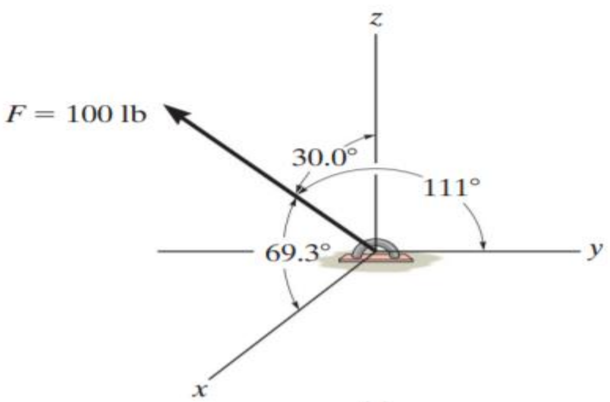
$$= 0.354\mathbf{i} - 0.354\mathbf{j} + 0.866\mathbf{k}$$

الخطوة الرابعه : إيجاد الزاوية الخاصة بالقوة المحصلة ولكي نجدها لا بد من إيجاد متجه الوحدة

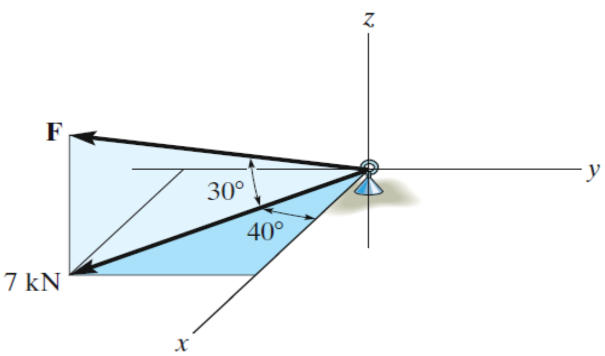
$$\alpha = \cos^{-1}(0.354) = 69.3^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}(-0.354) = 111^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0.866) = 30.0^\circ$$



- **Prop2-62 . Determine the magnitude and coordinate direction angles of the force F acting on the support. The component of F in the *xy* plane is 7 kN ?**



- الخطوة الأولى : نحلل المتجه إلى مركبتين , مركبة على محور الزيد والمركبة الأخرى تقع بين المحور السيني والصادي وهي معلومة القيمة لكن قيمة المتجه لا نعرفها ومن ثم نجد المركبة على محور الزيد لأننا وجدنا قيمة المتجه الأن .

$$F = \frac{7}{cos(30)} = 8.08\,\text{kN}$$

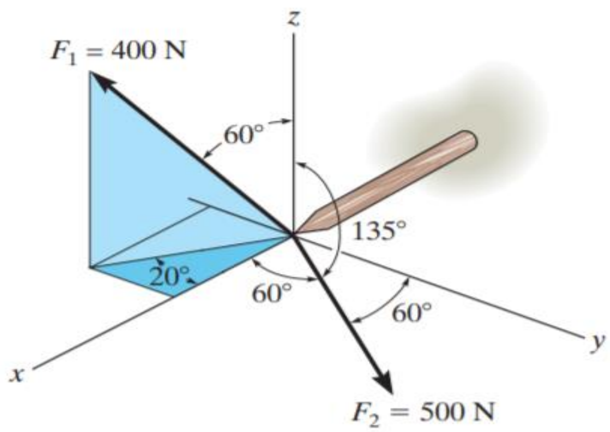
$$F_z = F \cdot sin(30) = 8.08 \cdot sin(30) = 4.04\,\text{kN}$$

- الخطوة الثانية : نحلل المتجه الذي قد حصلنا عليه إلى مركبة سينية وصادية مع ضرورة الإنتباه إلى المحاور وإذا كانت القيمة موجبة أم سالبة

$$F_y = -7 \cdot sin(40) = -4.50\,\text{kN}$$

$$F_x = 7 \cdot cos(40) = 5.36\,\text{kN}$$

- **Prop2.77 : Determine the magnitude and coordinate direction angles of the resultant force, and sketch this vector on the coordinate system ?**



- الخطوة الأولى : نحلل المتجه إلى مركبتين , مركبة على محور الزيد والمركبة الأخرى تقع بين المحور السيني والصادي .
- الخطوة الثانية : نحلل المتجه الذي قد حصلنا عليه إلى مركبة سينية وصادية مع ضرورة الإنتباه إلى المحاور وإذا كانت القيمة موجبة أم سالبة

$$\mathbf{F}_1 = 400\,(\sin 60^\circ \cos 20^\circ\mathbf{i} - \sin 60^\circ \sin 20^\circ\mathbf{j} + \cos 60^\circ\mathbf{k})$$

$$= \{325.52\mathbf{i} - 118.48\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

- الخطوة الثالثة : تحليل القوة إلى ثلاثة مركبات وهذا سهل لأننا نملك الزوايا الخاصة بكل محور

$$\mathbf{F}_2 = 500\,(\cos 60^\circ\mathbf{i} + \cos 60^\circ\mathbf{j} + \cos 135^\circ\mathbf{k})$$

$$= \{250\mathbf{i} + 250\mathbf{j} - 353.55\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

- الخطوة الرابعه : جمع القوتين مع بعضهما البعض ومن ثم حساب القوة المحصلة

Resultant Force.

$$F_R = F_1 + F_2$$

$$= (325.52\mathbf{i} - 118.48\mathbf{j} + 200\mathbf{k}) + (250\mathbf{i} + 250\mathbf{j} - 353.55\mathbf{k})$$

$$= \{575.52\mathbf{i} + 131.52\mathbf{j} - 153.55\,\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

The magnitude of the resultant force is

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2 + (F_R)_z^2} = \sqrt{575.52^2 + 131.52^2 + (-153.55)^2}$$

$$= 610.00\ \text{N} = 610\ \text{N}$$

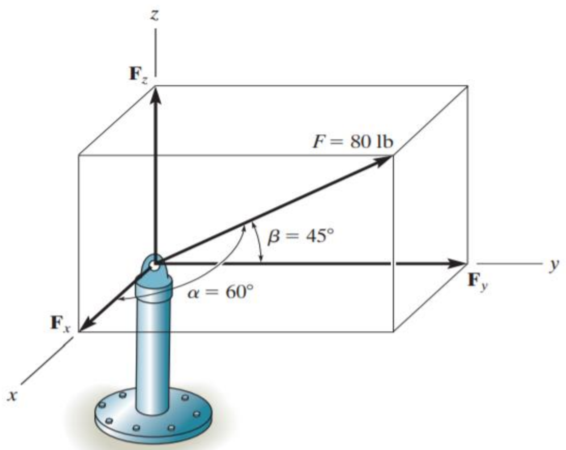
<u>الخطوة الخامسة :</u> إيجاد الزوايا الخاصة بالقوة المحصلة عن طريق حساب متجه الوحدة

$$\cos\alpha = \frac{(F_R)_x}{F_R} = \frac{575.52}{610.00} \qquad \alpha = 19.36^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{(F_R)_y}{F_R} = \frac{131.52}{610.00} \qquad \beta = 77.549^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{(F_R)_z}{F_R} = \frac{-153.55}{610.00} \qquad \gamma = 104.58^\circ$$

- **Prop2.60 : The force F has a magnitude of 80 lb and acts within the octant shown. Determine the magnitudes of the x, y, z components of F.**



<u>الخطوة الأولى :</u> لدينا متجه ومن خلال نظرتنا يتبين لنا انه يملك ثلاثة مركبات ولدينا زاويتين ولا نعلم الزاوية الثالثة لذلك علينا بتطبيق القانون الذي قد تم ذكره سابقا

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

$$1 = \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2\gamma$$

Solving for the positive root, $\gamma = 60^\circ$

<u>الخطوة الثانية :</u> لدينا الزوايا ولدينا قيمة القوة فالتطبيق مباشر لأن القوة مرتبطة بزاوية مباشرة مع المحور المطلوب خلاف السؤال الاول

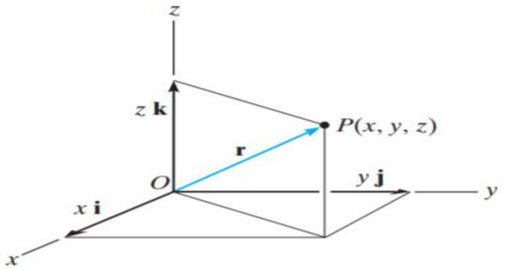
$$F_x = 80\cos 60^\circ = 40.0\ \text{lb}$$

$$F_y = 80\cos 45^\circ = 56.6\ \text{lb}$$

$$F_z = 80\cos 60^\circ = 40.0\ \text{lb}$$

- **A position vector (r) (متجه الموقع) : Fixed vector which locates a point in space relative to another point.**

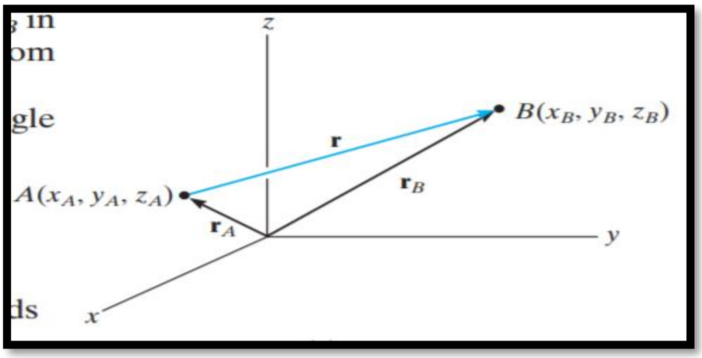
- **متجه ثابت والذي يحدد نقطة في الفضاء نسبة إلى نقطة ثانية .**



(a)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

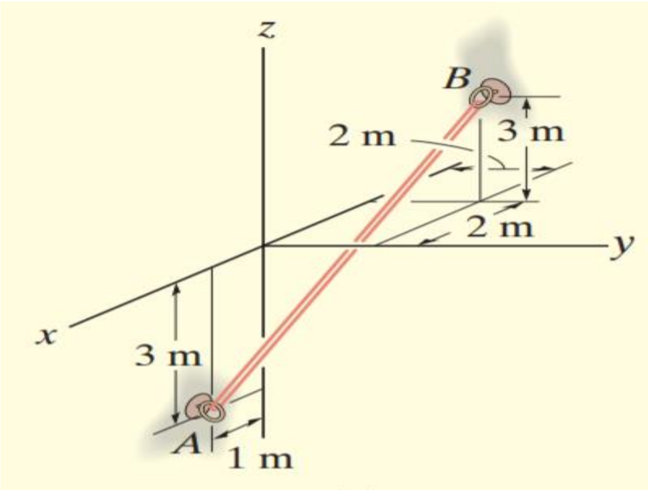
- **المتجه بين نقطة الأصل و النقطة المطلوبة**



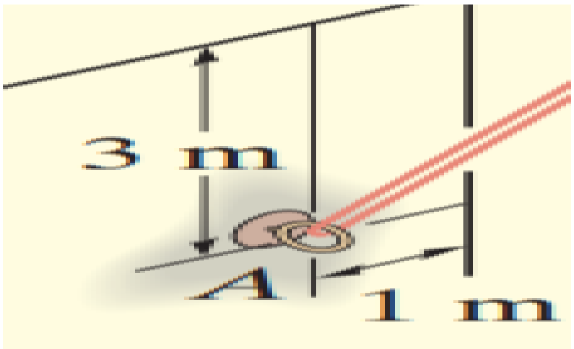
$$\boxed{\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}$$

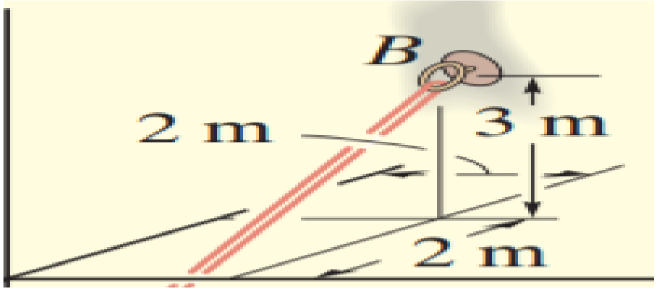
المتجه بين نقطة الأولى و النقطة الثانية

- **Example2.10 : An elastic rubber band is attached to points A and B as shown Determine its length and its direction measured from <u>A toward B</u>.**



- ❖ معرفة إحداثي النقطة <u>مهم جدا جدا</u> لأنه إذا قمت بإيجاده بشكل خاطئ فسيكون حل السؤال خاطئ بالكامل فعليك الحذر .
- ❖ إذا كانت النقطة واقعة على المحور السيني فهذا يعني أنها لها فقط إحداث سيني وإحداثي الصادي والزيد يساوي صفر وهكذا .
- ❖ إذا كان الخط موازي ل المحور تكون القيمة موجبة وإذا كانت موازية ل إمتداد المحور فتكون القيمة سالبة .
- ❖ موضوع بحاجة إلى ممارسة فلا تقلق , عند إعادته سيصبح سهلا.
- ❖ <u>ننظر إلى النقطة ونرى الخطوط المحيطة بها ونرى أي من المحاور توازي ونحدد القيمة</u>
- ❖ الرقم واحد هو موازي ل المحور السيني إذن الإحداث السيني هو 1
- ❖ الرقم ثلاثة هو موازي ل إمتداد المحورالزيد إذن الإحداث الزيد هو -3
- ❖ لا يوجد خط موازي ل المحور الصادي إذن قيمة الإحداث الصادي هي صفر





- الرقم اثنان هو موازي ل إمتداد المحور السيني إذن الإحداث السيني هو -2
- الرقم اثنان هو موازي ل المحورالصادي إذن الإحداث الصادي الزيد هو 2
- الرقم ثلاثة هو موازي ل المحورالزيد إذن الإحداث الزيد الزيد هو 3

$$A(1\ \text{m}, 0, -3\ \text{m})$$

$$B(-2\ \text{m}, 2\ \text{m}, 3\ \text{m})$$

❖ **<u>A toward B :</u>**

- ❖ من إحداثيات النقطة الثانية نبدأ بالحساب لأنه حدد لي كيف إتجاه المتجه

$$\mathbf{r} = [-2\ \text{m} - 1\ \text{m}]\mathbf{i} + [2\ \text{m} - 0]\mathbf{j} + [3\ \text{m} - (-3\ \text{m})]\mathbf{k}$$
$$= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

- ❖ نجد مقداره كما نجد مقدار المتجه

$$r = \sqrt{(-3\ \text{m})^2 + (2\ \text{m})^2 + (6\ \text{m})^2} = 7\ \text{m}$$

- ❖ نحسب متجه الوحدة لكي نحسب الزاوية الخاصة به كما تعلمنا مسبقا

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

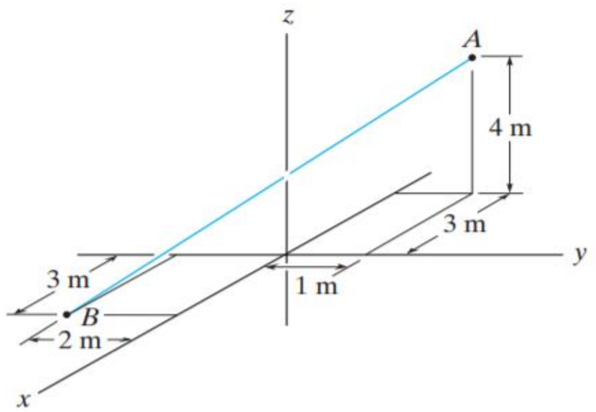
- ❖ حساب الزوايا الخاصة بالمتجه

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0°$$

❑ Establish a position vector from point A to point B ?



A(-3,1,4) ❑

❑ الرقم ثلاثة هو موازي ل إمتداد المحور السيني إذن الإحداث السيني هو -3

❑ الرقم واحد هو موازي ل المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو 1

❑ الرقم أربعة هو موازي ل المحور الزيد إذن الإحداث الزيد هو 4

B(3,-3,0) ❑

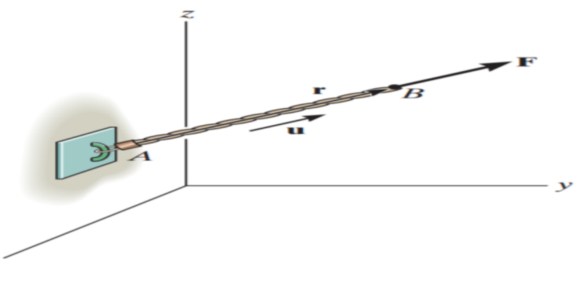
❑ الرقم ثلاثة هو موازي ل المحور السيني إذن الإحداث السيني هو 3

❑ الرقم اثنان هو موازي ل إمتداد المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو -2

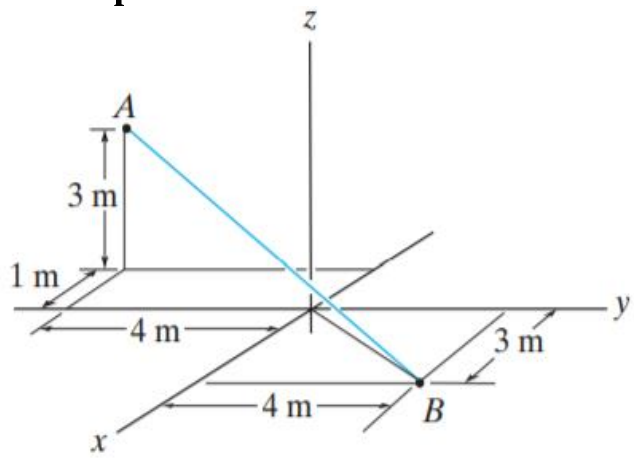
❑ لا يوجد خط موازي ل محور الزيد إذن إحداثي الزيد يساوي صفر

❑ The direction of a force is specified by two points through which its line of action passes. where the force F is directed along the cord AB. We can formulate F as a Cartesian vector by realizing that it has the same direction and sense as the position vector r directed from point A to point B on the cord.

❑ تحديد إتجاه القوة يحدد عن طريق نقطتين يمر بهما ويمكننا تمثيل القوة بالطريقة الكارتيزين وأن تكون بنفس إتجاه متجه الموقع الذي تعلمناه سابقا كما هو هو موضح في الصورة .



❑ Establish a position vector from point A to point B ?



A(-1,-4,3) ❑

❑ الرقم واحد هو موازي ل إمتداد المحور السيني إذن الإحداث السيني هو -1

❑ الرقم أربعة هو موازي ل إمتداد المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو -4

❑ الرقم ثلاثة هو موازي ل المحور الزيد إذن الإحداث الزيد هو 3

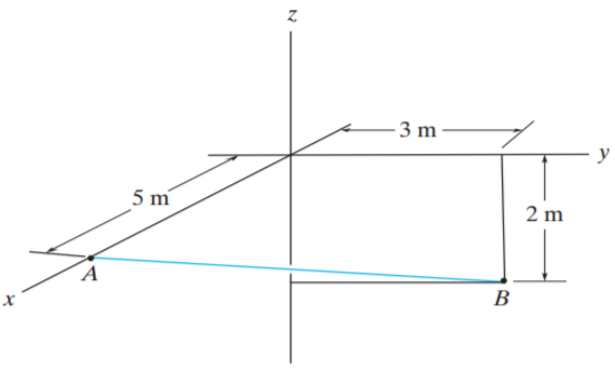
B(3,4,0) ❑

❑ الرقم ثلاثة هو موازي ل المحور السيني إذن الإحداث السيني هو 3

❑ الرقم أربعة هو موازي ل المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو 4

❑ لا يوجد خط موازي ل المحور الزيد إذن قيمة الإحداث الزيد هي صفر

❑ Establish a position vector from point A to point B ?



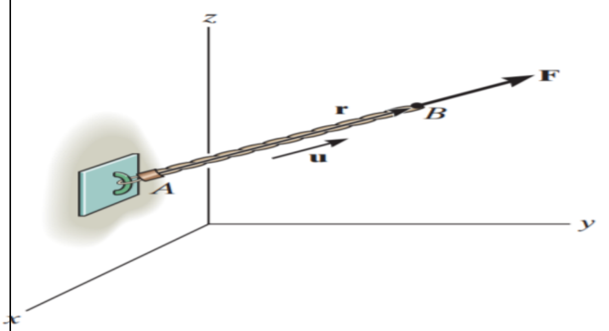
A(5,0,0) ❑

❑ النقطة منطبقة على محور السينات لذلك إحداثي الصادي والزيد يساوي صفر

B(0,3,2) ❑

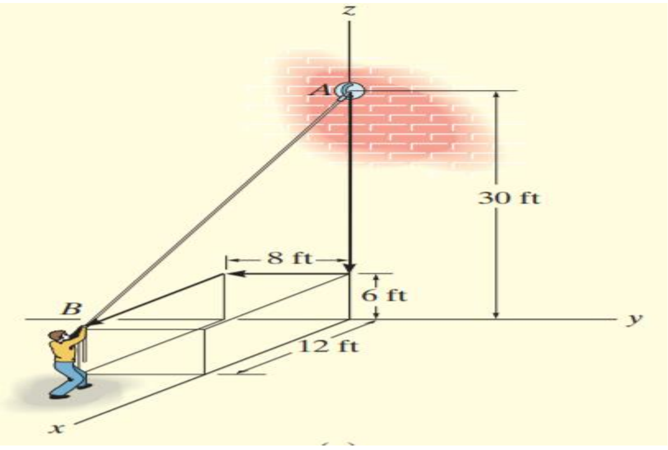
❑ الرقم اثنان هو موازي ل إمتداد المحور الزيد إذن الإحداث الزيد هو 2

❑ الرقم ثلاثة هو موازي ل المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو 3



$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = F\left(\frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

- ❑ **Example2.11. The man shown in a pulls on the cord with a force of 70 lb. Represent this force acting on the support A as a Cartesian vector and determine its direction ?**



❑

- ❑ <u>الخطوة الأولى :</u> جد إحداثيات النقاط
- ❑ A(0,0,30)
- ❑ النقطة منطبقة على محور الزيد لذلك الإحداثي السيني والصاد صفر
- ❑ B(12,-8,6)
- ❑ الرقم 6 هو موازي ل المحور الزيد إذن الإحداث الزيد هو 6
- ❑ الرقم 8 هو موازي ل إمتداد المحور الصادي إذن الإحداث الصادي هو 8-
- ❑ الرقم 12 هو موازي ل المحور السيني إذن الإحداث السيني هو 12

❑ <u>الخطوة الثانية :</u> نجد متجه الموقع والذي سيكون من النقطة الأولى إلى الثانية وهذا منطقي لأنه يسحب الحبل وبالعادة يكون محدد الإتجاه ومن ثم نجد مقدار المتجه كما تعلمنا مسبقا .

$$\mathbf{r} = \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}\ \text{ft}$$

$$r = \sqrt{(12\ \text{ft})^2 + (-8\ \text{ft})^2 + (-24\ \text{ft})^2} = 28\ \text{ft}$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد متجه الوحدة ومن ثم إيجاد القوة عن طريق تطبيق القانون

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = 70\ \text{lb}\left(\frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}\right)$$

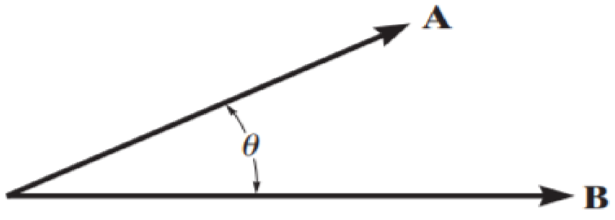
<u>الخطوة الرابعه :</u> إيجاد الزوايا الخاصة بالقوة

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{28}\right) = 107^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-24}{28}\right) = 149^\circ$$

- ❑ **Dot product**



$$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta}$$

Laws of Operation.

1. Commutative law: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
2. Multiplication by a scalar: $a(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (a\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(a\mathbf{B})$
3. Distributive law: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})$

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Applications: The dot product has two important applications in mechanics.

للضرب النقطي له تطبيقين مهمات وسنقوم بمناقشتهم وشرحهم بالتفصيل

1- The angle formed between two vectors or intersecting lines.

إيجاد الزاوية بين متجهين

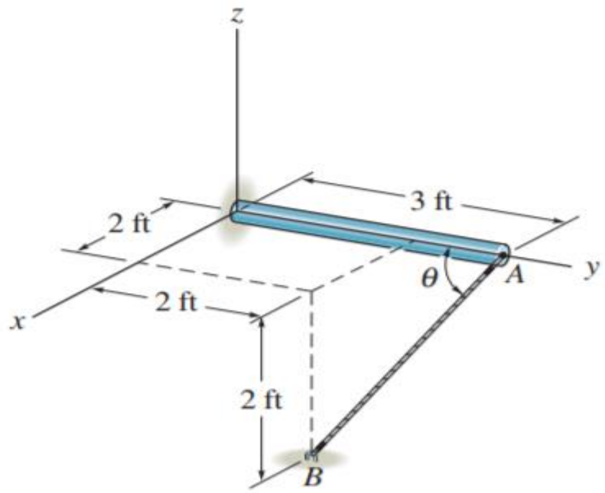
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \quad 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$$

2-The components of a vector parallel and perpendicular to a line .

مركبات المتجه , المركبة الموازية والمركبة العامودية وهي نفس مسمى الإسقاطات .

<u>سنقوم بشرحهم بالتفصيل الممل .</u>

- ❑ **Prop2-116 . Determine the angle θ between the <u>y axis of the pole and the wire AB</u> ?**



- ❑ <u>الخطوة الأولى :</u> نجد متجه الموقع ل المتجهات المطلوبة أي يعني الزاوية بين اي متجهات محصورة .
- ❑ الزاوية محصورة بين AB And AC

$$\mathbf{r}_{AC} = \{-3\mathbf{j}\}\ \text{ft}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \{(2-0)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (-2-0)\mathbf{k}\}\ \text{ft}$$

$$= \{2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{ft}$$

- ❑ <u>الخطوة الثانية :</u> نجد مقدار متجه الموقع

The magnitudes of the position vectors are

$$r_{AC} = 3.00\ \text{ft} \qquad r_{AB} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.00\ \text{ft}$$

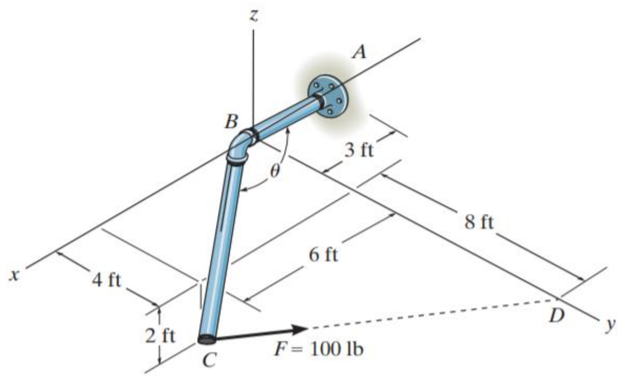
- ❑ <u>الخطوة الثالثة :</u> نطبق القانون الذي يخص الزاوية المحصورة
- ❑ في البسط نتيجة ضرب المتجهين ضرب نقطي
- ❑ في المقام , مقدار كل متجه

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right)$$

$$\mathbf{r}_{AC}\cdot\mathbf{r}_{AB} = (-3\mathbf{j})\cdot(2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$
$$= 0(2) + (-3)(-1) + 0(-2)$$
$$= 3$$

$$\cos^{-1}\left[\frac{3}{3.00(3.00)}\right] = 70.5^\circ$$

❑ **Prop2-127 . Determine the angle θ between pipe segments BA and BC ?**



SOL : C (6 , 4 , -2)

$$\overrightarrow{\gamma_{BC}} = \{6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\}\ \text{ft}$$

$$\overrightarrow{\gamma_{BA}} = \{-3\hat{i}\}\ \text{ft}$$

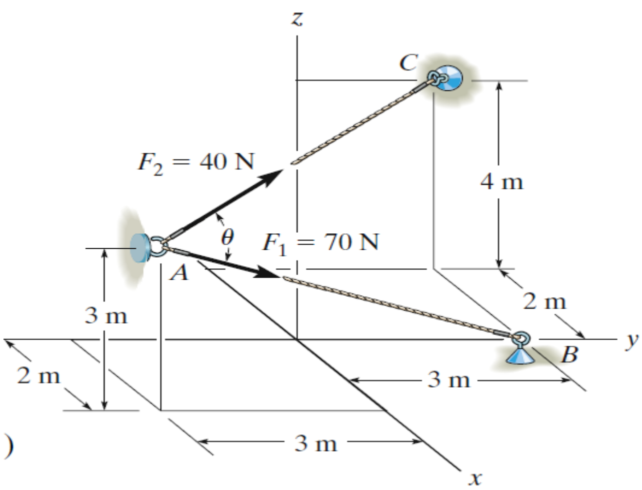
$$BC = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = 7.48$$

$$BA = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{\gamma_{BC}} \cdot \overrightarrow{\gamma_{BA}}}{|\overrightarrow{\gamma_{BC}}|\,|\overrightarrow{\gamma_{BA}}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-18}{22.45}\right)$$

$$\theta = 143^\circ$$

❑ **Prop2-115. Determine the magnitude of the projection of the force F1 along cable *AC* ?**



)

SOL :

$A(2, -3, 3)$ $B(0, 3, 0)$

$C(-2, 3, 4)$

$$\mathbf{u}_{AB} = \frac{(0-2)\mathbf{i} + [3-(-3)]\mathbf{j} + (0-3)\mathbf{k}}{\sqrt{(0-2)^2 + [3-(-3)]^2 + (0-3)^2}} = -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{u}_{AB} = 70\left(-\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \{-20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 30\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

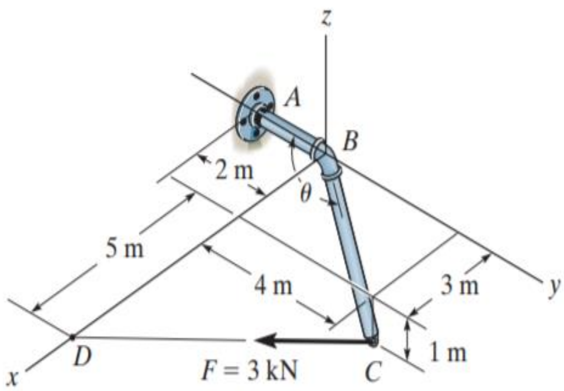
$$\mathbf{u}_{AC} = \frac{(-2-2)\mathbf{i} + [3-(-3)]\mathbf{j} + (4-3)\mathbf{k}}{\sqrt{(-2-2)^2 + [3-(-3)]^2 + (4-3)^2}} = -\frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{k}$$

$$(F_1)_{AC} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{AC} = (-20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 30\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{k}\right)$$

$$= (-20)\left(-\frac{4}{\sqrt{53}}\right) + 60\left(\frac{6}{\sqrt{53}}\right) + (-30)\left(\frac{1}{\sqrt{53}}\right)$$

$$= 56.32\ \text{N} = 56.3\ \text{N}$$

❑ **Prop2-129 . Determine the <u>magnitude</u> of the projected component of the 3 kN force acting along the axis BC of the pipe ?**



$D(8, 0, 0)$. $C(3, 4, -1)$ $B\,(0, 0, 0)$ m,

$$\mathbf{u}_{CD} = \frac{(8-3)\mathbf{i} + (0-4)\mathbf{j} + [0-(-1)]\mathbf{k}}{\sqrt{(8-3)^2 + (0-4)^2 + [0-(-1)]^2}} = \frac{5}{\sqrt{42}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{42}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{42}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{CD} = 3\left(\frac{5}{\sqrt{42}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{42}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{42}}\mathbf{k}\right)$$

$$= \left(\frac{15}{\sqrt{42}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{42}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{42}}\mathbf{k}\right)\ \text{kN}$$

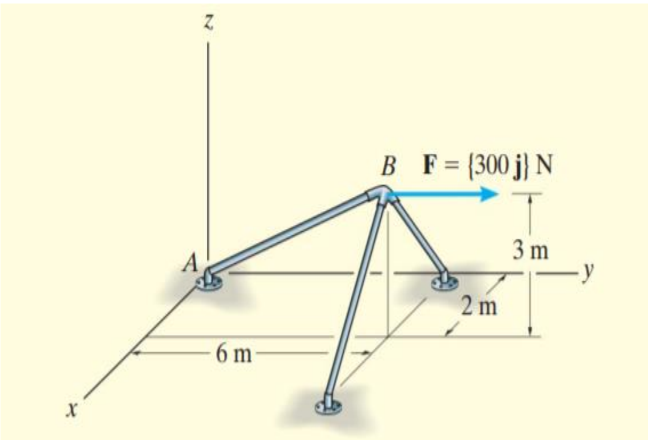
$$\mathbf{u}_{BC} = \frac{(3-0)\mathbf{i} + (4-0)\mathbf{j} + (-1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (-1-0)^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{26}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{26}}\mathbf{k}$$

$$|(F_{BC})| = |\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{BC}| = \left|\left(\frac{15}{\sqrt{42}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{42}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{42}}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{26}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{26}}\mathbf{k}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{15}{\sqrt{42}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{26}}\right) + \left(-\frac{12}{\sqrt{42}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{26}}\right) + \frac{3}{\sqrt{42}}\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)\right|$$

$$= \left|-\frac{6}{\sqrt{1092}}\right| = |-0.1816\text{ kN}| = 0.182\text{ kN} \qquad \textbf{Ans.}$$

- **Example 2.15 . The frame shown in is subjected to a horizontal force F = {300j} N. Determine the magnitudes of the components of this force parallel and perpendicular to member AB**



- **AB: المحور المطلوب**

SOL :

الخطوة الأولى : نجد إحداثيات النقاط التي تمر بها المحور المطلوب والأصل عليك إيجادهم الأن بإتقان وسرعه

A(0,0,0)   B(2,6,3)

الخطوة الثانية : نريد متجه الموقع ل المحور المطلوب ومن ثم إيجاد متجه الوحده ل المحور المطلوب

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}$$

الخطوة الثالثة : نريد أن نجد القوة بالصيغة الكارتيزن والتي تمر ب المتجه المطلوب والناتج سيكون مقدار

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_B = (300\mathbf{j})\cdot(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k})$$

$$= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429)$$
$$= 257.1\text{ N}$$

الخطوة الرابعه : الأن نريد إيجاد القوة التي تمر بالمحور المطلوب ك صيغة كارتيزن لأننا في الخطوة السابقة كانت ك مقدار

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\mathbf{u}_B = (257.1\text{ N})(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k})$$
$$= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\}\text{N}$$

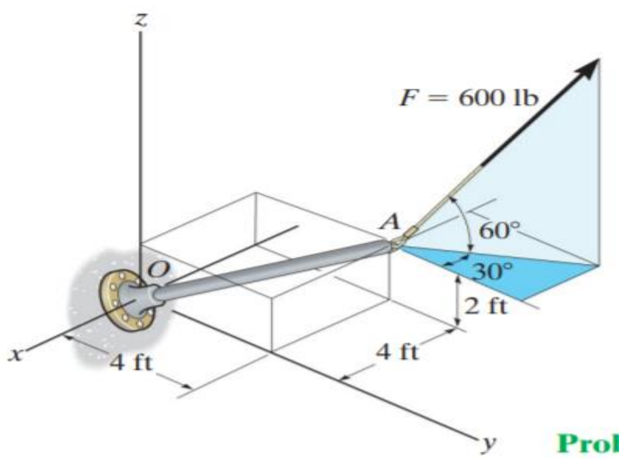
الخطوة الخامسة : نريد إيجاد المركبة العامودية بالصيغة الكارتيزن عن طريق تطبيق القانون

$$\mathbf{F}_\perp = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k})$$
$$= \{-73.5\mathbf{i} + 79.6\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\}\text{N}$$

الخطوة السادسة : نجد المركبة العامودية مقدار وهذه الخطوة إختيارية أي يعني إذا طلب السؤال منك

$$F_\perp = \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} = \sqrt{(300\text{ N})^2 - (257.1\text{ N})^2}$$
$$= 155\text{ N}$$

- F2-30 Determine the components of the force acting parallel and perpendicular to the <u>axis of the pole</u> ?



O(0,0,0) **A(4,4,2)**

$$\mathbf{u_{OA}}=\frac{rOA}{rOA}=\frac{(4-0)i+(4-0)j+(2-0)j}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}$$

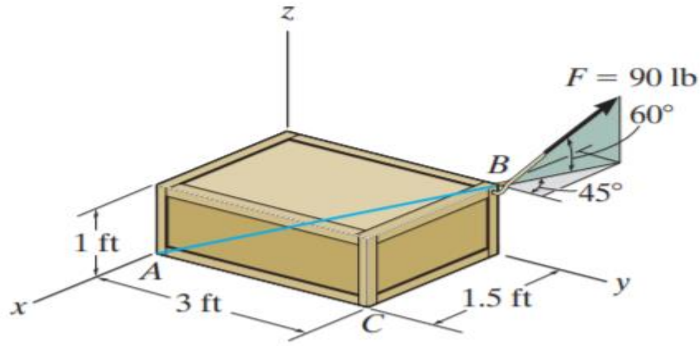
$$=\frac{4}{6}i+\frac{4}{6}j+\frac{2}{6}k$$

$$\vec{F}=[-600cos(60)sin(30)i+600cos(60)cos(30)j+600sin(60)k]=[-150i+260.j+520.k]$$

$$F_{\|}=\frac{[-150i+260.j+520.k]\cdot[-4i+4j+2k]}{6}=100+346=446$$

$$\vec{F_\perp}=\sqrt{\vec{F}^2-\vec{F_{\|}}^2}=\sqrt{600^2-446^2}=401\text{ lb}$$

- Prop2-134 . Determine the magnitudes of the components of the force F = 90 lb acting parallel and perpendicular to diagonal AB of the crate.



<u>الخطوة الأولى :</u> نجد إحداثيات

- **A(1.5,0,0)** **B(0,3,1)**

$$\mathbf{u}_{AB}=\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{(0-1.5)\mathbf{i}+(3-0)\mathbf{j}+(1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(0-1.5)^2+(3-0)^2+(1-0)^2}}=-\frac{3}{7}\mathbf{i}-\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{2}{7}\mathbf{k}$$

- **<u>الخطوة الثانية :</u> نريد متجه الموقع ل المحور المطلوب ومن ثم إيجاد متجه الوحده ل المحور المطلوب**

$$\mathbf{u}_{AB}=\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{(0-1.5)\mathbf{i}+(3-0)\mathbf{j}+(1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(0-1.5)^2+(3-0)^2+(1-0)^2}}=-\frac{3}{7}\mathbf{i}-\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{2}{7}\mathbf{k}$$

- **<u>الخطوة الثالثة :</u> يجب أن تكون القوة ب صيغة الكارتيزن**

$$\mathbf{F}=90(-\cos 60^\circ \sin 45^\circ\mathbf{i}+\cos 60^\circ\cos 45^\circ\mathbf{j}+\sin 60^\circ\mathbf{k})$$

$$=\{-31.82\mathbf{i}+31.82\mathbf{j}+77.94\mathbf{k}\}\text{ lb}$$

- **<u>الخطوة الرابعه :</u> نريد أن نجد القوة بالصيغة الكارتيزن والتي تمر ب المتجه المطلوب والناتج سيكون مقدار**

$$[(F)_{AB}]_{pa}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{AB}=(-31.82\mathbf{i}+31.82\mathbf{j}+77.94\mathbf{k})\cdot\left(-\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{2}{7}\mathbf{k}\right)$$

$$=(-31.82)\left(-\frac{3}{7}\right)+31.82\left(\frac{6}{7}\right)+77.94\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$=63.18\text{ lb}=63.2\text{ lb} \qquad \text{Ans.}$$

- **<u>الخطوة الخامسة :</u> نريد إيجاد المركبة العامودية كمقدار**

$$[(F)_{AB}]_{pr}=\sqrt{F^2-[(F)_{AB}]_{pa}^2}=\sqrt{90^2-63.18^2}=64.1\text{ lb}$$

3 Equilibrium of a Particle 87

- **A particle is said to be in equilibrium if it remains at rest if originally at rest, or has a constant velocity if originally in motion.**

- إن الجسيم في حالة توازن إذا بقي في حالة اتزان إذا كان في الأصل في حالة سكون ، أو كان له سرعة ثابتة في حال حركته .

- **To maintain equilibrium, it is necessary to satisfy Newton's first law of motion, which requires the <u>resultant force</u> acting on a particle to be equal to <u>zero.</u>**

- للمحافظة على التوازن ، من الضروري تلبية قانون نيوتن الأول للحركة ، والذي يتطلب أن تكون القوة الناتجة التي تؤثر على الجسم تساوي صفر .

- **Also , F=ma ma=0 so the a=0 (constant velocity)**

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$

- **To apply the equation of equilibrium, we must account for all the known and unknown forces (F) which act on the particle.**

- لكي نطبق قوانين الإتزان لا بد من معرفة قيمة القوى المؤثرة على الجسم .

- **The best way to do this is to think of the particle as isolated and free from its surroundings. A drawing that shows the particle with <u>all the forces</u> that act on it is called a Free-Body Diagram (FBD).**

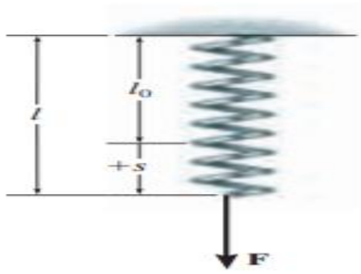
- أفضل طريقه ل معرفة القوى هي عزل الجسم عن الوسط المحيط به ورسم مخطط الجسم الحر .

- **Springs(الزنبرك): If a linearly elastic spring of undeformed length l_o is used to support a particle, the length of the spring will change in direct proportion to the force F acting on it .**

- الزنبرك يكون له طول إبتدائي ولكن في حالة تم استخدامه في تثبيت جسم فإن طوله سيتغير تناسبا مع إتجاه القوة المؤثرة عليه .

- **Stiffness k : Defines the "Elasticity" of a spring .**

مقاومة الزنبرك ل الإستطالة .



- **The magnitude of force exerted on a linearly elastic spring which has a stiffness k and is deformed (elongated or compressed) a distance**

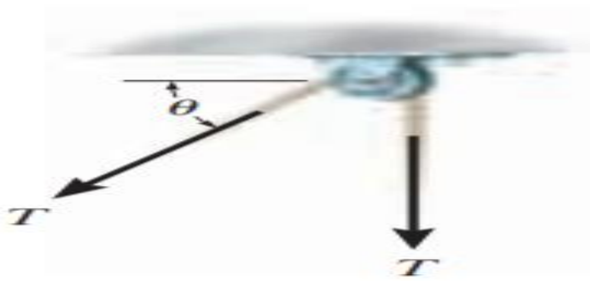
s = l – l_o(الإستطالة), measured from its unloaded position, is <u>F=Ks (حساب القوة)</u>

مقدارالقوة المؤثرة على الزنبرك والذي له معامل والذي قد تعرض ل تشوه وكانت بمقدار محدد تكون القوة كما في المعادلة التي مكتوبة .

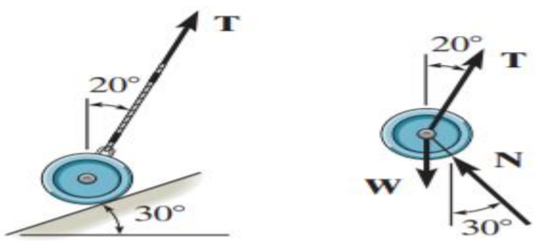
- If s is <u>positive</u>, causing an elongation, then F must pull on the spring; whereas if s is <u>negative</u>, causing a shortening, then F must push on it.

إن كانت الإستطالة موجبة فهذا يعني أن القوة قد تسحب به وإن كانت الإستطالة سالبة أي عني أن القوة تدفع به

- Cables and Pulleys : All cables will be assumed to have negligible weight and they cannot stretch.
- Also, a cable can support only a tension or "pulling" force, and this force always acts in the <u>direction</u> of the cable.
- يفترض أن جميع الكابلات (أو الحبال) لها وزن ضئيل ولا يمكن أن تمدد.
- أيضًا ، يمكن أن يدعم الكبل قوة شد أو قوة سحب فقط ، وهذه القوة تعمل دائمًا في اتجاه الحبل.



- Smooth Contact: If an object rests on a smooth surface, then the surface will exert a force on the object that is <u>normal to the surface</u> at the <u>point of contact</u>.
- إذا استقر جسم ما على سطح أملس ، فسوف يمارس السطح قوة على الجسم وتكون القوة عامودية على السطح عند نقطة الإتصال .



- If a particle is subjected to a system of coplanar forces that lie in the x–y plane, then each force can be resolved into its i and j components.
- عندما يكون الجسم متعرض لأكثر من قوى فعلينا تحليلها وتجميعها وفقا ل المركبات أي يعني المركبات السينية مع بعضها البعض والمركبات الصادية مع بعضها البعض .
- <u>For Equilibrium</u>, these forces must sum to produce a zero force resultant .
- لتحقيق التوازن ، يجب أن يكون مجموع القوة المؤثرة يساوي صفر

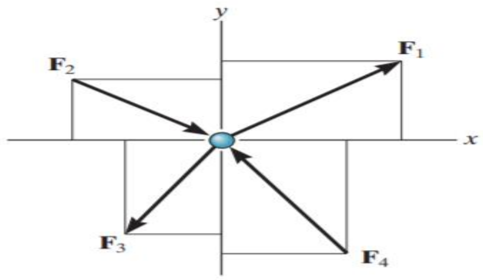
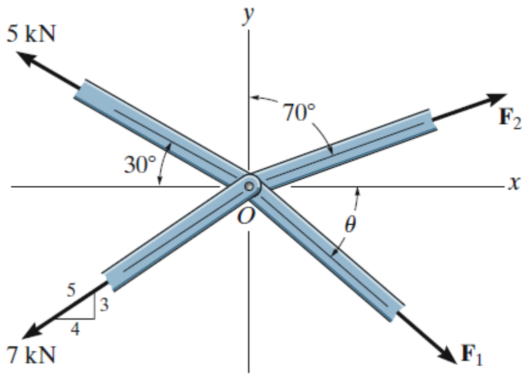


Fig. 3–4

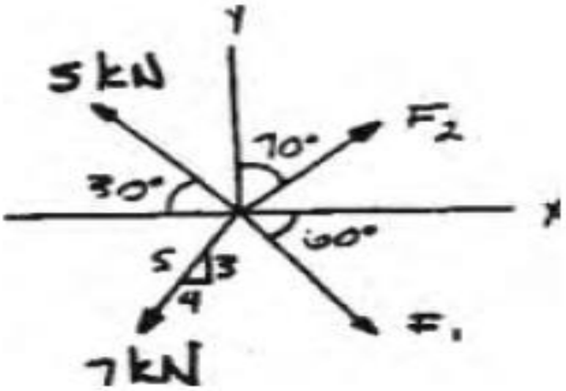
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

- **Prop3.2 . The members of a truss are pin connected at joint *O*. Determine the magnitudes of and for equilibrium. Set θ = 60°.?**



رسم مخطط الجسم الحر ومن ثم تحليل القوة ومن ثم تطبيق قوانين نيوتن , سأقوم بشرح هذا السؤال بالتفصيل الممل لكي تصل الفكرة ومن ثم بعض الخطوات ستكون بديهية

الخطوة الأولى : نرسم المخطط الحر ولكي يكون الرسم صحيح علينا تحليل القوى على الجسم



الخطوة الثانية : تطبيق قانون مجموع القوى المؤثرة على الجسم يساوي صفر

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad F_2 \sin 70^\circ + F_1 \cos 60^\circ - 5 \cos 30^\circ - \frac{4}{5}(7) = 0$$

$$0.9397F_2 + 0.5F_1 = 9.930$$

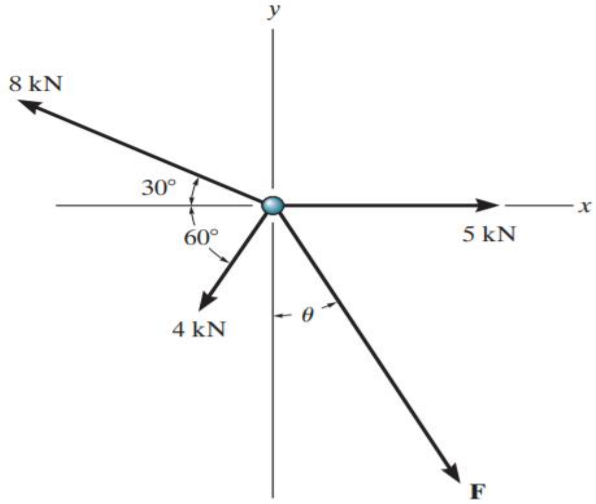
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_2 \cos 70^\circ + 5 \sin 30^\circ - F_1 \sin 60^\circ - \frac{3}{5}(7) = 0$$

$$0.3420F_2 - 0.8660F_1 = 1.7$$

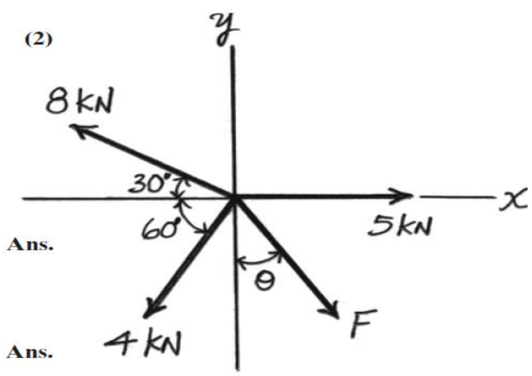
$$F_2 = 9.60 \text{ kN}$$

$$F_1 = 1.83 \text{ kN}$$

- **Prop3.3 . Determine the magnitude and direction θ of F so that the particle is <u>in equilibrium</u> ?**



نفس الخطوات السابقة :



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad F \sin\theta + 5 - 4\cos 60^\circ - 8\cos 30^\circ = 0$$

$$F\sin\theta = 3.9282$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 8\sin 30^\circ - 4\sin 60^\circ - F\cos\theta = 0$$

$$F\cos\theta = 0.5359$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 7.3301$$

قسمة المعادلة الأولى على الثانية

Realizing that $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, then

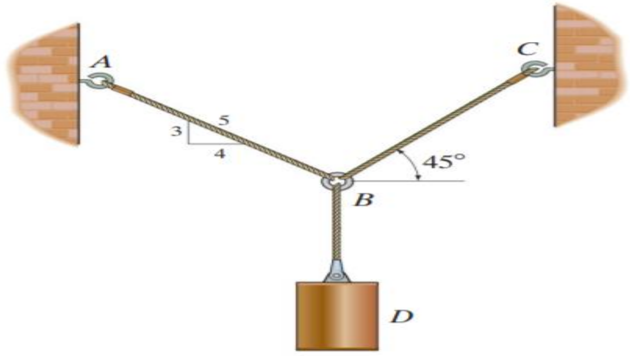
$$\tan\theta = 7.3301$$

$$\theta = 82.23^\circ = 82.2^\circ$$

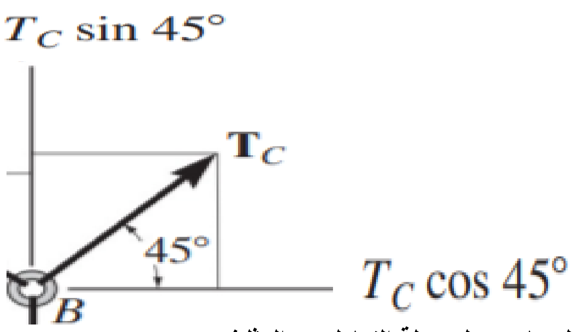
$$F \sin 82.23^\circ = 3.9282$$

$$F = 3.9646 \text{ kN} = 3.96 \text{ kN}$$

- **Example 3.2 :** Determine the **Tension** in cables BA and BC necessary to support the **60-kg** cylinder ?



خطوات الحل : رسم مخطط الجسم الحر ومن ثم تحليل القوة ومن ثم تطبيق قوانين نيوتن

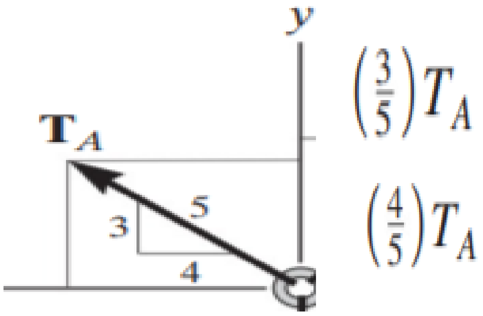


<u>**من باب المساعده ولسهولة التعامل مع المثلث :**</u>

نريد **المركبة السينية** , ننظر إلى الضلع الموازي ل المحور السيني ونقسمه على الوتر

نريد **المركبة الصادية** , ننظر إلى الضلع الموازي ل المحور الصادي ونقسمه على الوتر

والمركبتين نضربهم بالقوة



الوزن **لا يحلل** لأنه منطبق على محور الصادي السالب <u>**وعلينا الإنتباه للإشارات جيدا**</u>

الخطوة الثانية : تطبيق قانون مجموع القوى المؤثرة على الجسم يساوي صفر

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_C \cos 45° - \left(\frac{4}{5}\right)T_A = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_C \sin 45° + \left(\frac{3}{5}\right)T_A - 60(9.81)\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

T_{BD}= وزن الإسطوانة مضروب بتسارع الجاذبية الأرضية .

Equation (1) can be written as $T_A = 0.8839T_C$. Substituting this into Eq. (2) yields

$$T_C \sin 45° + \left(\frac{3}{5}\right)(0.8839T_C) - 60(9.81)\text{ N} = 0$$

so that

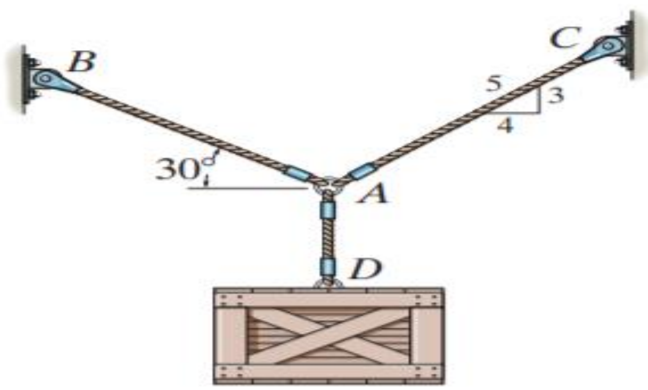
$$T_C = 475.66\text{ N} = 476\text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

Substituting this result into either Eq. (1) or Eq. (2), we get

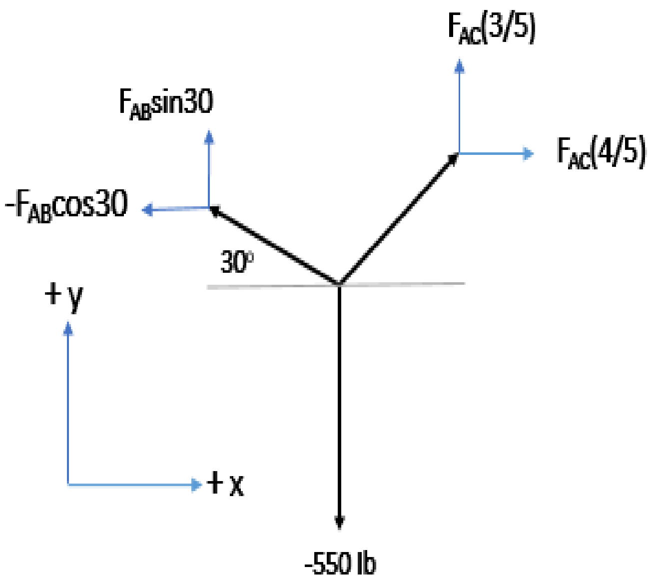
$$T_A = 420\text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

- **F3.1 .** The crate has a weight of 550 lb. Determine the **force in each supporting cable ?**

نفس الخطوات السابقة :



FBD



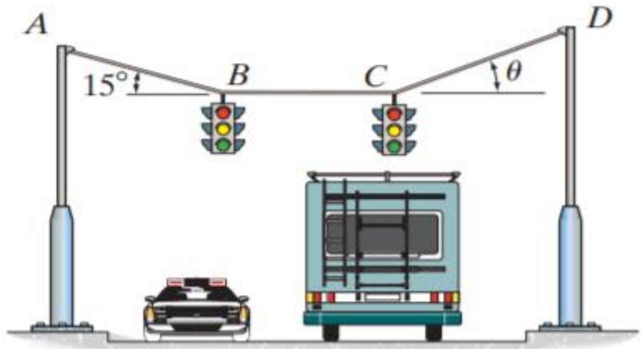
$$\rightarrow + \sum Fx = 0$$
$$\tfrac{4}{5}Fac - Fab\cos30^o = 0 \quad ....(1)$$

$$\uparrow + \sum Fy = 0$$
$$\tfrac{3}{5}Fac + Fab\sin30^o - 550 = 0 \quad ....(2)$$

from (1) and (2)

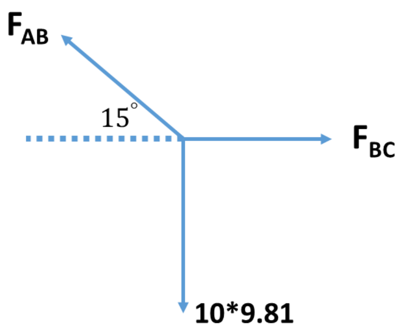
$Fab = 478lb \quad Fac = 518lb$

- **F3-6 .** Determine the tension in cables AB, BC, and CD, necessary to support the 10-kg and 15-kg traffic lights at B and C, respectively. Also, find the angle θ ?



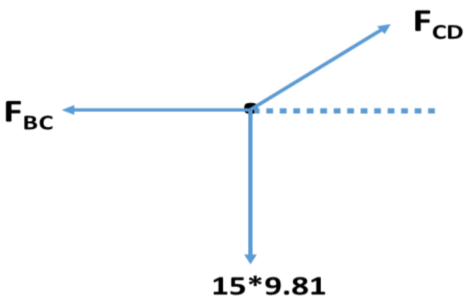
SOL :

<u>**At B**</u>



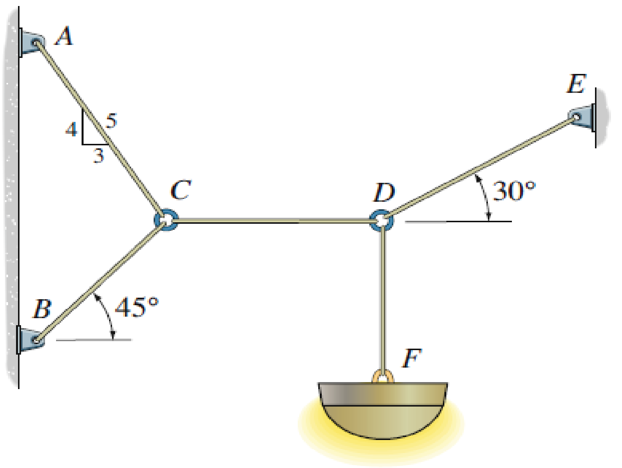
$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{AB}\sin(15) - 10(9.81) = 0$$
$$T_{AB} = 379\,\text{N}$$
$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_{BC} - T_{AB}\cos(15) = 0$$
$$T_{BC} = 366\,\text{N}$$

<u>**At C**</u>

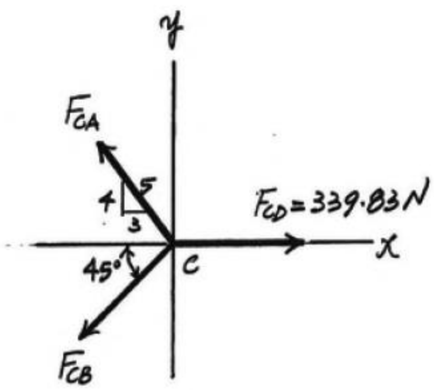


$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{CD}\sin(\theta) - 15(9.81) = 0$$
$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_{CD}\cos(\theta) - T_{BC} = 0$$
$$\theta = 21.9$$
$$T_{CD} = 395\,\text{N}$$

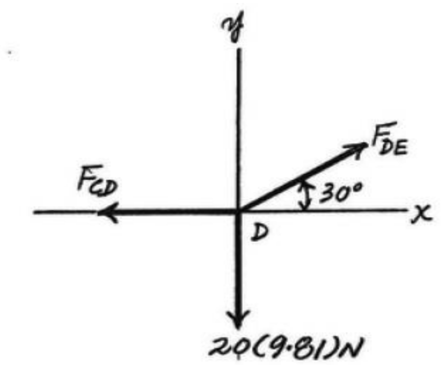
- **Prop3.30-** Determine the tension developed in each cord required for equilibrium of the 20-kg lamp ?



At C



At D



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} \sin 30^\circ - 20(9.81) = 0 \quad F_{DE} = 392.4\text{ N} = 392\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 392.4 \cos 30^\circ - F_{CD} = 0 \quad F_{CD} = 339.83\text{ N} = 340\text{ N}$$

At C

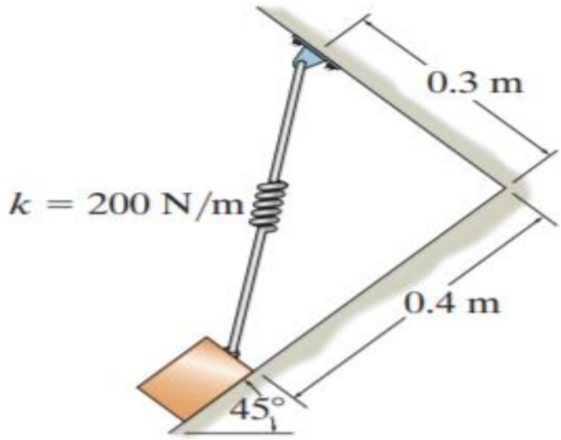
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 339.83 - F_{CA}\left(\frac{3}{5}\right) - F_{CD} \cos 45^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CA}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{CB} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{CA} = 243\text{ N} \qquad F_{CB} = 275\text{ N}$$

- **F3-4. The block has a mass of 5 kg and rests on the smooth plane. Determine the unstretched length of the spring ?**

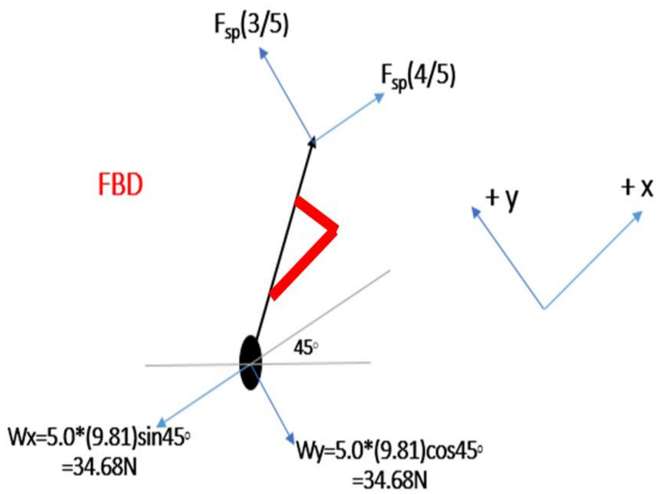
- **سأحل هذا السؤال ب طريقتين ولك الخيار .**



طريقة الأولى

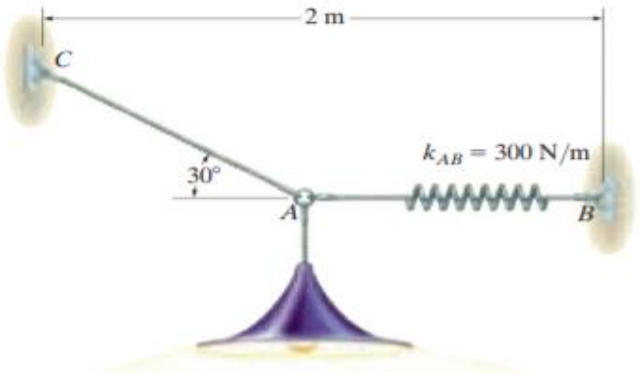
الخطوة الأولى : نرسم (FBD) ولكي يكون الرسم صحيح علينا تحليل القوى على الجسم وعليك الإنتباه لكيفية تحليل السطح المائل

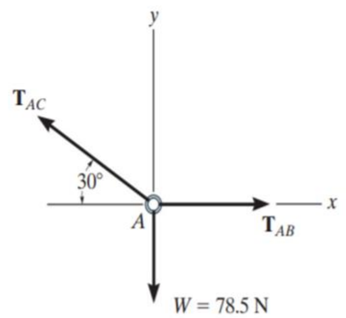
ولكي نحلل القوة على الزنبرك وكأنه مثلث صغير



❑ Example3.4 . Determine the required length of cord AC in so that the 8-kg lamp can be suspended in the position shown.

The undeformed length of spring AB is l'_{AB} = 0.4 m, and the spring has a stiffness of k_{AB} = 300 $\frac{N}{m}$





8*9.81=78.5

Equations of Equilibrium. Using the x, y axes,

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{AB} - T_{AC}\cos 30° = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{AC}\sin 30° - 78.5\text{ N} = 0$

Solving, we obtain

$$T_{AC} = 157.0\text{ N}$$
$$T_{AB} = 135.9\text{ N}$$

$T_{AB} = k_{AB}s_{AB}; \qquad 135.9\text{ N} = 300\text{ N/m}(s_{AB})$

$$s_{AB} = 0.453\text{ m}$$

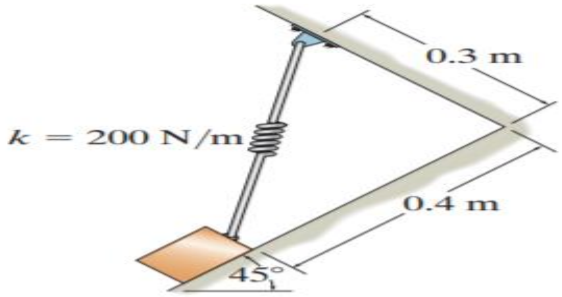
الخطوة الثانية : تطبيق قانون مجموع القوى المؤثرة على الجسم يساوي صفر

$$\nearrow + \sum Fx = 0$$
$$F_{sp}\left(\tfrac{4}{5}\right) - mg\ sin45 = 0\ ....(1)$$
$$F_{sp} = 43.35N$$

$$F_{sp} = k(l - l_o)$$
$$43.35 = 200(0.5 - l_o)$$
$$l_o = 0.2833m$$

الطريقة الثانية

عن طريق فيثاغورس : أوجد الطول الكلي للزنبرك



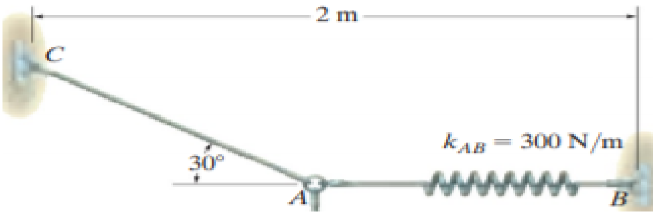
$$l = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5\text{ m}$$

$$F_W\sin(45°) = \frac{4}{5}FC$$

F_C=4.42kg=43.35N

$$F_C = k\Delta l$$
$$43.35 = 200\Delta l$$
$$\Delta l = 0.216m$$

$$l_0 = l - \Delta l = 0.283m$$

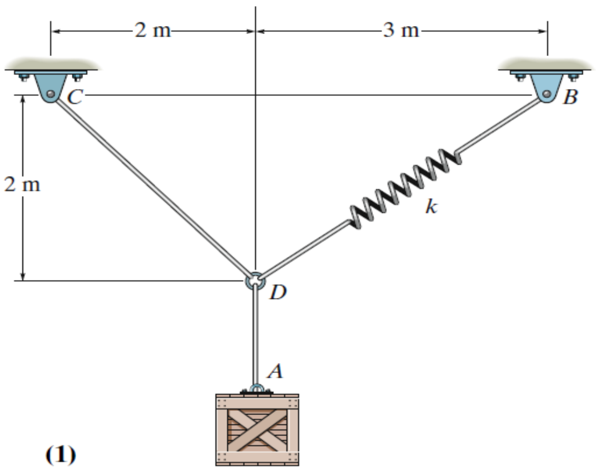


الطول الكامل = الطول ما قبل الشد + الإستطالة

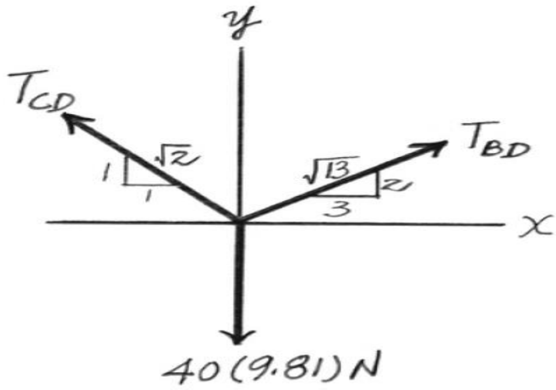
0.853=0.4+0.453

$$2\text{ m} = l_{AC}\cos 30^\circ + 0.853\text{ m}$$
$$l_{AC} = 1.32\text{ m}$$

- **Prop3-19. Determine the unstretched length of *DB* to hold the 40-kg crate in the position shown. Take *k* = 180 $\frac{N}{m}$**



- الخطوة الأولى : نرسم (FBD)ولكي يكون الرسم صحيح علينا تحليل القوى على الجسم ولكن نحن لا نملك زوايا أو حتى مثلث فما العمل ؟
- يوجد أطوال أضلاع وهي كفيلة بالمهمة ويوجد طريقة أخرى أيضا سوف نناقشها
- الطريقة الاولى
- $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$
- الطريقة الثانية عن طريق فيثاغورس
- Z =$\sqrt{x^2+y^2}$



$$\sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^2+2^2}$$

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad T_{BD}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - T_{CD}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad T_{BD}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + T_{CD}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 40(9.81) = 0$$

Solving Eqs (1) and (2)

$$T_{BD} = 282.96\text{ N} \qquad T_{CD} = 332.96\text{ N}$$

الطول الكلي للزنبرك عن تطبيق فيثاغورس

نطبق قانون الشد في الزنبرك

The stretched length of the spring is

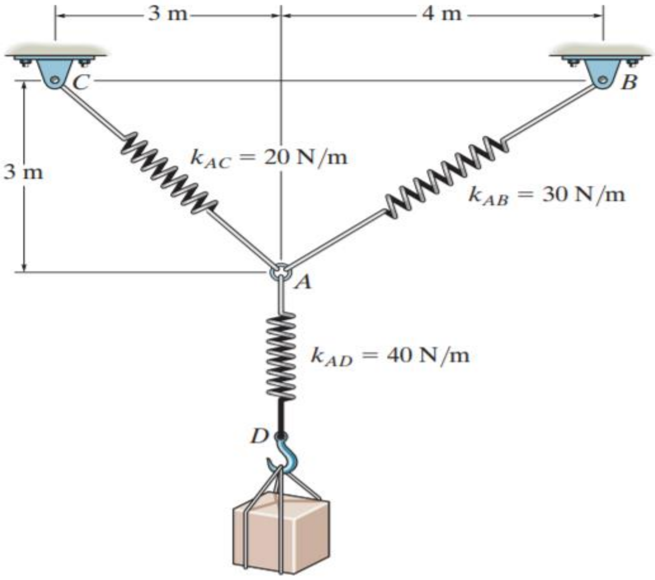
$$l = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}\text{ m}$$

Then, $x = l - l_0 = \sqrt{13} - l_0$. Thus

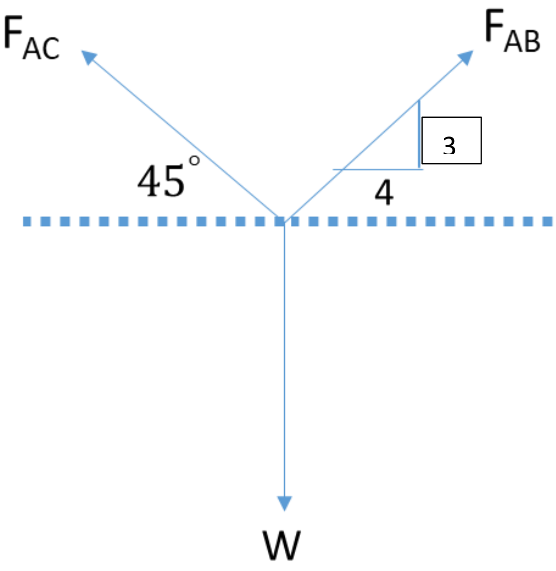
$$F_{sp} = kx; \qquad 282.96 = 180(\sqrt{13} - l_0)$$

$$l_0 = 2.034\text{ m} = 2.03\text{ m}$$

- **Prop3.15. The unstretched length of <u>spring AB</u> is 3 m. If the block is held in the equilibrium position shown, determine the mass of the block at D ?**



<u>At A</u>



نطبق قانون الشد في الزنبرك

الطول ما قبل تأثير القوة هو 3 وهو <u>معطى</u> في السؤال

الطول الكلي شاملا الإستطالة هو عباره عن 5 عن طريق تطبيق فيثاغورس

$$5=\sqrt{3^2+4^2}$$

$$F = kx = 30(5 - 3) = 60 \text{ N}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T\cos 45^\circ - 60\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

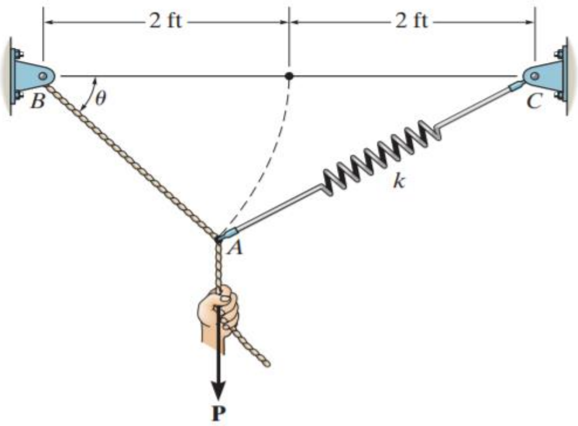
$$T = 67.88 \text{ N}$$

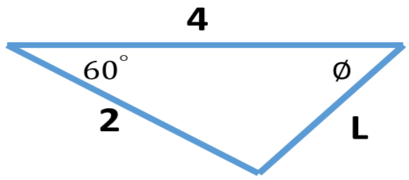
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -W + 67.88 \sin 45^\circ + 60\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$W = 84 \text{ N}$$

$$m = \frac{84}{9.81} = 8.56 \text{ kg}$$

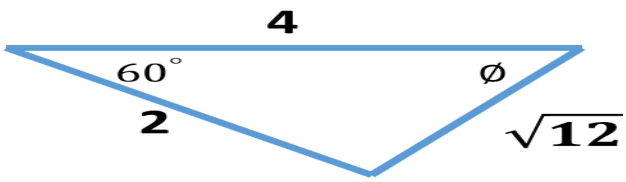
- **Prop3.21 . Determine the unstretched length of spring AC if a force P = 80 lb causes the angle θ = 60° for equilibrium. Cord AB is 2 ft long. Take k = 50 $\frac{lb}{ft}$?**





$$l = \sqrt{4^2 + 2^2 - 2(2)(4)\cos 60^\circ}$$

$$l = \sqrt{12}$$

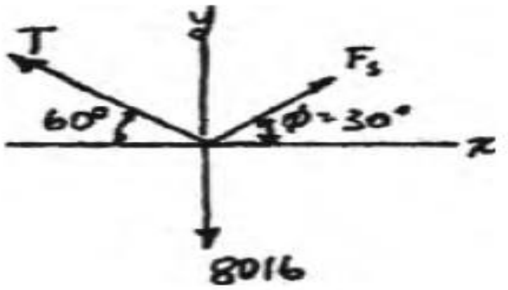


$$\frac{\sqrt{12}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin \phi}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{12}}\right) = 30^\circ$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T \sin 60^\circ + F_s \sin 30^\circ - 80 = 0$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -T \cos 60^\circ + F_s \cos 30^\circ = 0$$

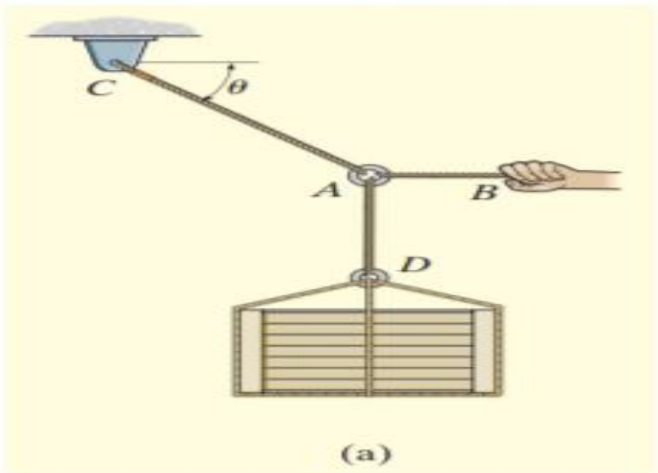


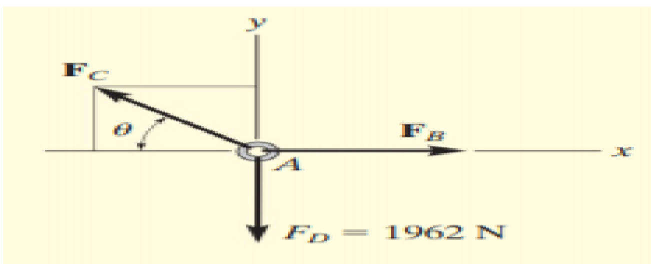
$F_s = 40 \text{ lb}$

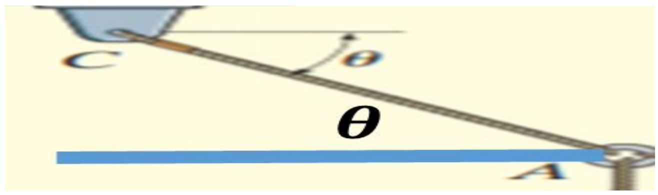
$F_s = kx$

$40 = 50(\sqrt{12} - l') \qquad l = \sqrt{12} - \frac{40}{50} = 2.66 \text{ ft}$

- The 200-kg crate is suspended using the ropes AB and AC. Each rope can withstand a <u>maximum force of 10 kN</u> before it breaks. If AB always remains horizontal, determine the smallest angle θ to which the crate can be suspended before one of the ropes breaks ?







- 1962=200*9.81 $< 10kN$ (<u>Safe</u>)

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -F_C \cos\theta + F_B = 0; \;\; F_C = \frac{F_B}{\cos\theta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_C \sin\theta - 1962 \text{ N} = 0$$

- F_c= 10kN

- هي معلومة في السؤال بأن أقصى حمل ل الحبل هو 10 كيلو نيوتن

$$F_C \sin\theta - 1962 \text{ N} = 0$$

$$[10(10^3)\text{N}]\sin\theta - 1962\text{ N} = 0$$

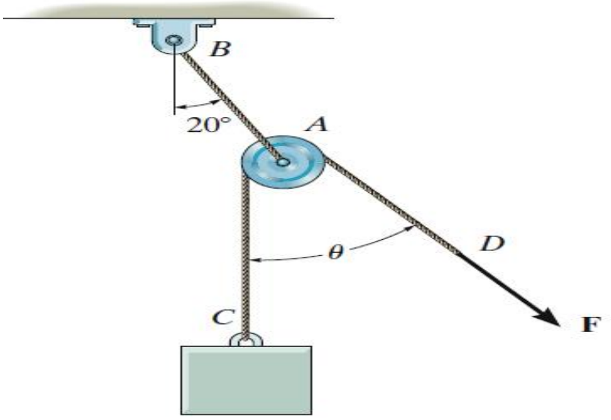
$$\theta = \sin^{-1}(0.1962) = 11.31^\circ = 11.3^\circ$$

$$F_C = \frac{F_B}{\cos\theta}$$

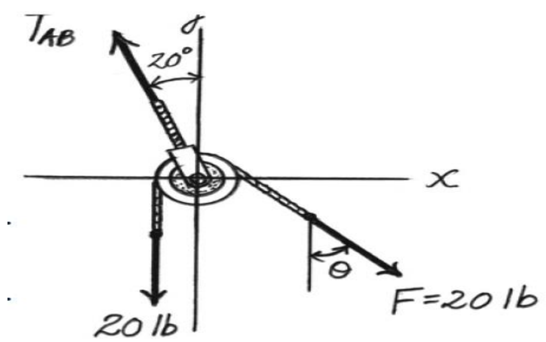
$$10(10^3)\text{ N} = \frac{F_B}{\cos 11.31^\circ}$$

$$F_B = 9.81\text{ kN}$$

- **Prop3.11- The block has a weight of 20 lb and is being hoisted at uniform velocity. Determine the angle θ for equilibrium and the force in cord *AB* ?**



- **Pully(الزنبرك) : هي عجلة يكون من طرفها حبلين والمميز فيها أن قوة الشد في الحبلين متساويتين**



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad 20\sin\theta - T_{AB}\sin 20^\circ = 0$$

$$T_{AB} = \frac{20\sin\theta}{\sin 20^\circ}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad T_{AB}\cos 20^\circ - 20\cos\theta - 20 = 0$$

Realizing that $\sin(\theta - 20^\circ) = \sin\theta\cos 20^\circ - \cos\theta\sin 20^\circ$, then

$$\sin(\theta - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\theta - 20^\circ = 20^\circ$$

$$\theta = 40^\circ$$

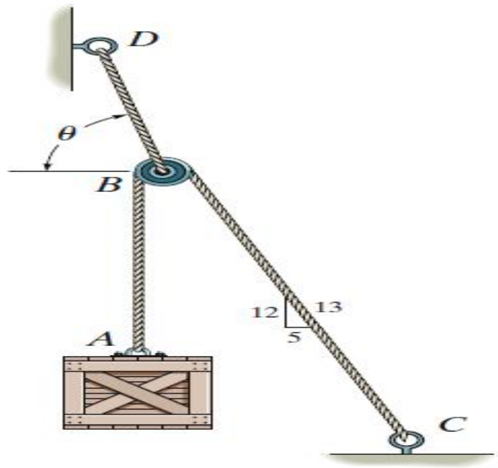
$$\frac{20\sin\theta}{\sin 20^\circ}\cos 20^\circ - 20\cos\theta = 20$$

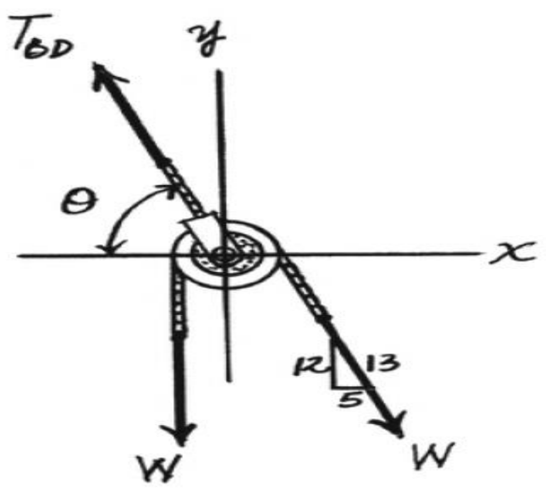
$$\sin\theta\cos 20^\circ - \cos\theta\sin 20^\circ = \sin 20^\circ$$

$$T_{AB} = \frac{20\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 37.59\text{ lb} = 37.6\text{ lb}$$

السؤال السابق صعب ونظام معادلاته معقد وضعته من باب التقوية فقط

- **Prop3-8 . The cords *ABC* and *BD* can each support <u>a maximum load</u> of 100 lb. Determine the <u>maximum</u> weight of the crate, and the angle θ for equilibrium ?**





$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad W\left(\frac{5}{13}\right) - 100\cos\theta = 0$$

$$100\cos\theta = \frac{5W}{13}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 100\sin\theta - W - W\left(\frac{12}{13}\right) = 0$$

$$100\sin\theta = \frac{25}{13}W$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 5$$

Realizing that $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$,

$$\tan\theta = 5$$

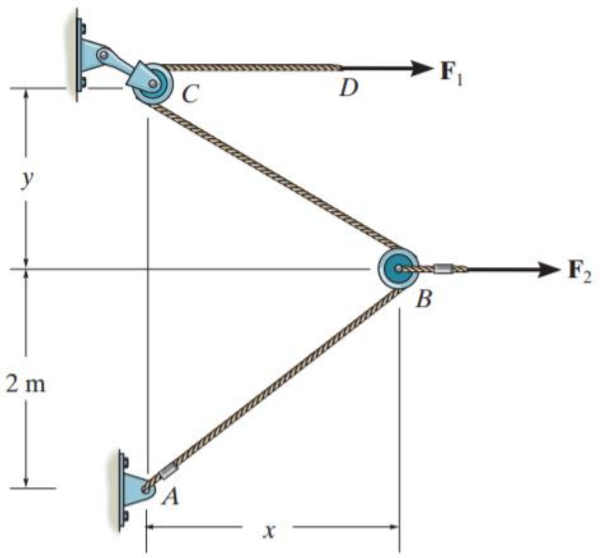
$$\theta = 78.69° = 78.7°$$

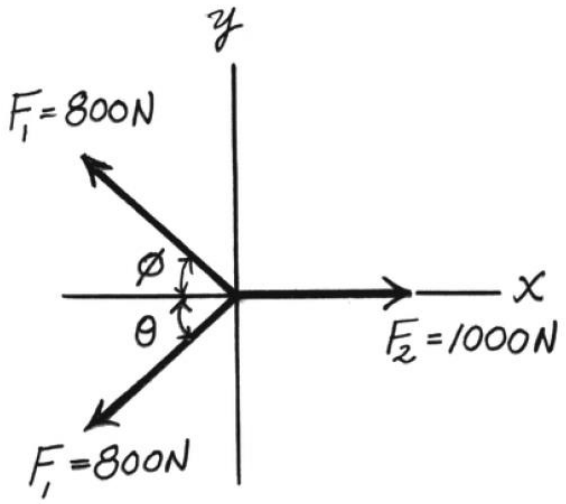
$$100\cos 78.69° = \frac{5}{13}W$$

$$W = 50.99 \text{ lb} = 51.0 \text{ lb} < 100 \text{ lb} \quad \textbf{(O.K)}$$

القوة عوضناها 100 لأن نريد حساب أقصى وزن لذلك نعوض أقصى لود (حمل)

- **Prop3-24 . Determine the distances x and y for equilibrium if F1 = 800 N and F2 = 1000 N ?**



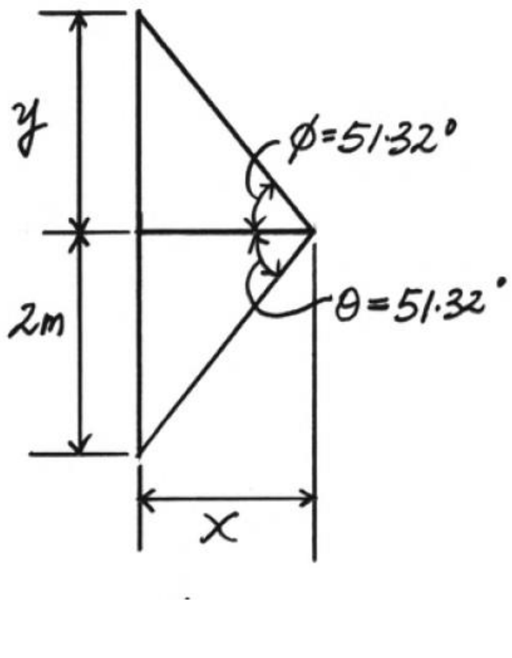


$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 800\sin\phi - 800\sin\theta = 0$$

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad 1000 - 2[800\cos\theta] = 0$$

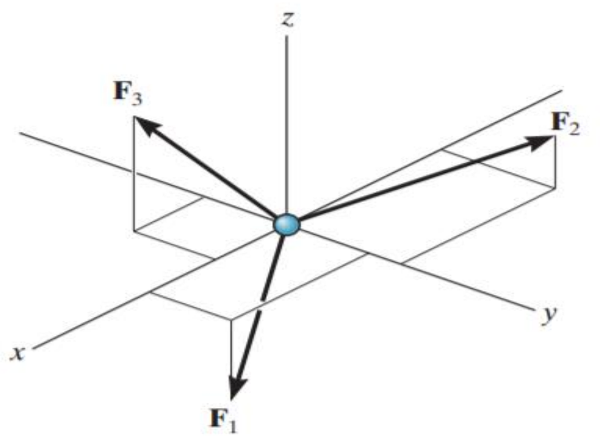
على فرض أن الشكل متماثل

$$y = 2 \text{ m}$$



$$\frac{2}{x} = \tan 51.32°; \qquad x = 1.601 \text{ m} = 1.60 \text{ m}$$

- Three- Dimensional Force (3D)
- In the case of a three-dimensional force system, we can resolve the forces into their respective i, j, k components .
- في النظام ثلاثي الأبعاد علينا تحليل نظام القوى وتحليلها إلى مركباتها .



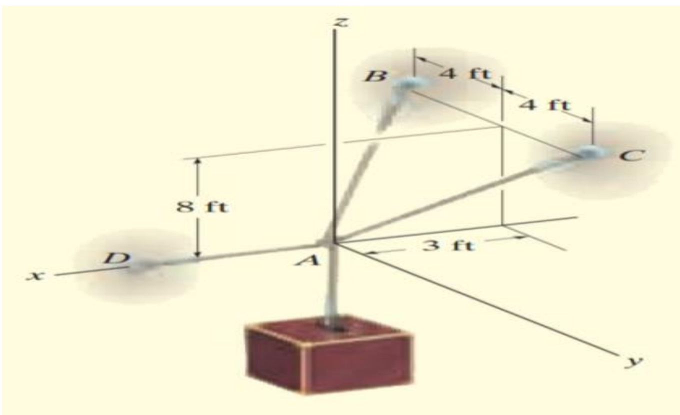
i: دلالة على محور السيني

j: دلالة على محور الصادي

k: دلالة على محور الزيد

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

- **Example:** Determine the force in each cable used to support the 40-lb crate ?



الخطوة الأولى : حدد إحداثيات النقاط ولكي لا تكون في شك , لا يشرط أن تكون كل الإحداثيات لها قيم فقد يكون قيم فقط لها إحداثي سيني وصادي فقط وهكذا ..

من باب التذكير إن كانت المسافة على امتداد المحور فتكون سالبة .

$C(-3\text{ ft}, 4\text{ ft}, 8\text{ ft})$ $\qquad$ $B(-3\text{ ft}, -4\text{ ft}, 8\text{ ft})$

منطبقه على نقطة الأصل A(0,0,0)

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$

$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$ لأنها منطبقه على محور السيني الموجب

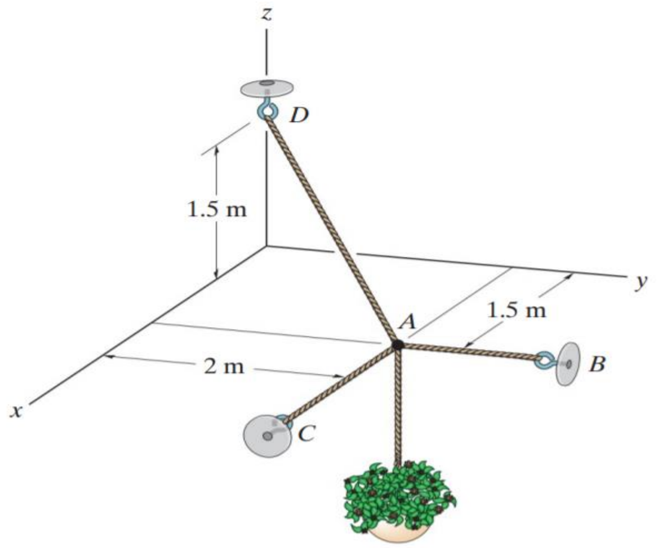
$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}$ lb لإنها منطبقة على محور الزيد السالب

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = 0$$
$$-0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$-0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (3)$$

$$F_B = F_C = 23.6\text{ lb}$$
$$F_D = 15.0\text{ lb}$$

- **<u>Prop3-43:</u> The three cables are used to support the 40-kg flowerpot. Determine the <u>force developed in each cable</u> for equilibrium ?**



SOL :

A(1.5,2,0) D(0,0,1.5)

$u_{AD}=$

$$\left\{\frac{-1.5}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}i-\frac{2}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}j+\frac{1.5}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}k\right\}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad F_{AD}\left(\frac{1.5}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}\right) - 40(9.81) = 0$$

$$F_{AD} = 762.69\text{ N} = 763\text{ N}$$

Using this result,

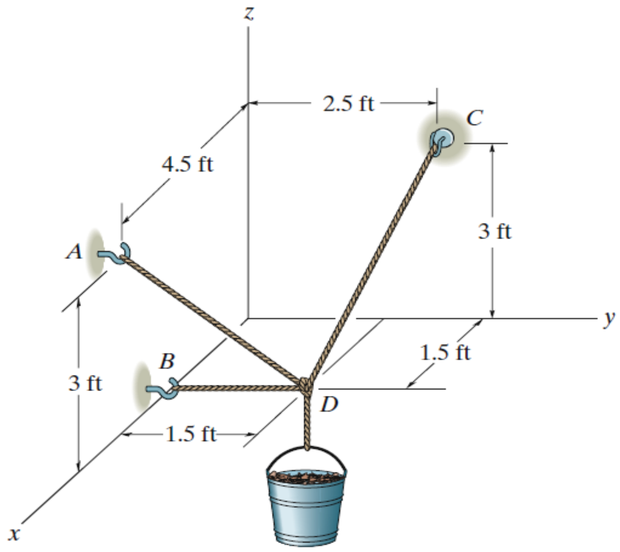
$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{AC} - 762.69\left(\frac{1.5}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}\right) = 0$$

$$F_{AC} = 392.4\text{ N} = 392\text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad F_{AB} - 762.69\left(\frac{2}{\sqrt{1.5^2+2^2+1.5^2}}\right) = 0$$

$$F_{AB} = 523.2\text{ N} = 523\text{ N}$$

- **<u>Prop3-45:</u> If the bucket and its contents have a total weight of 20 lb , Determine the <u>force in the supporting cables</u> *DA, DB* , and *DC* ?**



A(4.5,0,3) C(0,2.5,3) D(1.5,1.5,0)

$$\mathbf{u}_{DA} = \{\frac{3}{4.5}\mathbf{i} - \frac{1.5}{4.5}\mathbf{j} + \frac{3}{4.5}\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{u}_{DC} = \{-\frac{1.5}{3.5}\mathbf{i} + \frac{1}{3.5}\mathbf{j} + \frac{3}{3.5}\mathbf{k}\}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad \frac{3}{4.5}F_{DA} - \frac{1.5}{3.5}F_{DC} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -\frac{1.5}{4.5}F_{DA} - F_{DB} + \frac{1}{3.5}F_{DC} = 0$$

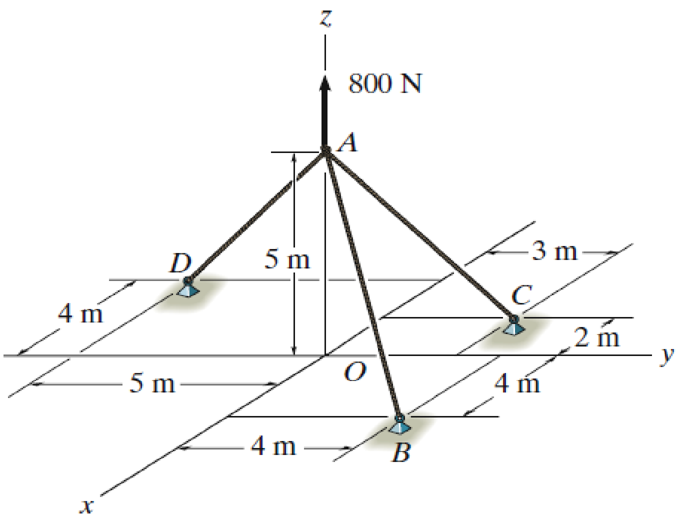
$$\Sigma F_z = 0; \quad \frac{3}{4.5}F_{DA} + \frac{3}{3.5}F_{DC} - 20 = 0$$

$$F_{DA} = 10.0\text{ lb}$$

$$F_{DB} = 1.11\text{ lb}$$

$$F_{DC} = 15.6\text{ lb}$$

- **Prop3-61: Determine the tension in each cable for equilibrium ?**



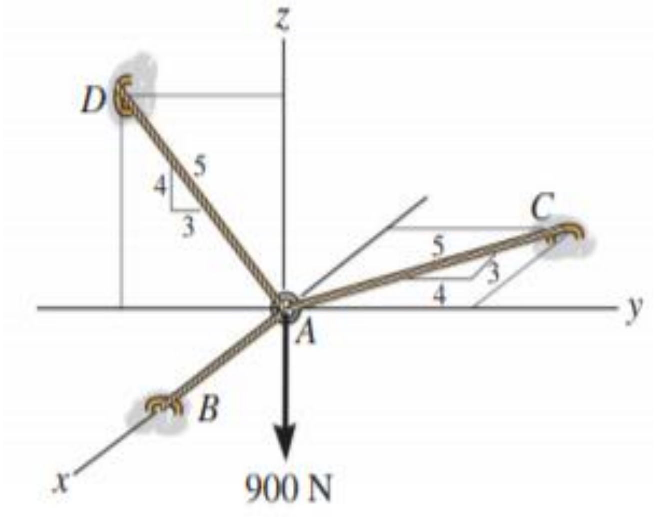
A(0,0,5) B(4,4,0) C(-2,3,0) D(4,-5,0)

$$u_{AB}=\left\{\frac{4}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}}i+\frac{4}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}}j-\frac{5}{\sqrt{4^2+4^2+5^2}}k\right\}$$
$$u_{AD}=\left\{\frac{4}{\sqrt{4^2+5^2+5^2}}i-\frac{5}{\sqrt{4^2+5^2+5^2}}j-\frac{5}{\sqrt{4^2+5^2+5^2}}k\right\}$$
$$u_{AC}=\left\{\frac{-2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}i-\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}j+\frac{1.5}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}k\right\}$$

$$\Sigma F_x = 0;\ F_{AB}\left(\frac{4}{\sqrt{57}}\right) - F_{AC}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right) - F_{AD}\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right) = 0$$
$$\Sigma F_y = 0;\ F_{AB}\left(\frac{4}{\sqrt{57}}\right) + F_{AC}\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right) - F_{AD}\left(\frac{5}{\sqrt{66}}\right) = 0$$
$$\Sigma F_z = 0;\ -F_{AB}\left(\frac{5}{\sqrt{57}}\right) - F_{AC}\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right) - F_{AD}\left(\frac{5}{\sqrt{66}}\right) + 800 = 0$$

$$F_{AC} = 85.77\ \text{N} = 85.8\ \text{N}$$
$$F_{AB} = 577.73\ \text{N} = 578\ \text{N}$$
$$F_{AD} = 565.15\ \text{N} = 565\ \text{N}$$

- **F3-8. Determine the tension developed in cables AB, AC, and AD ?**



F_{AC}= $\frac{4}{5}j-\frac{3}{5}i$

F_{AB}: له مركبة سينية فقط لأنه منطبق على محور السيني الموجب

F_{AD}= $\frac{-3}{5}j+\frac{4}{5}k$

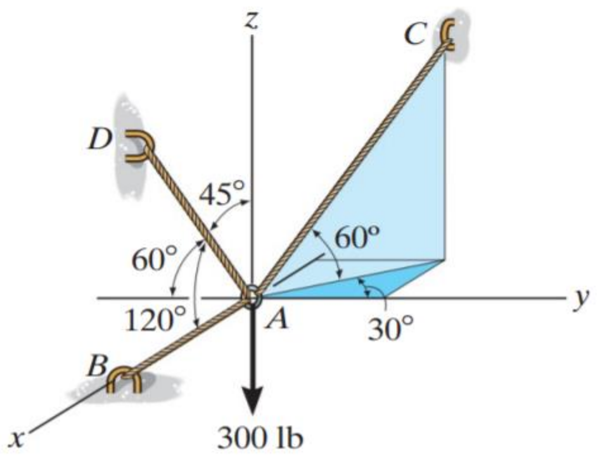
قلنا مسبقا ونكرر لا يشترط وجود لكل متجه ثلاثة مركبات ولمعرفة ذلك نرى المتجه أين محصور أو أين يقع بين أي محاور .

$$\sum F_z = 0 \rightarrow F_{AD}\left(\frac{4}{5}\right) - 900 = 0$$
$$F_{AD} = 1.13\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AC}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AD}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$
$$F_{AC} = 844\ \text{N}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB} - F_{AC}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$
$$F_{AB} = 506\ \text{N}$$

- **Prop3-10: Determine the tension developed in cables AB, AC, and AD ?**



- **SOL :**

- $F_{AD} = F_{AD}\cos(120)\boldsymbol{i} - F_{AD}\cos(60)\boldsymbol{j} + F_{AD}\cos(45)\boldsymbol{k}$

- **F_{AB} : F_{AB} i (منطبقه على المحور السيني الموجب)**

- **F_{AC} =**

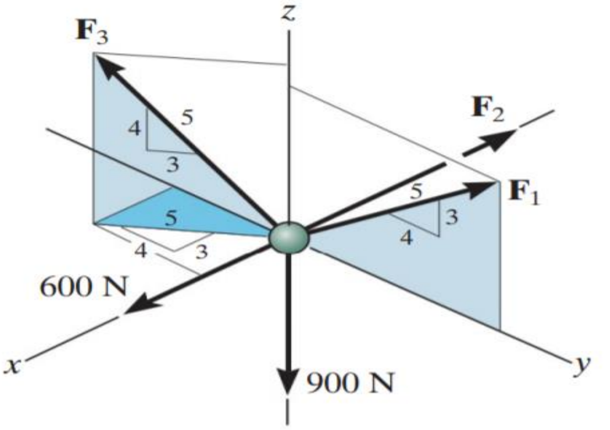
  $F_Z = F_{AC}\sin(60°)\boldsymbol{k}$

  $F_X = -F_{AC}\cos(60°)\sin(30°)\,\boldsymbol{i}$

  $F_Y = F_{AC}\cos(60°)\cos(30°)\,\boldsymbol{j}$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow .433F_{AC} - .5F_{AD} = 0$$
$$\sum F_z = 0 \rightarrow .866F_{AC} + .707F_{AD} - 300 = 0$$
$$F_{AC} = 203\text{ lb}$$
$$F_{AD} = 176\text{ lb}$$
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB} - .25F_{AC} - .5F_{AD} = 0$$
$$F_{AB} = 139\text{ lb}$$

- **F3-7. Determine the magnitude of forces F1, F2, F3, so that the particle is held in equilibrium.**



SOL :

$F_3 = F_3 * \frac{4}{5}\boldsymbol{k} + F_3 * \frac{3}{5} * \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + F3 * \frac{3}{5} * \frac{-4}{5}\boldsymbol{j}$

$F_1 = F_1 * \frac{3}{5}\boldsymbol{k} + \; + F1 * \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

F_2 : منطبقه على المحور السيني السالب

$$\sum F_x = 0 \rightarrow (\frac{3}{5})F_3(\frac{3}{5}) + 600 - F_2 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow (\frac{4}{5})F_1 - (\frac{3}{5})F_3(\frac{4}{5}) = 0$$
$$\sum F_z = 0 \rightarrow (\frac{4}{5})F_3 + (\frac{3}{5})F_1 - 900 = 0$$
$$F_1 = 466\text{ N}$$
$$F_2 = 879\text{ N}$$
$$F_3 = 776\text{ N}$$

4 Force System Resultants 121

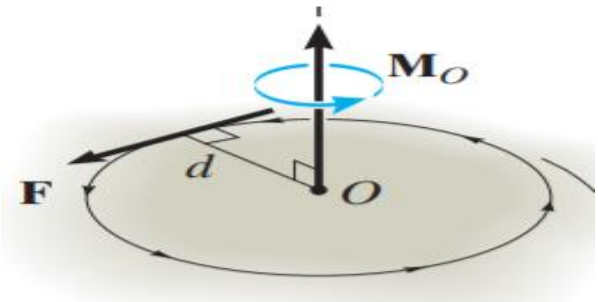
- **When a Force is applied on a rigid body about a point O is defined as the product of force and perpendicular distance of the point from the line of action is called a <u>Moment</u> .**

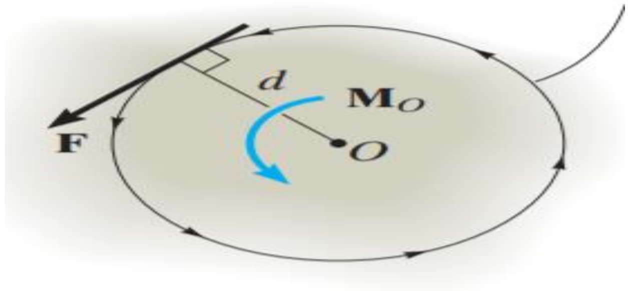
- **عند تطبيق القوة على جسم جاسئ حول نقطة محددة ف يكون عزم الدوران هو عبارة عن القوة مضروبة بالمسافة العامودية من القوة أو إمتداد خط عمل القوة إلى النقطة المطلوبة .**

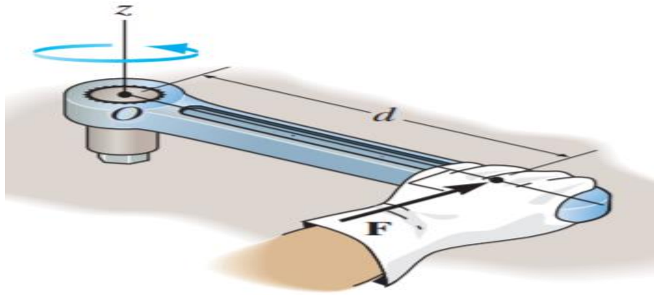
- **When a force is applied to a body it will produce a tendency for the body to rotate about a point that is <u>not on the line of action of the force</u>. This tendency to rotate is called a <u>torque</u> .**

- **عند تطبيق القوة على جسم فإنه سيحدث دوران للجسم لكن ليس على إمتداد خط عمل القوة**

-







$$M_O = Fd$$

d : <u>Moment arm</u> or perpendicular distance from the axis at point O to the line of action of the force.

<u>إتجاه العزم :</u>

<u>ضع يدك (الأصابع) بإتجاه القوة</u>

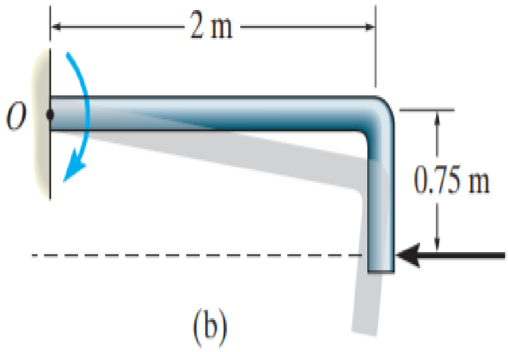
<u>إن كان بطن اليد محتوى(بإتجاه) النقطة فيكون موجب وخلاف ذلك سالب</u>

- **Resultant Moment :**

أكثر من عزم دوران مؤثرعلى نفس النقطة فإننا نقوم بحساب كل عزم مع إشارته ومن ثم الحصول على الإشارة النهائية ل العزم .

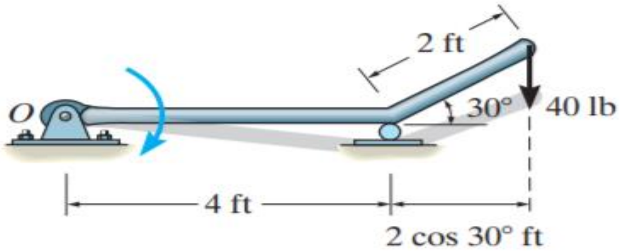
دائما إفرض الإتجاه الذي يكون عكس عقارب الساعه هو الموجب وخلاف ذلك صحيح لكن يفضل فعل عكس عقارب الساعه موجب وفي حال كان الجواب سالب دلالة على أن هذا العزم يؤثر مع عقارب الساعه

EXAMPLE :



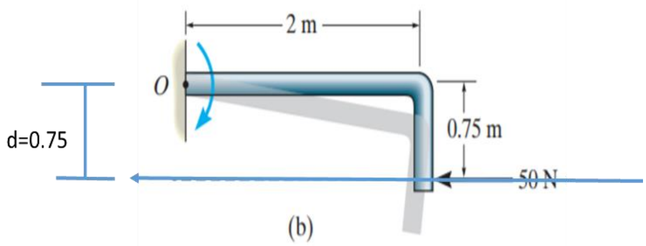
$$M_O = (50\ \text{N})(0.75\ \text{m}) = 37.5\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

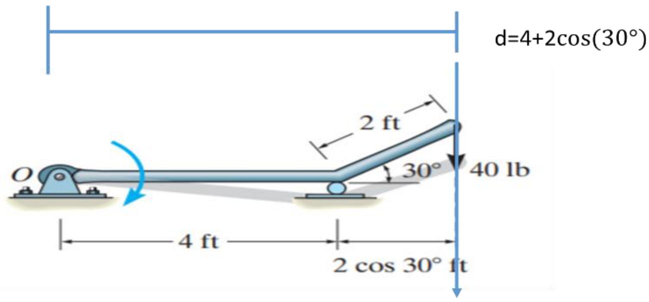
EXAMPLE :

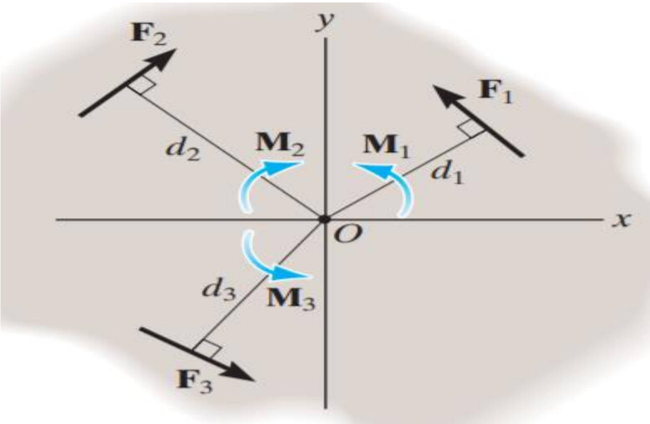


$$M_O = (40\ \text{lb})(4\ \text{ft} + 2\cos 30°\ \text{ft}) = 229\ \text{lb}\cdot\text{ft} \circlearrowright$$

توضيح ل موضوع المسافة

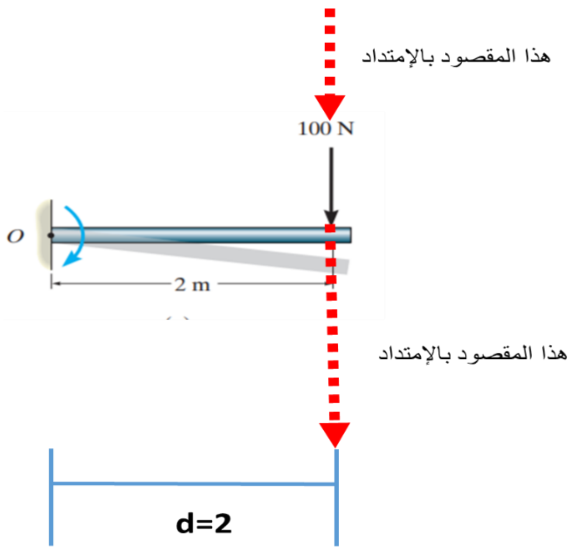






$$\circlearrowleft +(M_R)_O = \sum Fd;\qquad (M_R)_O = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

- Counterclockwise or out of the page or moment sum is a positive scalar or عكس عقارب الساعه
- Clockwise or into the page or moment sum is negative scalar or مع عقارب الساعه
- Example4.1 : Determine the moment of the force about point O ?



SOL :

$$\boxed{M_O = Fd}$$

$$M_O = (100\ \text{N})(2\ \text{m}) = 200\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

- ❑ نضع أصابعنا مع القوة وإذا كان بطن الكف يحتوي النقطة المطلوبة فتكون الإشارة موجبة وخلاف ذلك سالب
- ❑ إفرض عكس عقارب الساعه هو الموجب

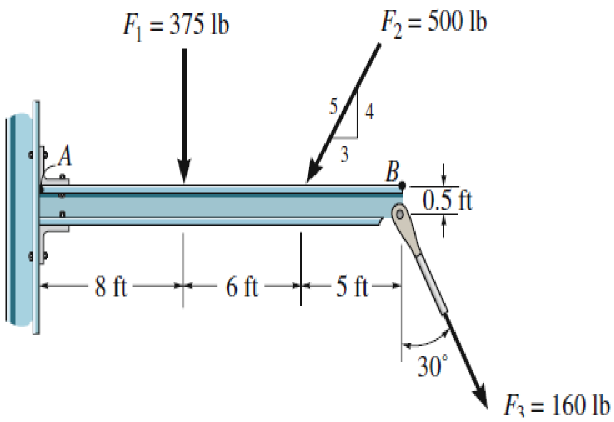
$$\circlearrowleft + (M_R)_o = \Sigma Fd;$$

$$(M_R)_o = -50\text{ N}(2\text{ m}) + 60\text{ N}(0) + 20\text{ N}(3\sin 30^\circ\text{ m})$$

$$-40\text{ N}(4\text{ m} + 3\cos 30^\circ\text{ m})$$

$$(M_R)_o = -334\text{ N}\cdot\text{m} = 334\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

- ❑ **Prop4.4: Determine the moment about point *A* of each of the three**



$$\circlearrowleft + (M_{F_1})_A = -375(8)$$

$$= -3000\text{ lb}\cdot\text{ft} = 3.00\text{ kip}\cdot\text{ft}\ (Clockwise)$$

- ❑ ضع أصابعك بإتجاه القوة , سيكون بطن الكف لا يحتوى النقطة لذلك تكون الإشارة سالب

$$\circlearrowleft + (M_{F_2})_A = -500\left(\frac{4}{5}\right)(14)$$

$$= -5600\text{ lb}\cdot\text{ft} = 5.60\text{ kip}\cdot\text{ft}\ (Clockwise)$$

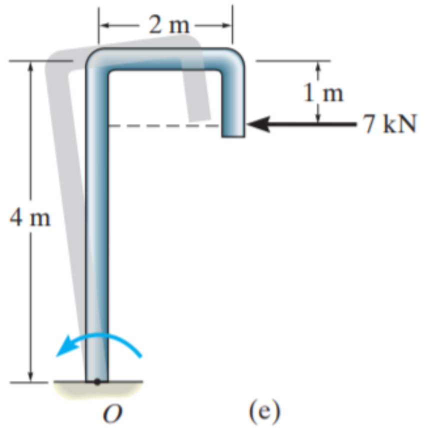
- ❑ المركبة التي تمر بالنقطة ليس لها عزم دوران لان المسافة تكون صفر لذلك نهتم فقط بالمركبة الصادية وتكون الإشارة سالبة أيضا .

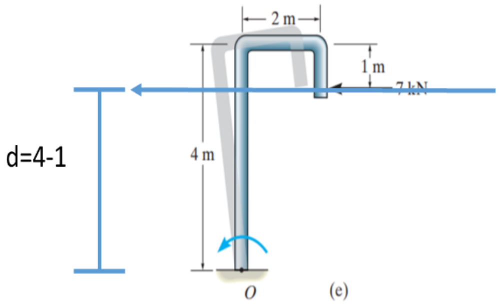
$$\circlearrowleft + (M_{F_3})_A = -160(\cos 30^\circ)(19) + 160\sin 30^\circ(0.5)$$

$$= -2593\text{ lb}\cdot\text{ft} = 2.59\text{ kip}\cdot\text{ft}\ (Clockwise)$$

- ❑
- ❑ هنا سنقوم بتحليل المركبتين لأن المركبتين يوجد مسافة على خلاف الفرع السابق

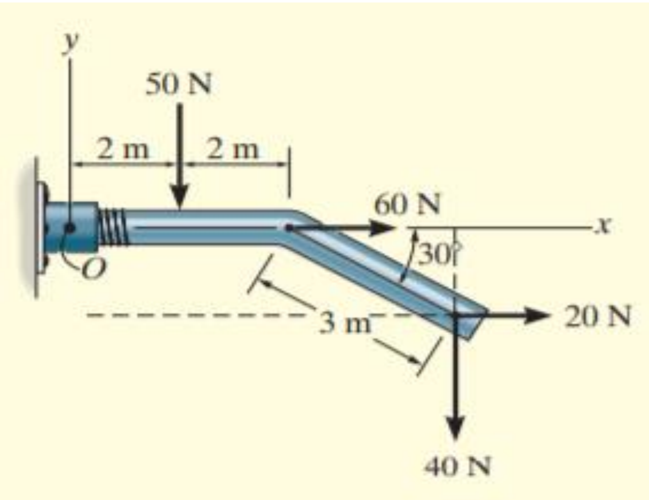
<u>EXAMPLE :</u>



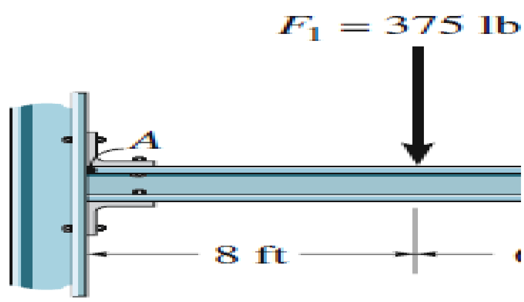


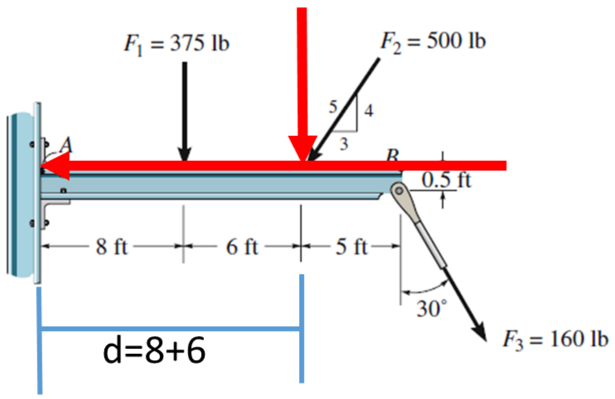
$$M_O = (7\text{ kN})(4\text{ m} - 1\text{ m}) = 21.0\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft$$

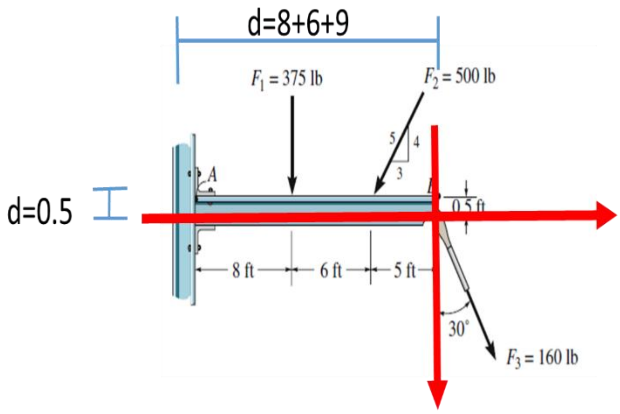
- ❑ **<u>Example4.2</u>**



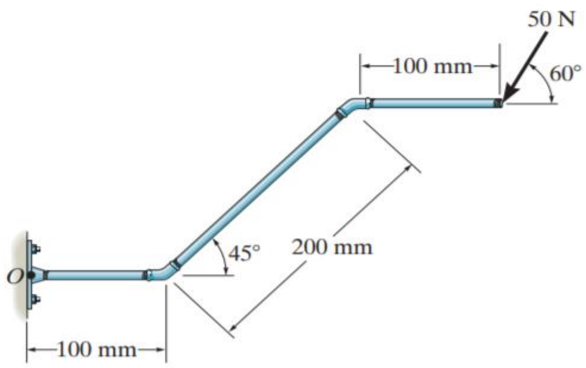
- ❑ القوة التي تنطبق على المحور الذي يوجد به النقطة المطلوبة يكون العزم صفر لأنه <u>لا يوجد مسافة</u>
- ❑ نحل قوة قوة , وكل قوة تحتفظ بإشارتها ومن ثم نقوم بالجمع الجبري وتخرج <u>الإشارة النهائية</u>

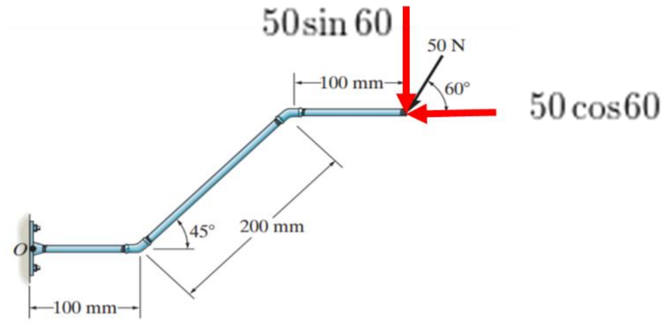






- **F4-4. Determine the moment of the force about point O. Neglect the thickness of the member ?**





نحلل 200 إلى مركبتين , كما نحلل القوة .

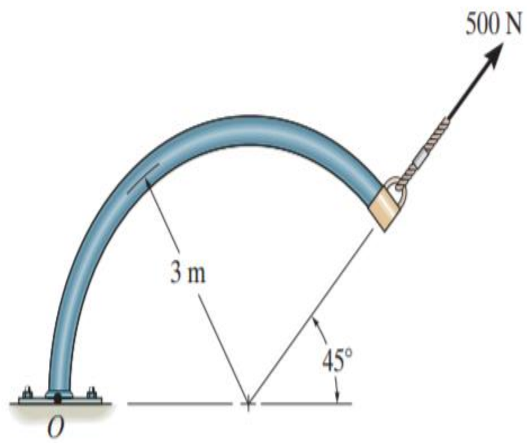
$$F_x = 50\cos 60 = 25\text{ N}$$
$$F_y = 50\sin 60 = 43.3\text{ N}$$

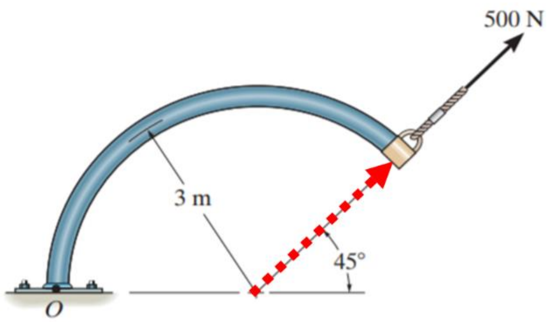
$$d_x = 100(10^{-3}) + (200(10^{-3})\cos 45 + 100(10^{-3})) = .3414\text{ m}$$
$$d_y = (200(10^{-3}))\sin 45 = .1414\text{ m}$$

<u>فقط</u> قمنا بتحويل الوحدات لذلك ضربنا ب 0.001

$$M_O = F_y d_x + F_x d_y$$
$$M_O = 43.3\text{N}(.3414\text{m}) - 25\text{N}(.1414\text{m}) = 11.2\text{ N}\cdot\text{m}$$

- **F4-6 Determine the moment of the force about point O ?**

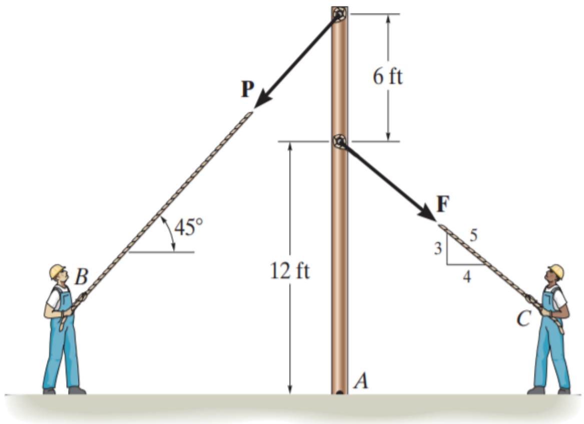


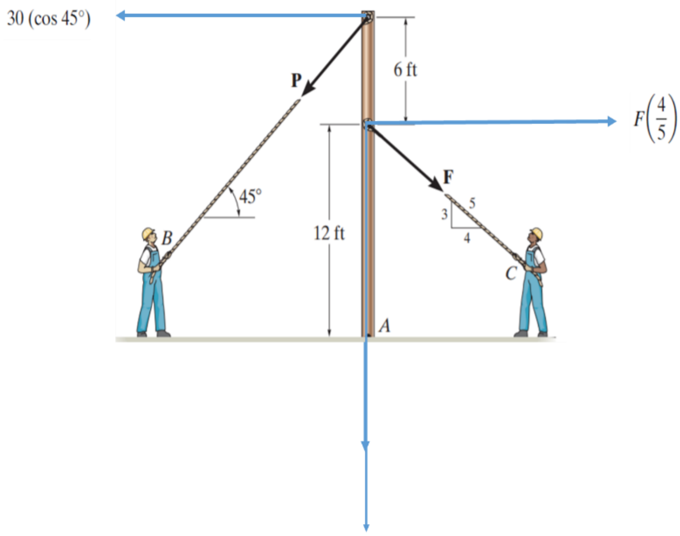


$$\overset{\curvearrowleft}{M_O} = 500\cdot 3\cos 45^\circ = 1060\ \mathrm{N\cdot m}$$

<u>الفكرة هنا</u> فقط أنك قادر على أنك تتعامل مع إمتداد القوة

- ❑ **Prop4-16. If the man at B exerts a force of P = 30 lb on his rope, determine the magnitude of the force F the man at C must exert to prevent the pole from rotating, i.e., <u>so the resultant moment about A of both forces is zero ?</u>**





- ❑ **القوى التي تمر بالنقطة المطلوبة لا تشكل عزم**
- ❑ **نحسب العزم عند النقطة المطلوبة ومحصلة العزم هي صفر وهي معطى في السؤال**

$$\circlearrowleft + \qquad 30\,(\cos 45^\circ)(18) = F\left(\frac{4}{5}\right)(12) = 0$$

$$F = 39.8\ \mathrm{lb}$$

- ❑ **The cross product(الضرب الإتجاهي) of two vectors A and B yields the vector C also it is written :**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

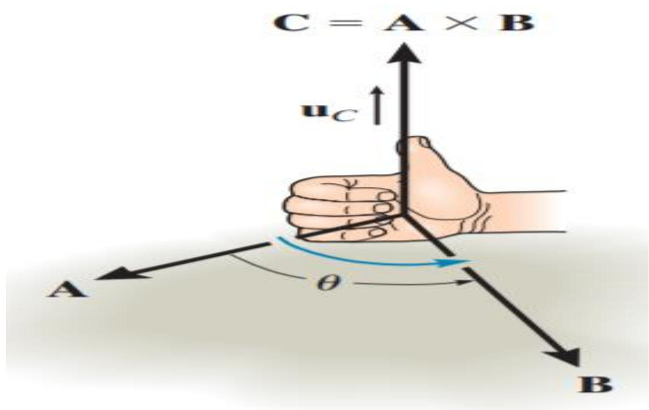
- ❑ **The magnitude(المقدار) of C is defined as the product of the magnitudes of A and B and the sine of the angle θ between their tails .**

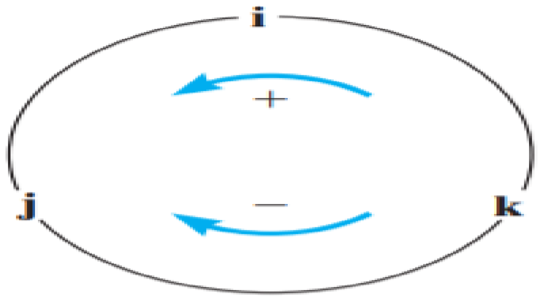
$$C = AB\sin\theta.$$

$$(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

- ❑ **Direction(الإتجاه) : Vector C has a direction that is perpendicular to the plane .**

- ❑ عند إجراء عملية الضرب فإن الناتج يكون عامودي على المسطح كما هو موضح في الصورة .





$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$

$$\begin{array}{cccc} & + & - & + \\ \mathbf{A}\times\mathbf{B}= & \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}} \end{array}$$

وضع الإشارات فوق متجهات الوحدة ثابت ولا يتغير

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

أريد متجه الوحدة الخاص بالمحور السيني , أنزل خط أفقي وعامودي شاطبا كل ما تحته

$$= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$$

أريد متجه الوحدة الخاص بالمحور الصادي , أنزل خط أفقي وعامودي شاطبا كل ما تحته

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

تبقى لك الآن أربعة عناصر فقط نقوم بعملية الضرب التبادلي

$$= -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$$

أريد متجه الوحدة الخاص بالمحور الزيد , أنزل خط أفقي وعامودي شاطبا كل ما تحته

خصائص الضرب الإتجاهي :

- The commutative law is *not* valid; i.e., $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\times\mathbf{A}$. Rather,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

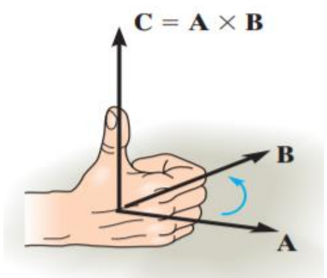
Same magnitude but acts in the opposite direction

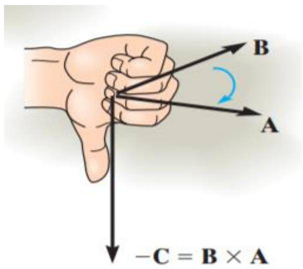
If the cross product is multiplied by a scalar a, it obeys the associative law;

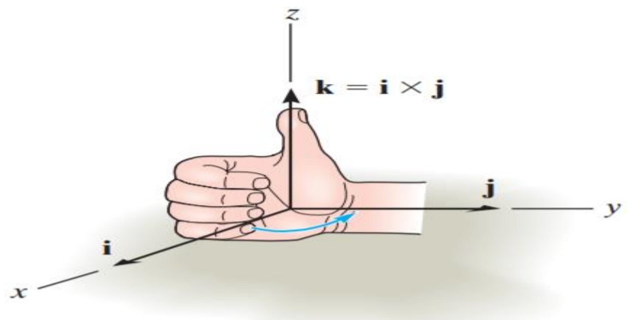
$$a(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(a\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(a\mathbf{B})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})a$$

The vector cross product also obeys the distributive law of addition,

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{D})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{D})$$







$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

الصيغة النهائية أي قمنا بتجميع ما خرج من نتائج الضرب الإتجاهي

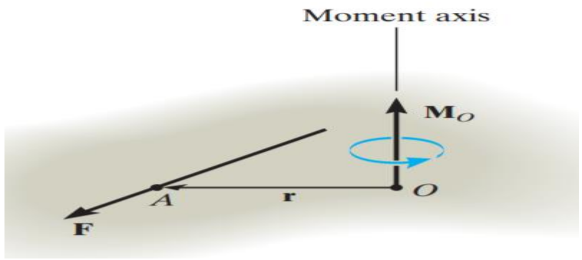
$$A \times B = (A_yB_z - A_zB_y)i - (A_xB_z - A_zB_x)j + (A_xB_y - A_yB_x)k$$

- ❑ The moment of a force F about point O, or actually about the moment axis passing through O and perpendicular to the plane containing O and F , can be expressed using the vector cross product .

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- ❑ Here r represents a position vector directed from O to any point on the line of action of F.

- ❑ تمثل متجه الموقع المتوجه من <u>النقطة المطلوبة</u> <u>إلى أي نقطة على محور إمتداد القوة</u> وسيكون نفس المقدار ومهم جدا جدا أن تعرف كيف تجده .



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

r_x, r_y, r_z represent the x, y, z components of the position vector drawn from point O to *any point* on the line of action of the force

F_x, F_y, F_z represent the x, y, z components of the force vector

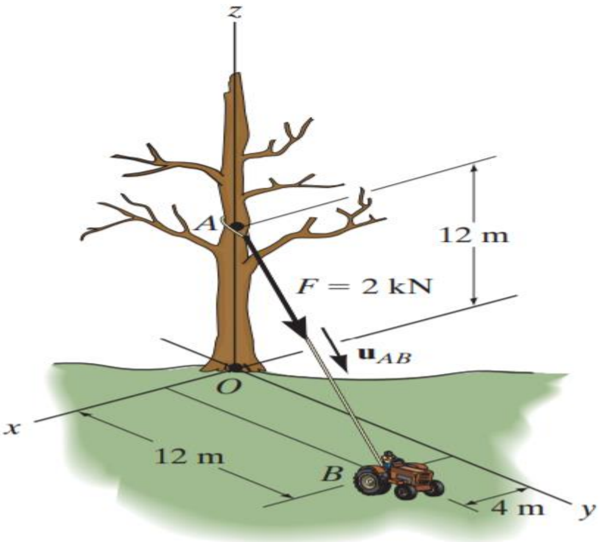
الناتج النهائي بعد إجراء عملية الضرب الإتجاهي

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k}$$

في حال وجود أكثر من قوة

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

- **Example.Determine the moment produced by the force F about <u>point O</u>. Express the result as a <u>Cartesian vector</u> ?**



- **<u>الخطوة الأولى :</u> نجد إحداثيات النقاط التي تمر بها القوة ومن ثم حساب متجه الموقع**

- **A(0,0,12) B(4,12,0)**

$$\mathbf{r}_A = \{12\mathbf{k}\}\text{ m and } \mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\}\text{ m}$$

- **<u>الخطوة الثانية :</u> حساب متجه الوحده وضربه بالقوة المعطاه لكي نحصل على القوة بالصيغة الكارتيزن**

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 2\text{ kN}\left[\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(4\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2 + (-12\text{ m})^2}}\right]$$

$$= \{0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

- **<u>الخطوة الثالثة :</u> <u>ضرب متجه الموقع ب القوة وكلاهم أن يكون بالصيغة الكارتيزين .</u>**

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j} + [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$$

$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$

r_A: متجه الموقع الذي حسبناه في البداية ونضع متجه الموقع من النقطة المطلوبة إلى أي نقططة على إمتداد خط عمل القوة .

F: إحداثي المحاور الثلاثة الخاص بالقوة الذي تم إيجادهم في الخطوة الثانية

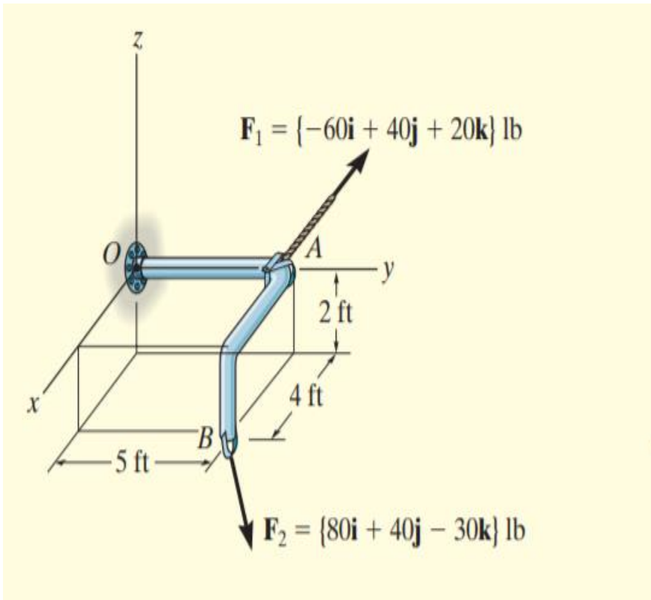
<u>ملاحظة :</u> من باب التأكيد أننا لو وضعنا بدل النقطة الأولى وضعنا النقطة الثانية لن يتغير شئ أبدا وسيكون نفس الجواب ولكن الفرق هو فقط سهولة الحساب

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$

$$= [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j} + [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$$

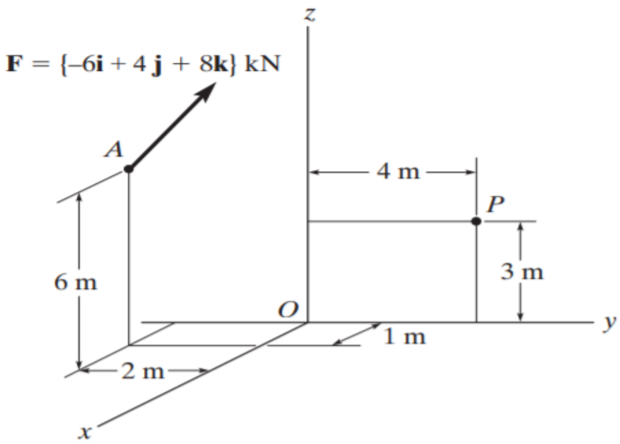
$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$

- **Example4.4 : Two forces act on the rod shown. Determine the <u>resultant moment</u> they create about the flange <u>at O</u>. Express the result as a Cartesian vector ?**



- **<u>الإختلاف واضح</u>, في السؤال السابق كانت لدينا قوة واحدة والأن لدينا قوتين وهنا القوة معطاه بالصيغة الكارتيزن .**

- **Prop4-28 Determine the moment of the force F about point P. Express the result as a Cartesian vector ?**



- الخطوة الأولى : نجد إحداثيات النقاط التي تمر بها القوة ومن ثم حساب متجه الموقع ولكن هنا يوجد إختلاف بسيط وهنا الفكرة في السؤالين السابقين كان مطلوب إيجاد العزم حول نقطة الأصل ولكن هنا مطلوب حول نقطة محددة .

$$A\,(1, -2, 6) \qquad P\,(0, 4, 3)$$

$$\mathbf{r}_{PA} = (1-0)\mathbf{i} + (-2-4)\mathbf{j} + (6-3)\mathbf{k}$$

$$= \{\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$M_P = \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -6 & 3 \\ -6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \{-60\mathbf{i} - 26\mathbf{j} - 32\mathbf{k}\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

الخطوة الأولى : نجد إحداثيات النقاط التي تمر بها القوة ومن ثم حساب متجه الموقع

A(0,5,0)　　B(4,5,-2)

$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\}\ \text{ft}$$

$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}\ \text{ft}$$

النقطة تقع على محور الصادي فقط للتوضيح :A

الخطوة الثانية : حساب متجه الوحده وضربه بالقوة المعطاه ولن نعملها لأن القوة معطاه بالصيغة الكارتيزين وخلاف ذلك نقوم بتلك الخطوة

الخطوة الثالثة : متجه الموقع ب القوة وكلاهم أن يكون بالصيغة الكارتيزين لكن هنا سنطبق القانون مرتين لوجود أكثر من قوة .

$$(M_R)_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

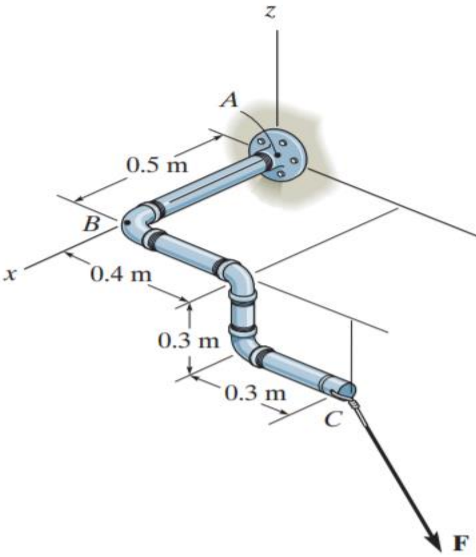
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$= [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - [0]\mathbf{j} + [0(40) - (5)(-60)]\mathbf{k}$$

$$+ [5(-30) - (-2)(40)]\mathbf{i} - [4(-30) - (-2)(80)]\mathbf{j} + [4(40) - 5(80)]\mathbf{k}$$

$$= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\}\ \text{lb}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

- **Prop4-33. The pipe assembly is subjected to the force of F = {600i + 800j - 500k} N. Determine the moment of this force about point B ?**



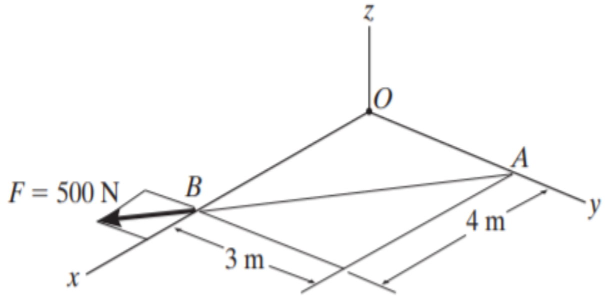
$B\ (0.5, 0, 0)$

$C\ (0.5, 0.7, -0.3)$

$$\mathbf{r}_{BC} = (0.5 - 0.5)\mathbf{i} + (0.7 - 0)\mathbf{j} + (-0.3 - 0)\mathbf{k}$$
$$= \{0.7\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.7 & -0.3 \\ 600 & 800 & -500 \end{vmatrix}$$
$$= \{-110\mathbf{i} - 180\mathbf{j} - 420\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

- **F4-10 Determine the moment of force F about point O. Express the result as a Cartesian vector ?**



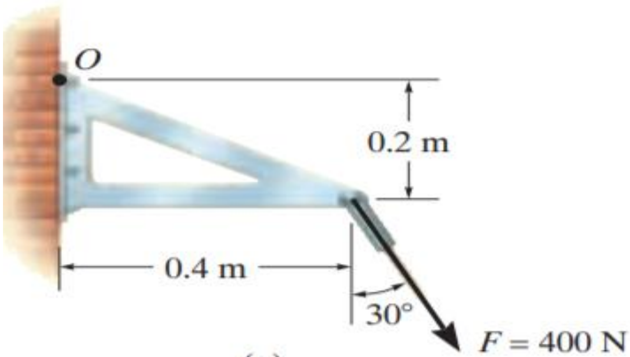
<u>الخطوة الأولى :</u> نجد إحداثيات النقاط التي تمر بها القوة ومن ثم حساب متجه الموقع ومن ثم متجه الوحده

<u>الخطوة الثانية :</u> حساب متجه الموقع وضربه بالقوة المعطاه

<u>الخطوة الثالثة :</u> أن نضرب متجه الموقع ب القوة وكلاهم أن يكون بالصيغة الكارتيزين .

$$F = Fu_{AB} = 500(\tfrac{4}{5}i - \tfrac{3}{5}j) = 400i - 300j$$
$$M_o = r_{OA} \times F = [3j] \times [400i - 300j]$$
$$= [-1200k]\ N.m$$

- **Example. Force F acts at the end of the angle bracket. Determine the moment of the force about point O ?**



(a)

الطريقة الأولى (الأسهل)

$$\circlearrowleft + M_O = 400 \sin 30^\circ\ \text{N}(0.2\ \text{m}) - 400 \cos 30^\circ\ \text{N}(0.4\ \text{m})$$
$$= -98.6\ \text{N}\cdot\text{m} = 98.6\ \text{N}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$$

$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

الطريقة الثانية

$$\mathbf{r} = \{0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\}\ \text{m}$$

$$\mathbf{F} = \{400 \sin 30°\mathbf{i} - 400 \cos 30°\mathbf{j}\}\ \text{N}$$

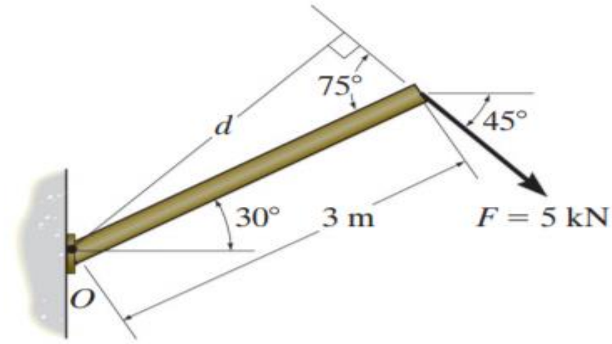
$$= \{200.0\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j}\}\ \text{N}$$

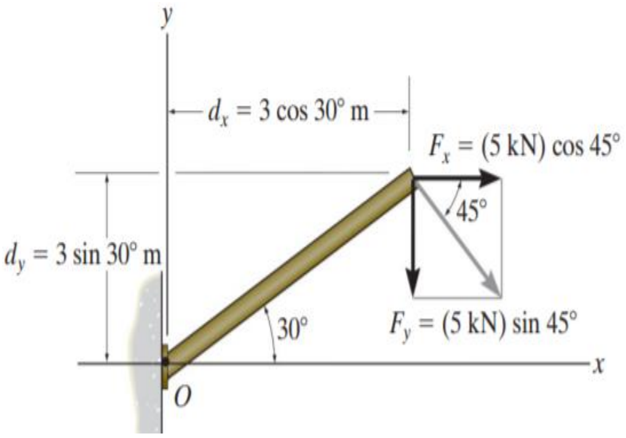
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200.0 & -346.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200.0)]\mathbf{k}$$

$$= \{-98.6\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

- **Example4.5 Determine the moment of the force in about point O ?**



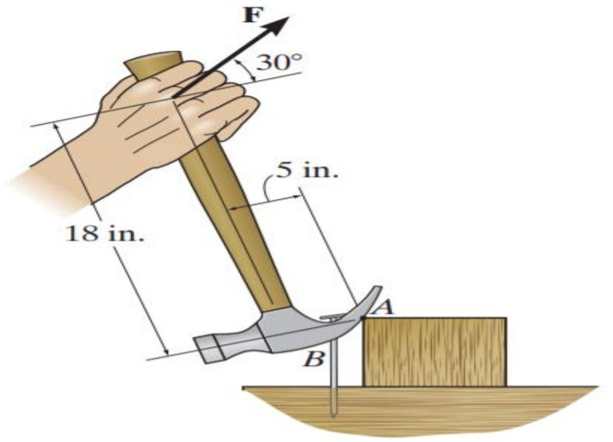


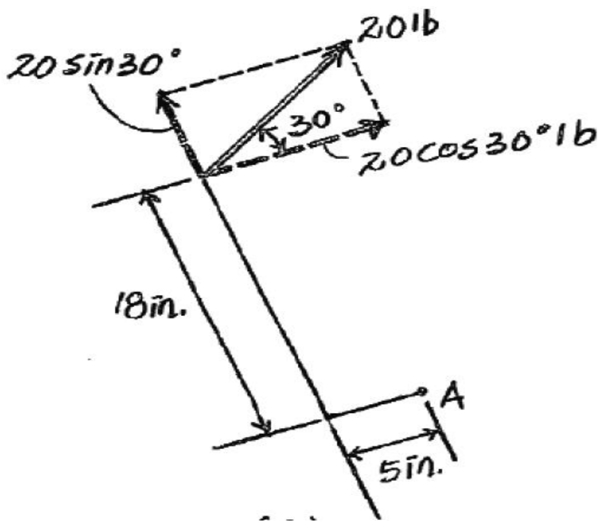
$$\circlearrowleft + M_O = -F_x d_y - F_y d_x$$

$$= -(5 \cos 45°\ \text{kN})(3 \sin 30°\ \text{m}) - (5 \sin 45°\ \text{kN})(3 \cos 30°\ \text{m})$$

$$= -14.5\ \text{kN}\cdot\text{m} = 14.5\ \text{kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

- **Prop 4–20. The handle of the hammer is subjected to the force of F = 20 lb. Determine the moment of this force <u>about the point A</u> ?**





$$\circlearrowleft + M_A = -20 \cos 30°(18) - 20 \sin 30°(5)$$

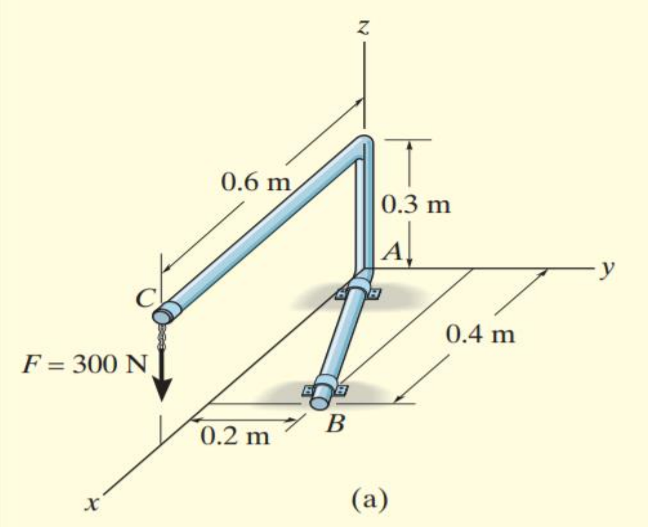
$$= -361.77\ \text{lb}\cdot\text{in} = 362\ \text{lb}\cdot\text{in}\ \ (\textit{Clockwise})$$

❖ Sometimes, the moment produced by a force about a specified axis must be determined

❖ الإختلاف هنا أريد حساب العزم حول محور محدد فقط وليس حول نقطة

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

❑ Example4.8 Determine the moment M_{AB} produced by the force F in which tends to rotate the rod about the AB axis ?



الخطوة الأولى : جد إحداثيات النقاط التي يمر فيها المحور المطلوب ومن ثم إيجاد متجه الموقع ومن ثم إيجاد مقدار متجه الوحده

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (0.2\text{ m})^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

الخطوة الثانية : نحسب متجه الموقع من أي نقطة على المحور المطلوب إلى أي نقطة على إمتداد القوة وحاول إستخدام نقطة سهلة لكي تسهل الحساب عليك

$$\mathbf{r}_D = \{0.6\mathbf{i}\}\text{ m}$$

يمكننا إستخدام غير هذا المتجه لكني قلت وأكرر من باب السهولة

d: المسافة بين النقطة الأصل التي تقع على المحور المطلوب والنقطة التي تقع على إمتداد القوة

الخطوة الثالثة : يجب أن تكون القوة بالصيغة الكارتيزن فتأكد منها .

$$\mathbf{F} = \{-300\mathbf{k}\}\text{ N}$$

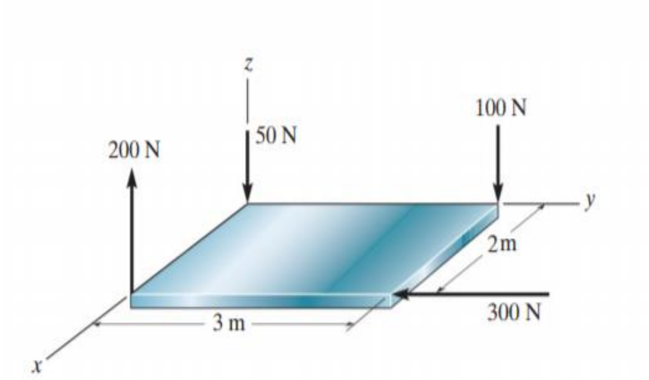
الخطوة الرابعه : طبق القانون الموجود في الأسفل .

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= 0.8944[0(-300) - 0(0)] - 0.4472[0.6(-300) - 0(0)] + 0[0.6(0) - 0(0)]$$

$$= 80.50\text{ N}\cdot\text{m}$$

- **P4-3. In each case, determine the resultant moment of the forces acting about the x, y, and z axes ?**



يوجد طريقتين لحل هذا السؤال وعن نفسي أفضل الطريقة التي قمنا بأخذها سابقا مع أن الطريقة الثانية أسرع لكن إحتمالية الخطأ فيها كبيرة

الخطوة الأولى : جدإحداثيات النقاط التي يمر فيها المحور المطلوب ومن ثم إيجاد متجه الموقع ومن ثم إيجاد مقدار متجه الوحده

$u_x : 1i + 0j + 0k$

$u_y : 0i + 1j + 0k$ **حفظ , دائما يكونوا هكذا .**

$u_z : 0i + 0j + 1k$

الخطوة الثانية : نحسب متجه الموقع من أي نقطة على المحور المطلوب إلى أي نقطة على إمتداد القوة وحاول إستخدام نقطة سهلة لكي تسهل الحساب عليك

الخطوة الثالثة : يجب أن تكون القوة بالصيغة الكارتيزن وبما إننا نتعامل مع قوى موازية إذن فهي دائما بصيغة الكارتيزن

الخطوة الرابعه : طبق القانون الموجود في الأسفل .

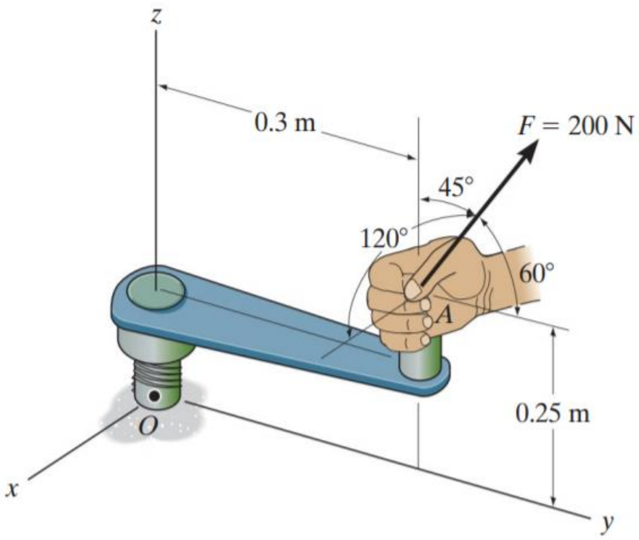
القوة الموازية للمحور أو خط عمل القوة يقطع المحور المطلوب لا نحسبها

القوة التي تعمل عزم فقط هي 100

$M_x = u_x \cdot (r * F)$

$M_x = -300$

- **F4-15 . Determine the magnitude of the moment of the 200-N force about the x axis ?**



$$\vec{r} = 0.3\,\hat{j} + 0.25\,\hat{k}\ \ m$$

$$\vec{F} = F\cos\alpha\,\hat{i} + F\cos\beta\,\hat{j} + F\cos\gamma\,\hat{k}$$

$$\alpha = 120°,\quad \beta = 60°,\quad \gamma = 45°$$

$$F = 200\ N$$

$$\vec{F} = -100\,\hat{i} + 100\,\hat{j} + 100\sqrt{2}\,\hat{k}\ \ N$$

$$M_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.25 \\ -100 & 100 & 100\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$M_x = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.25 \\ 100 & 100\sqrt{2} \end{vmatrix} = 17.4\ Nm$$

خلاصة الكلام

إذا أردنا العزم ل المحور السيني :

- ❖ وكانت القوة الموجود مركبة صادية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد
- ❖ وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور الصادي

إذا أردنا العزم ل المحور الصادي :

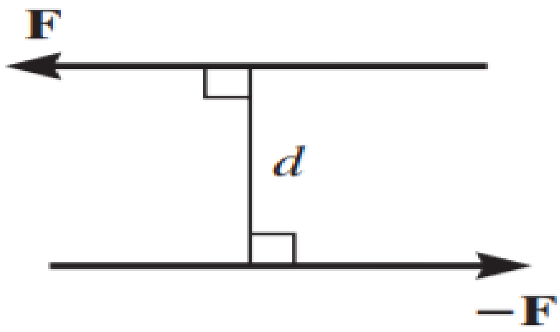
- ❖ وكانت القوة الموجود مركبة سينية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد
- ❖ وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور السيني

إذا أردنا العزم ل المحور الزيد :

- ❖ وكانت القوة الموجود مركبة صادية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور السيني
- ❖ وإذا كانت القوة موجودة في المركبة السينية إضرب بالمسافة الموازية ل المحور الصادي

- ❖ **A couple is defined as two parallel forces that have the same magnitude, but opposite directions, and are separated by a perpendicular distance**

- ❖ الموضوع بإختصار و ببساطة : لدينا قوتين متساويتان متوازيتان متعاكسات وبينهم مسافة عامودية .



<u>نتيجتهم صفر دون حل</u>

$$\begin{array}{c} u \\ r \\ F \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix}$$

$$M_y = u_y \cdot (r*F)$$

$$M_y = -400$$

القوة التي تعمل <u>عزم فقط</u> هي 200

<u>نتيجتهم صفر دون حل</u>

$$\begin{array}{c} u \\ r \\ F \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{vmatrix}$$

$$M_z = u_z \cdot (r*F)$$

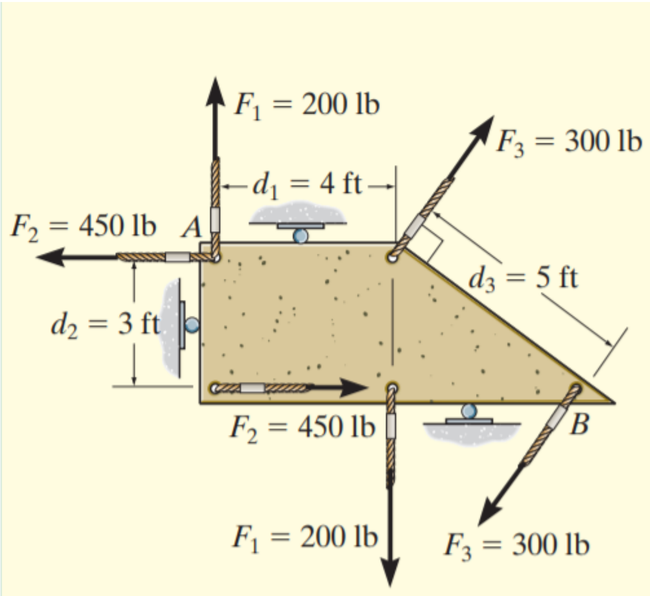
$$M_z = -600$$

القوة التي تعمل <u>عزم فقط</u> هي 300

<u>نتيجتهم صفر دون حل</u>

$$\begin{array}{c} u \\ r \\ F \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 0 \end{vmatrix}$$

- **Example4.10 Determine the resultant couple moment of the three couples acting on the plate in ?**

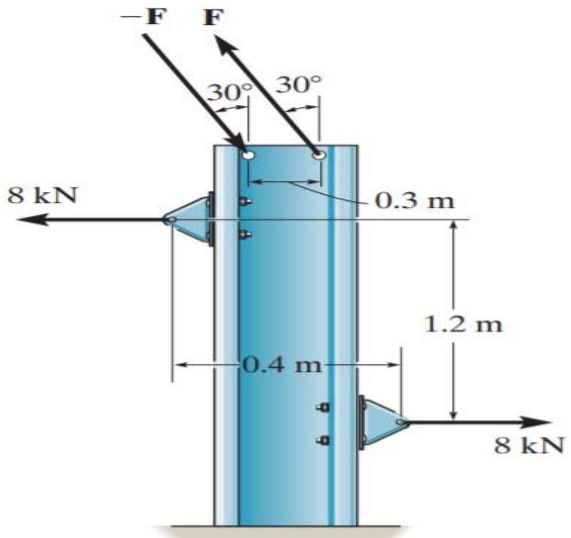


الحل : لا شئ جديد هنا سوى أننا نأخذ إحدى القوة ونضربها ب المسافة العامودية بينها وبين القوة المماثلة لها وفقط والباقي كما أخذنا سابقا

$$\circlearrowleft + M_R = \Sigma M;\ M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$
$$= -(200\text{ lb})(4\text{ ft}) + (450\text{ lb})(3\text{ ft}) - (300\text{ lb})(5\text{ ft})$$
$$= -950\text{ lb}\cdot\text{ft} = 950\text{ lb}\cdot\text{ft} \circlearrowright \quad \textit{Ans.}$$

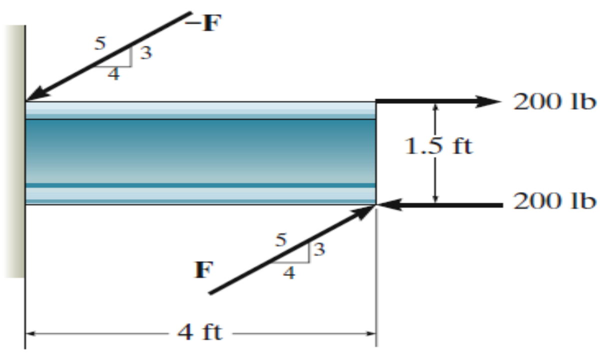
- **Prop4-76 Determine the magnitude of F so that the resultant couple moment is 12 kN # m, <u>counterclockwise</u>. Where on the beam does the resultant couple moment act?**

- هنا تغير بسيط جدا , وفكرة واضحه , أعطاك المومنت المزدوج وطلب منك حساب القوة



$$\circlearrowleft + M_R = \Sigma M_C; \quad 12 = (F\cos 30°)(0.3) + 8(1.2)$$
$$F = 9.238\text{ kN} = 9.24\text{ kN}$$

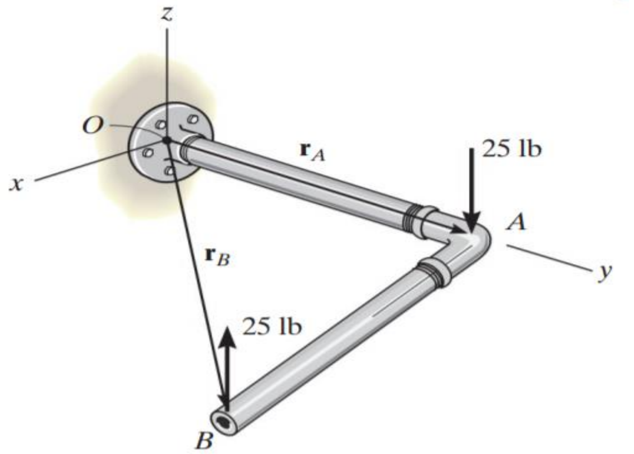
- **Prop4-78 Two couples act on the beam as shown. Determine the magnitude of F so that the resultant couple moment is 300 lb.ft <u>counterclockwise</u>. Where on the beam does the resultant couple act?**



$$\circlearrowleft + (M_C)_R = \frac{3}{5}F(4) + \frac{4}{5}F(1.5) - 200(1.5) = 300$$
$$F = 167\text{ lb}$$

- ❑ **Example. Determine the couple moment acting on the pipe. Segment AB is directed 30° below the x–y plane ?**

- ❑ **قوتان متساويتان متعاكستان في الإتجاه**



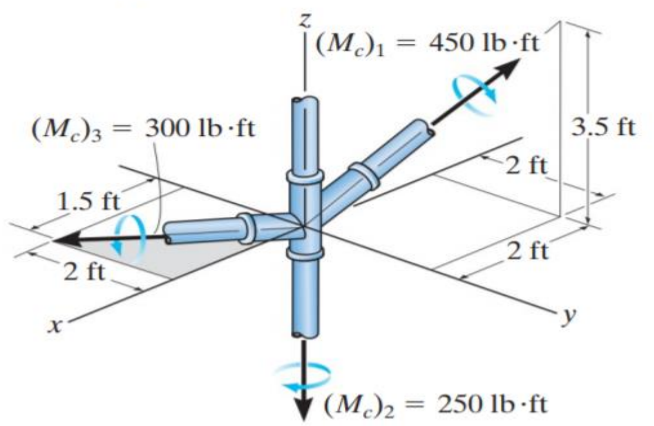
- ❑ **هنا أخذنا نقطة الأصل هي المرجع , الأسهل جعل نقطة المرجع هي نقطة تمر بها إحدى القوى**

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k}) \\ &= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6\cos 30^\circ\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\sin 30^\circ\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\ &= -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i} \\ &= \{-130\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{in.} \end{aligned}$$

- ❑ **هنا المرجع هي نقطة تمر بها إحدى القوى فاختصرنا الحل وكلاهما صحيح**

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) \\ &= (6\cos 30^\circ\mathbf{i} - 6\sin 30^\circ\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\ &= \{-130\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{in.} \end{aligned}$$

- ❑ **F4-13. Determine the resultant couple moment acting on the pipe assembly ?**



- ❑ **السؤال هنا , معى المومنت ليس بالطريقة الكارتيزن , لذلك نحول العزم وذلك بضربه بمتجه الوحده**

- ❑ **خطوات الحل : نجد الإحداثيات ومن ثم متجه الموقع ومن ثم متجه الوحدة وضربه ب قيمة العزم وهكذا ل باقي العزوم ومن ثم جمعهم جمع جبري**

$$\mathbf{r}_1 = [-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3.5\mathbf{k}]$$

$$|r|_1 = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (3.5)^2} = 4.5$$

$$M_{c1} = 450(-0.44\mathbf{i} + 0.44\mathbf{j} + 0.78\mathbf{k}) = [-198\mathbf{i} + 198\mathbf{j} + 351\mathbf{k}]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r1} &= [\frac{-2}{4.5}\mathbf{i} + \frac{2}{4.5}\mathbf{j} + \frac{3.5}{4.5}\mathbf{k}] \\ &= [-0.44\mathbf{i} + 0.44\mathbf{j} + 0.78\mathbf{k}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{r2} = [0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 1\mathbf{k}]$$

$$M_{c2} = 250(0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) = [0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 250\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{r}_3 = [1.5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}]$$

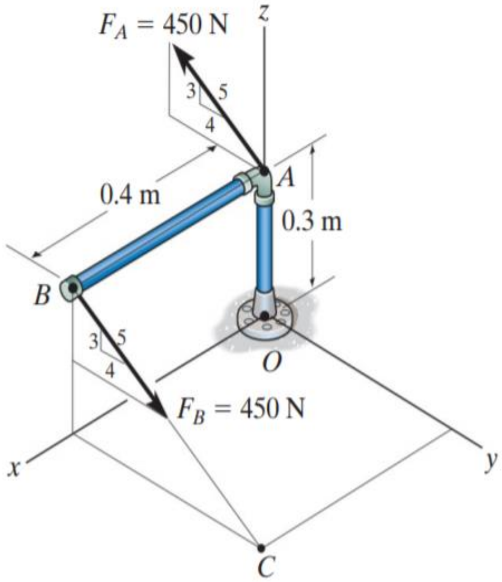
$$|r|_3 = \sqrt{(1.5)^2 + (-2)^2} = 2.5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r3} &= [\frac{1.5}{2.5}\mathbf{i} + \frac{-2}{2.5}\mathbf{j} + \frac{0}{2.5}\mathbf{k}] \\ &= [0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0\mathbf{k}] \end{aligned}$$

$$M_{c3} = 300(0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = [180\mathbf{i} - 240\mathbf{j} + 0\mathbf{k}]$$

$$\begin{aligned} M_R &= M_{c1} + M_{c2} + M_{c3} \\ &= [-198\mathbf{i} + 198\mathbf{j} + 351\mathbf{k}] + [0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 250\mathbf{k}] + [180\mathbf{i} - 240\mathbf{j} + 0\mathbf{k}] \\ &= [-20\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 100\mathbf{k}] \end{aligned}$$

- **F4-24. Determine the couple moment acting on the pipe assembly and express the result as <u>a Cartesian vector</u> ?**



هذا السؤال على <u>العزم المزدوج</u> , قوتان متساويتان متعاكستان في الإتجاه

$$\mathbf{r}_A = [0\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{r}_B = [0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}]$$

$$|r| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\mathbf{u}_A = 0\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_B = 0\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_A = 450(0\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} + 0.6\mathbf{k}) = [0\mathbf{i} - 360\mathbf{j} + 270\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{F}_B = 450(0\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}) = [0\mathbf{i} + 360\mathbf{j} - 270\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix}$$
$$= [0\mathbf{i} + 108\mathbf{j} + 144\mathbf{k}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

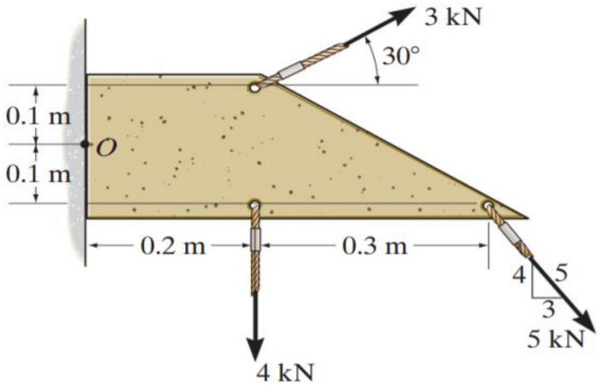
$$\mathbf{r}_{BA} = [4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}]$$

- **Sometimes it is convenient to reduce a system of forces and couple moments acting on a body to a simpler form by replacing it with an equivalent system, consisting of a single resultant force acting at a specific point and a resultant couple moment.**

الموضوع بإختصار : أن نقوم بتبسيط النظام الموجود أي يعني بدل من موجود 16 قوى و 9 عزوم وقد يحدث أي مشاكل أو خطأ لذلك نستبدل القوى ب قوة واحدة فقط و العزوم نستبدلها ب عزم واحد فقط وهذا هو الموضوع .

$$(F_R)_x = \Sigma F_x$$
$$(F_R)_y = \Sigma F_y$$
$$(M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

- **Example4.11 Replace the force and couple system shown in by an equivalent resultant force and couple moment acting at point O ?**



- <u>ربع رابع</u>

$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \qquad (F_R)_x = (3\text{ kN})\cos 30^\circ + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN}) = 5.598\text{ kN} \rightarrow$$

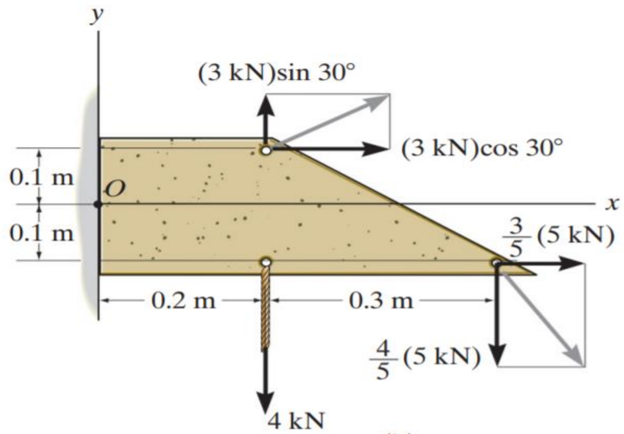
$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \qquad (F_R)_y = (3\text{ kN})\sin 30^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN}) - 4\text{ kN} = -6.50\text{ kN} = 6.50\text{ kN}\downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{(5.598\text{ kN})^2 + (6.50\text{ kN})^2} = 8.58\text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.50\text{ kN}}{5.598\text{ kN}}\right) = 49.3^\circ$$

❑ ربع رابع

❑ **والأن يجب علينا إيجاد كامل العزوم مع الإنتباه للإشارة الخاصة بها ومن ثم جمعها جمع جبري**



(b)

إذا كان **جواب العزم سالب** فما معناه ؟ الجواب هو أن فرضك في البداية كان خاطئ والصحيح هو عكس فرضك

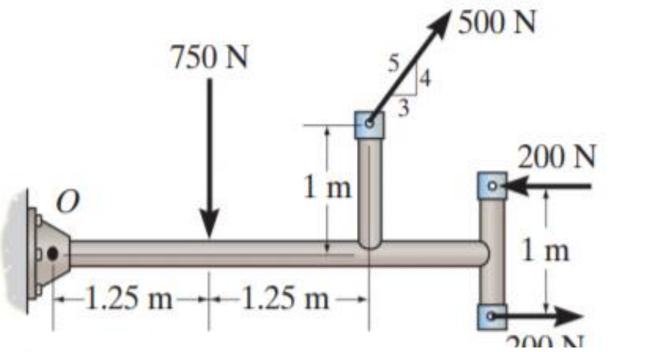
$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O;$$

$$(M_R)_O = (3\text{ kN})\sin 30^\circ(0.2\text{ m}) - (3\text{ kN})\cos 30^\circ(0.1\text{ m}) + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN})(0.1\text{ m}) - \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN})(0.5\text{ m}) - (4\text{ kN})(0.2\text{ m})$$

$$= -2.46\text{ kN}\cdot\text{m} = 2.46\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

❑ **Example. Replace the force and couple system acting on the member in by an equivalent resultant force and couple moment acting <u>at point O</u> ?**

❑ **السؤال واضح جدا لكني أريد التنبيه على موضوع العزم المزدوج فإننا لا نضعه في حساب القوى لأنهم متعاكسين في الإشارة لكننا نضعه في حساب العزم**



$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \; (F_R)_x = \left(\tfrac{3}{5}\right)(500\text{ N}) = 300\text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \; (F_R)_y = (500\text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) - 750\text{ N} = -350\text{ N} = 350\text{ N}\downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$= \sqrt{(300\text{ N})^2 + (350\text{ N})^2} = 461\text{ N}$$

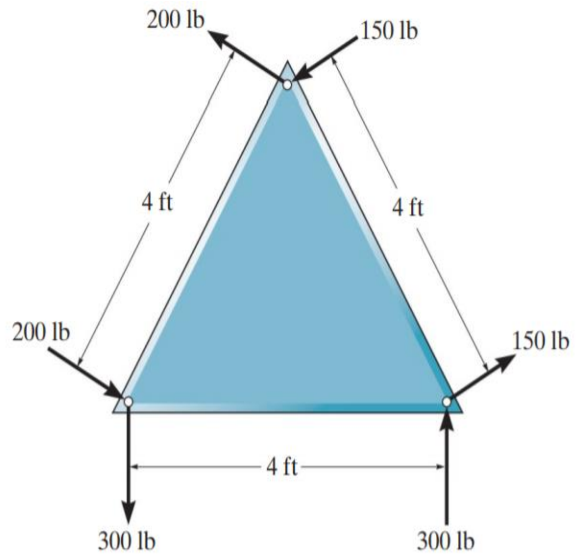
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350\text{ N}}{300\text{ N}}\right) = 49.4^\circ$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

$$(M_R)_O = (500\text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right)(2.5\text{ m}) - (500\text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right)(1\text{ m}) - (750\text{ N})(1.25\text{ m}) + 200\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= -37.5\text{ N}\cdot\text{m} = 37.5\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

- F4-20. Determine the resultant couple moment acting on the triangular plate ?

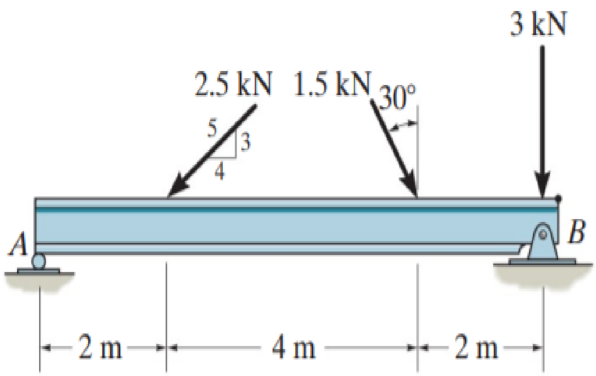


$$\downarrow +M_{C_R}$$

$$= 300(4) + 150(4) + 200(4)$$

$$= 2600 Ib.ft$$

- Prop4-100. Replace the force system acting on the beam by an equivalent force and couple moment at point B ?



$$\xrightarrow{+} F_{R_x} = \Sigma F_x; \quad F_{R_x} = 1.5 \sin 30^\circ - 2.5\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= -1.25 \text{ kN} = 1.25 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y; \quad F_{R_y} = -1.5 \cos 30^\circ - 2.5\left(\frac{3}{5}\right) - 3$$

$$= -5.799 \text{ kN} = 5.799 \text{ kN} \downarrow$$

$$F_R = \sqrt{F_{R_x}^2 + F_{R_y}^2} = \sqrt{1.25^2 + 5.799^2} = 5.93 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{R_y}}{F_{R_x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.799}{1.25}\right) = 77.8^\circ$$

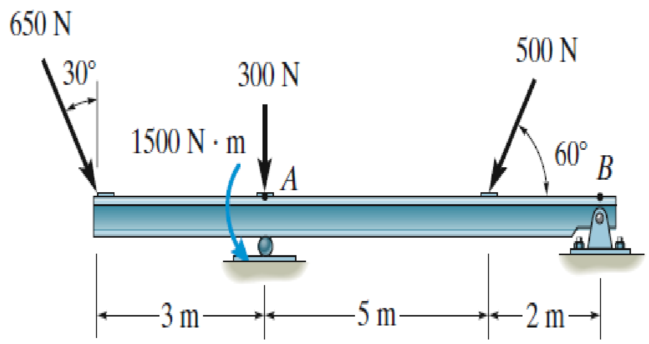
توضيح بخصوص الزاوية : إذا أردنا الزاوية مع الربع الخاص لا نضع إشارات , نضع القيم المطلقة وتكون مع الربع الواقعه فيه

$$\circlearrowleft + M_{R_B} = \Sigma M_{R_B}; \quad M_B = 1.5\cos 30^\circ(2) + 2.5\left(\frac{3}{5}\right)(6)$$

$$= 11.6 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\textit{Counterclockwise})$$

القوة 3 نيوتن لا تعمل عزم لأنها تمر بالنقطة المطلوبة ومركبة السينية ل 2.5 كذلك لأنها تنطبق ف في حساب العزم وايضا المركبة السينية ل 1.5 أيضا فعليك الإنتباه أكثر

- **Prop4-103. Replace the loading system acting on the post by an equivalent resultant force and couple moment at point A ?**



- **sol :**

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x;\quad (F_R)_x = 650 \sin 30° - 500 \cos 60° = 75 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;\quad (F_R)_y = -650 \cos 30° - 300 - 500 \sin 60°$$

$$= -1295.93 \text{ N} = 1295.93 \text{ N}\downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{75^2 + 1295.93^2} = 1298.10 \text{ N} = 1.30 \text{ kN}$$

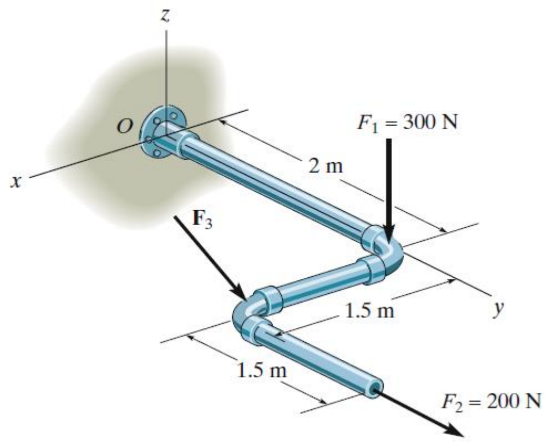
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{1295.93}{75}\right) = 86.69° = 86.7°$$

$$\circlearrowleft +(M_R)_A = \Sigma M_A;\quad (M_R)_A = 650 \cos 30° (3) + 1500 - 500 \sin 60° (5)$$

$$= 1023.69 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= 1.02 \text{ kN}\cdot\text{m (counter clockwise)} \qquad \textbf{Ans.}$$

- **Prop4-108 Replace the force system by an equivalent resultant force and couple moment at point *O*. Take F3 = {-200i + 500j - 300k} N ?**



sol :

<u>الخطوة الأولى :</u> يجب أن تكون كل القوى بالصيغة الكارتيزن ويجب إيجاد متجه الموقع من النقطة المطلوبة ل القوة لكي نجد العزم لاحقا

$\mathbf{r}_1 = \{2\mathbf{j}\}$ m $\quad \mathbf{r}_2 = \{1.5\mathbf{i} + 3.5\mathbf{j}\} \quad \mathbf{r}_3 = \{1.5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\}$ m

$\mathbf{F}_1 = \{-300\mathbf{k}\}$ N $\quad \mathbf{F}_2 = \{200\mathbf{j}\}$ N $\quad \mathbf{F}_3 = \{-200\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ N

<u>الخطوة الثانية :</u> إيجاد مجموع القوى السينية والصادية والتي على محور الزيد وأن يكون الجمع متجانس أي يعني من نفس النوع

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F};\qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$= (-300\mathbf{k}) + 200\mathbf{j} + (-200\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - 300\mathbf{k})$$

$$= \{-200\mathbf{i} + 700\mathbf{j} - 600\mathbf{k}\} \text{ N}$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> إيجاد مجموع العزوم عن طريق تطبيق القانون

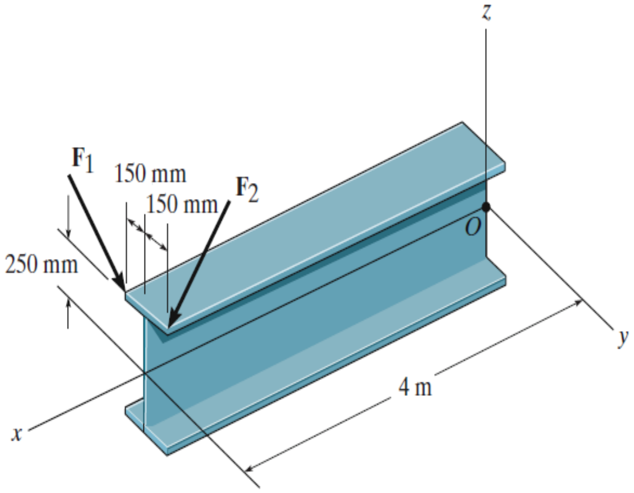
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O;\quad (\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.5 & 3.5 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.5 & 2 & 0 \\ -200 & 500 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= (-600\mathbf{i}) + (300\mathbf{k}) + (-600\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 1150\mathbf{k})$$

$$= \{-1200\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 1450\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans.}$$

- Prop4-106 . The forces F1 = {-4i + 2j - 3k} kN and F2 = {3i - 4j -2k} kN act on the end of the beam. Replace these forces by an equivalent force and couple moment acting at point *O* ?



Ans.

Sol :

$r_1=(4i - 0.15j + 0.25 k)$

$r_2=(4i + 0.15 j +0.25 k)$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \{-1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

$$\mathbf{M}_{RO} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$$

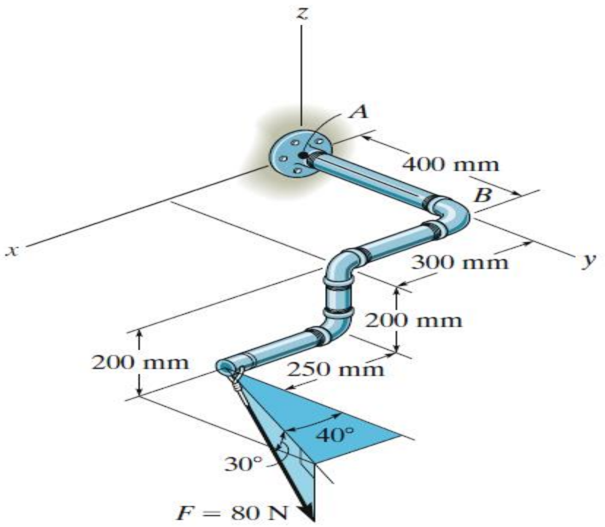
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -0.15 & 0.25 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0.15 & 0.25 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-0.05\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7.4\mathbf{k}) + (0.7\mathbf{i} + 8.75\mathbf{j} - 16.45\mathbf{k})$$

$$= (0.65\mathbf{i} + 19.75\mathbf{j} - 9.05\mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_{RO} = \{0.650\mathbf{i} + 19.75\mathbf{j} - 9.05\mathbf{k}\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$

- **Prop4-110 Replace the force of F = 80 N acting on the pipe assembly by an equivalent resultant force and couple moment at point A.**



الخطوة الأولى : نحلل القوى إلى مركباتها الثلاثة وهذه فكرة على شابتر الثاني راجع هذه الفكرة

$$\mathbf{F}_R = 80\cos 30^\circ \sin 40^\circ\,\mathbf{i} + 80\cos 30^\circ \cos 40^\circ\,\mathbf{j} - 80\sin 30^\circ\,\mathbf{k}$$

الخطوة الثانية : إيجاد مجموع القوى السينية والصادية والتي على محور الزيد وأن يكون الجمع متجانس أي يعني من نفس النوع ونحن هنا لدينا فقط قوة واحدة

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F};$$

$$\mathbf{F}_R = 80\cos 30^\circ \sin 40^\circ\,\mathbf{i} + 80\cos 30^\circ \cos 40^\circ\,\mathbf{j} - 80\sin 30^\circ\,\mathbf{k}$$

$$= 44.53\,\mathbf{i} + 53.07\,\mathbf{j} - 40\,\mathbf{k}$$

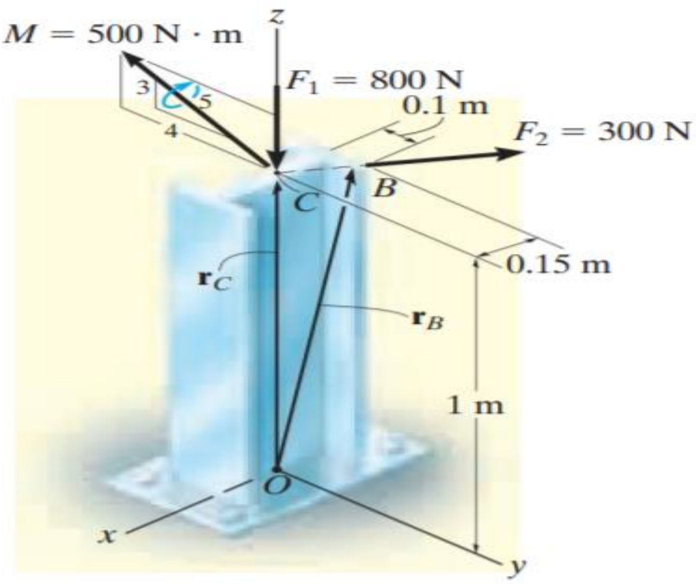
$$= \{44.5\,\mathbf{i} + 53.1\,\mathbf{j} - 40\,\mathbf{k}\}\text{ N}$$

الخطوة الثالثة : إيجاد مجموع العزوم عن طريق تطبيق القانون

$$\mathbf{M}_{RA} = \Sigma\mathbf{M}_A; \quad \mathbf{M}_{RA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.55 & 0.4 & -0.2 \\ 44.53 & 53.07 & -40 \end{vmatrix}$$

$$= \{-5.39\,\mathbf{i} + 13.1\,\mathbf{j} + 11.4\,\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

- **Example** The structural member is subjected to a couple moment M and forces F1 and F2. Replace this system by an equivalent resultant force and couple moment acting at its base, point O ?



Sol :

الخطوة الأولى : يجب أن تكون كل القوى بالصيغة الكارتيزن ويجب إيجاد متجه الموقع من النقطة المطلوبة ل القوة لكي نجد العزم لاحقا

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300\ \text{N})\mathbf{u}_{CB}$$

$$= (300\ \text{N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300\ \text{N}\left[\frac{\{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}\}\ \text{m}}{\sqrt{(-0.15\ \text{m})^2 + (0.1\ \text{m})^2}}\right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\}\ \text{N}$$

الخطوة الثانية : إيجاد مجموع القوى السينية والصادية والتي على محور الزيد وأن يكون الجمع متجانس أي يعني من نفس النوع

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}$$

$$= \{-250\mathbf{i} + 166\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

الخطوة الثالثة : إيجاد مجموع العزوم عن طريق تطبيق القانون وللعلم العزم يعامل مثل القوة أي أنه يحلل مثل القوة إلى مركبات

$$\mathbf{M} = -500\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

متجه الموقع من النقطة المطلوبة إلى أي نقطة على محور عمل القوة

$$(\mathbf{M}_R)_o = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{M}_O$$

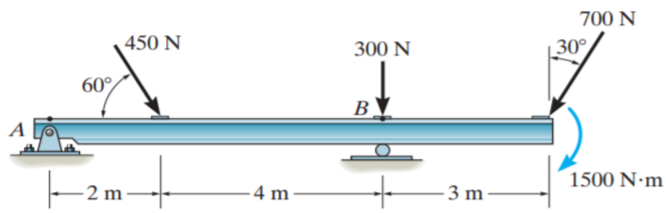
$$(\mathbf{M}_R)_o = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$(\mathbf{M}_R)_o = (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (0) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

$$= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

- **Prop4-118** Replace the loading acting on the beam by a single resultant force. Specify where the force acts, <u>measured from B ?</u>



الخطوة الأولى : حلل القوى إلى المركبات السينية والصادية

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \qquad F_{Rx} = 450\cos 60^\circ - 700\sin 30^\circ = -125\ \text{N} = 125\ \text{N} \leftarrow$$

$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \qquad F_{Ry} = -450\sin 60^\circ - 700\cos 30^\circ - 300 = -1296\ \text{N} = 1296\ \text{N} \downarrow$$

الخطوة الثانية : إيجاد القوة المحصلة والزاوية الخاصة بها

$$F = \sqrt{(-125)^2 + (-1296)^2} = 1302\ \text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1296}{125}\right) = 84.5^\circ$$

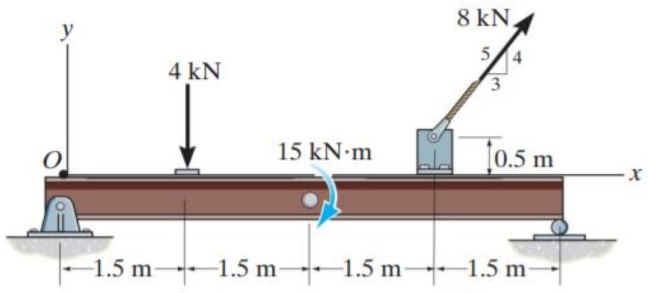
أخذنا المركبة الصادية وضربناها بلمسافة المجهولة <u>ولم نأخذ المركبة السينية</u> لأن المركبة السينية تكون <u>تمر ب النقطة</u> لذلك ليس لها عزم

هنا <u>فرضنا</u> العزم الذي مع عقارب الساعه أنه <u>موجب</u> ويجوز أن تعمل العكس ولكن المتعارف عليه هو أن نجعل عكس عقارب الساعه هو الموجب

$$\circlearrowright + M_{RB} = \Sigma M_B; \qquad 1296(x) = -450\sin 60^\circ(4) + 700\cos 30^\circ(3) + 1500$$

$$x = 1.36$$

- ❑ **Example. Replace the force and couple moment system acting on the beam by an equivalent resultant force, and find where its line of action intersects the beam, measured from point O ?**

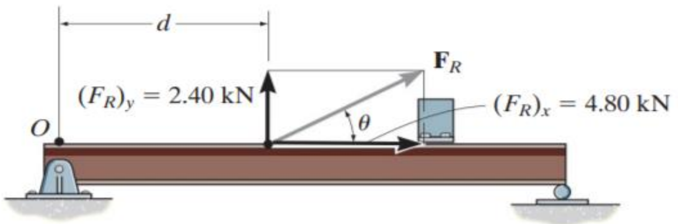


$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \qquad (F_R)_x = 8\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 4.80\text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \qquad (F_R)_y = -4\text{ kN} + 8\text{ kN}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 2.40\text{ kN}\uparrow$$

$$F_R = \sqrt{(4.80\text{ kN})^2 + (2.40\text{ kN})^2} = 5.37\text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.40\text{ kN}}{4.80\text{ kN}}\right) = 26.6^\circ$$

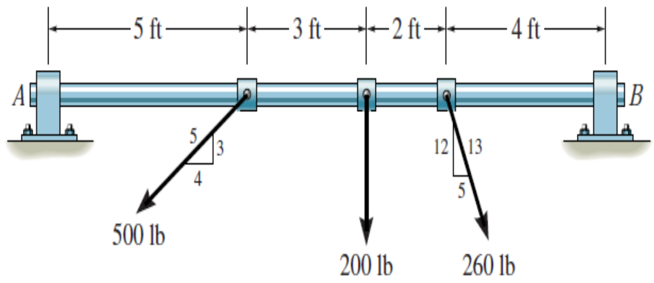


$$\curvearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \qquad 2.40\text{ kN}(d) = -(4\text{ kN})(1.5\text{ m}) - 15\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$-\left[8\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right)\right](0.5\text{ m}) + \left[8\text{ kN}\left(\tfrac{4}{5}\right)\right](4.5\text{ m})$$

$$d = 2.25\text{ m} \qquad \textit{Ans.}$$

- ❑ **Prop4-116 Replace the three forces acting on the shaft by a single resultant force. Specify where the force acts, measured from end *B* ? s**



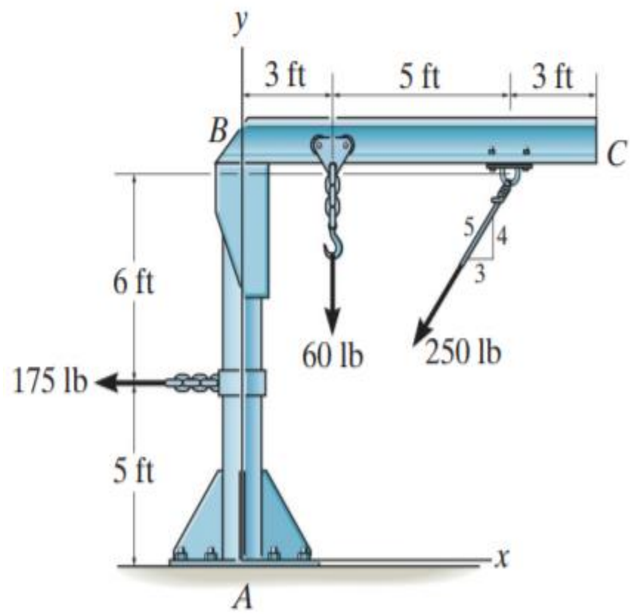
$$F = \sqrt{(-300)^2 + (-740)^2} = 798\text{ lb}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{740}{300}\right) = 67.9^\circ$$

$$\curvearrowleft + M_{RB} = \Sigma M_B; \qquad 740(x) = 500\left(\frac{3}{5}\right)(9) + 200(6) + 260\left(\frac{12}{13}\right)(4)$$

$$x = 6.57\text{ ft}$$

- ❑ **Example. The jib crane is subjected to three coplanar forces. Replace this loading by an equivalent resultant force and specify where the resultant's line of action intersects the column AB and boom BC ?**



Sol :

نفس الفكرة تماما لكن يوجد إختلاف بسيط أننا سنجد مسافتين , مسافة ل المركبة السينية والمركبة الصادية فقط , أما ك حل فلن يختلف شئ أبدا .

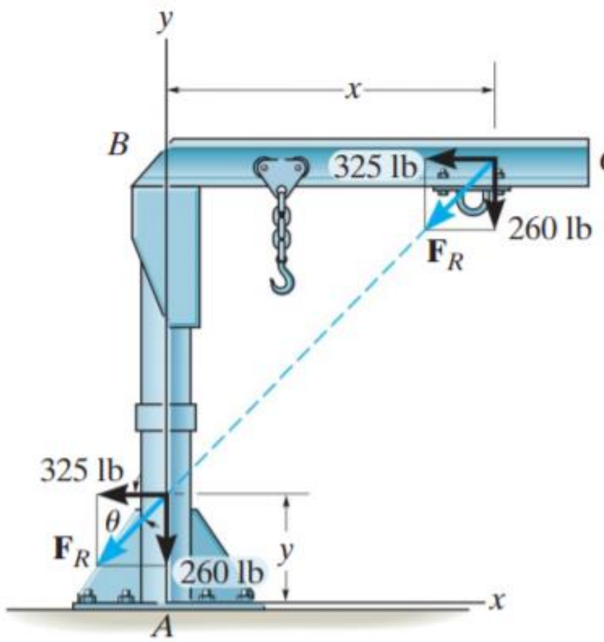
$$\xrightarrow{+} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = -250\text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) - 175\text{ lb} = -325\text{ lb} = 325\text{ lb} \leftarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = -250\text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) - 60\text{ lb} = -260\text{ lb} = 260\text{ lb}\downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(325\text{ lb})^2 + (260\text{ lb})^2} = 416\text{ lb}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{260\text{ lb}}{325\text{ lb}}\right) = 38.7^\circ$$

طلب منا المسافة عند مكانين , نحن نعلم إتجاه المركبة السينية والصادية ونعلم إتجاه القوة المحصلة والقوة يمكننا أن نمدها ويكون نفس الموضوع كما ناقشنا سابقا "إمتداد خط عمل القوة



A : هو مرجع حسابنا ل العزم وهو إختياري أي نستطيع إختيار نقطة غيرها .

BC

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad 325\text{ lb}(11\text{ ft}) - 260\text{ lb}(x)$$

$$= 175\text{ lb}(5\text{ ft}) - 60\text{ lb}(3\text{ ft}) + 250\text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right)(11\text{ ft}) - 250\text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right)(8\text{ ft})$$

$$x = 10.9\text{ ft}$$

AB

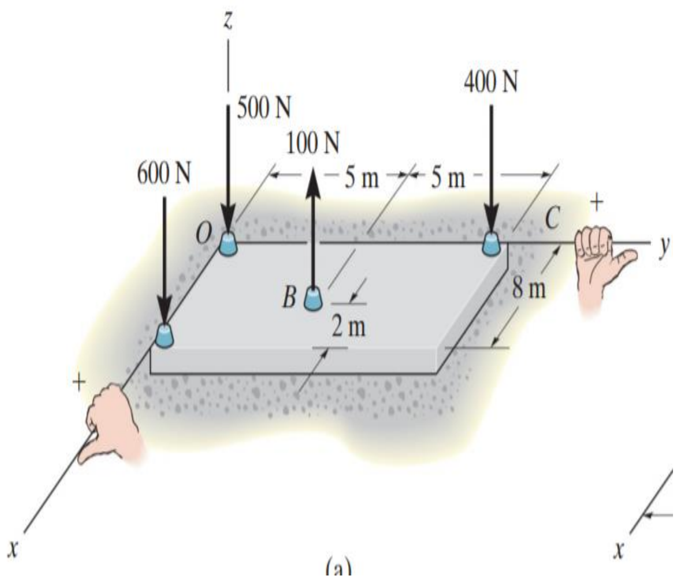
$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad 325\text{ lb}(y) + 260\text{ lb}(0)$$

$$= 175\text{ lb}(5\text{ ft}) - 60\text{ lb}(3\text{ ft}) + 250\text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right)(11\text{ ft}) - 250\text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right)(8\text{ ft})$$

$$y = 2.29\text{ ft}$$

قمنا بسحبهم ل القطعة المطلوبة وحساب العزم عند نفس النقطة التي قلنا عنها سابقا وهي ليست شرط علينا أي نستطيع إختيار نقطة أخرى غيرها

- **Example. The slab in is subjected to four parallel forces. Determine the magnitude and direction of a resultant force equivalent to the given force system, and locate its point of application on the slab ?**



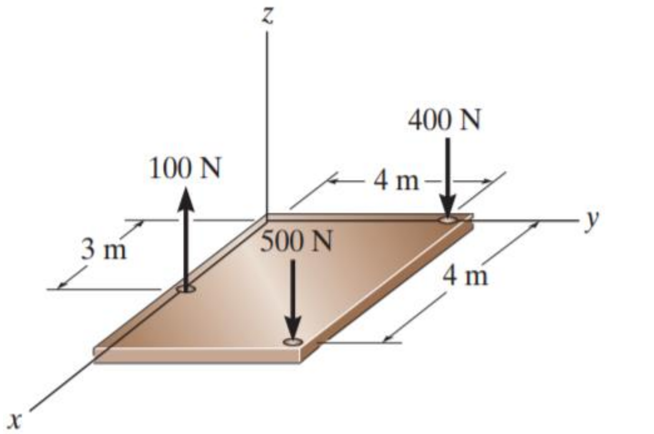
Sol :

بما ان القوة جميعها موازية ل المحاور إذن هي بصيغة الكارتيزن , نجد القوة المحصلة مع الإنتباه ل الإشارات

$$+\uparrow F_R = \Sigma F; \quad F_R = -600\text{ N} + 100\text{ N} - 400\text{ N} - 500\text{ N}$$

$$= -1400\text{ N} = 1400\text{ N}\downarrow$$

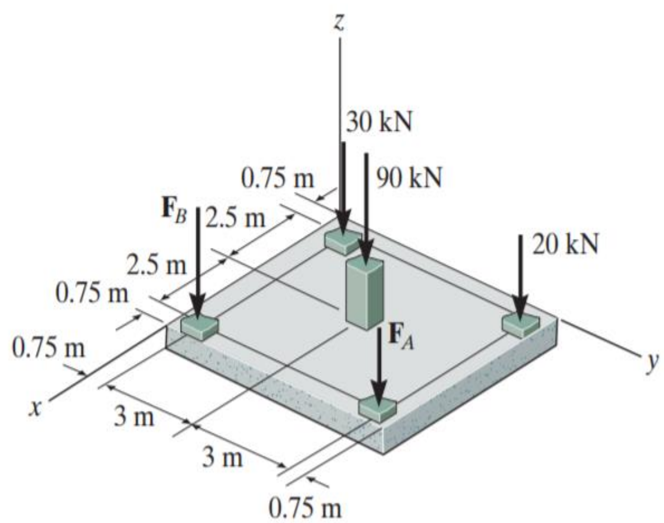
- **F4-35. Replace the loading shown by an equivalent single resultant force and specify the x and y coordinates of its line of action ?**



$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \quad F_R = 400 + 500 - 100$$
$$= 800 \text{ N}$$

$$M_{Rx} = \Sigma M_x; \ -800y = -400(4) - 500(4)$$
$$y = 4.50 \text{ m}$$
$$M_{Ry} = \Sigma M_y; \quad 800x = 500(4) - 100(3)$$
$$x = 2.125 \text{ m}$$

- **Prop4-132. If $F_A = 40$ kN and $F_B = 35$ kN, determine the magnitude of the resultant force and specify the location of its point of application (x, y) on the slab ?**

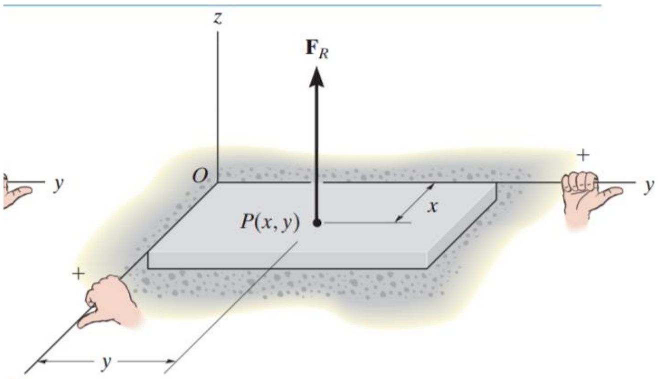


Note :

- إذا أردنا العزم ل المحور السيني : وكانت القوة الموجود مركبة صادية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور الصادي
- إذا أردنا العزم ل المحور الصادى : وكانت القوة الموجود مركبة سينية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور السيني
- ولا تنسى أن أي قوة موازية ل المحور لا نحسبها أو أي قوة إمتداد خط عمل القوة يقطع المحور المطلوب كذلك لا نحسبها

$$(M_R)_x = \Sigma M_x;$$
$$-(1400 \text{ N})y = 600 \text{ N}(0) + 100 \text{ N}(5 \text{ m}) - 400 \text{ N}(10 \text{ m}) + 500 \text{ N}(0)$$
$$-1400y = -3500 \qquad y = 2.50 \text{ m}$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y;$$
$$(1400 \text{ N})x = 600 \text{ N}(8 \text{ m}) - 100 \text{ N}(6 \text{ m}) + 400 \text{ N}(0) + 500 \text{ N}(0)$$
$$1400x = 4200$$
$$x = 3 \text{ m}$$



(b)

$$+\uparrow F_R = \Sigma F_z; \qquad -F_R = -30 - 20 - 90 - 35 - 40$$

$$F_R = 215 \text{ kN}$$

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \qquad -215(y) = -35(0.75) - 30(0.75) - 90(3.75) - 20(6.75) - 40(6.75)$$

$$y = 3.68 \text{ m} \qquad \textbf{Ans.}$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 215(x) = 30(0.75) + 20(0.75) + 90(3.25) + 35(5.75) + 40(5.75)$$

$$x = 3.54 \text{ m} \qquad \textbf{Ans.}$$

- **Sometimes, a body may be subjected to a loading that is distributed over its surface.**

بعض الأحيان , يتعرض الجسم إلى حمل موزع عبر السطح .

- **The pressure exerted at each point on the surface indicates the intensity of the loading.**

الضغط الذي يكون على كل نقطة يمثل شدة الحمل .

- **It is measured using ($\frac{N}{m^2}$) in SI units .**

تقاس تلك الشدة بوحدة نيوتن لكل متر مربع

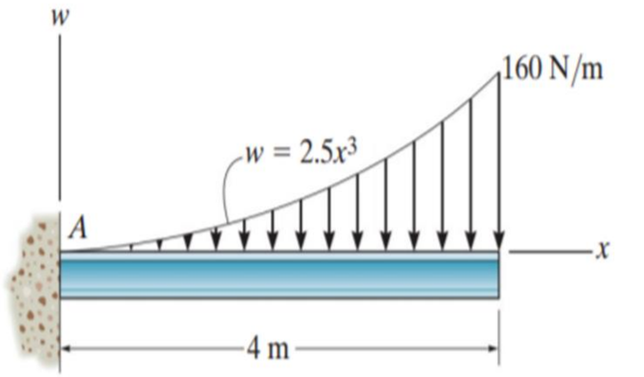
Magnitude of Resultant Force.

$$F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A$$

Location of Resultant Force.

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\,dx}{\int_L w(x)\,dx} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}$$

- **F4-42. Determine the resultant force and specify where it acts on the beam measured from A ?**



بداية البيم نهاية البيم

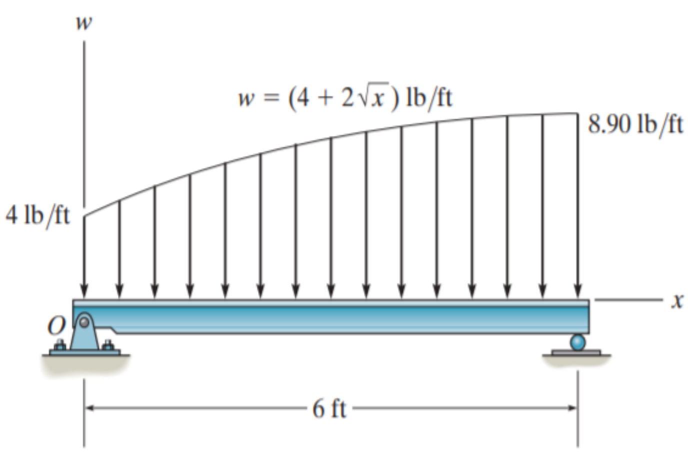
- الخطوة الأولى : نشوف الإقتران وعلينا أن نكامله لكي نجد القوة المحصلة وحدود التكامل تكون من بداية البيم إلى نهاية البيم

$$F_R = \int_A dA = \int_0^4 2.5x^3 dx = 2.5\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 160N$$

- الخطوة الثانية : علينا معرفة أين مكان تأثير القوة وذلك عن طريق تطبيق القانون ولا يوجد حاجة للقلق فكل التكاملات تكون على الألة الحاسبة .

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^4 x \cdot 2.5x^3 dx}{\int_0^4 2.5x^3 dx} = \frac{2.5\frac{x^5}{5}\Big|_0^4}{2.5\frac{x^4}{4}\Big|_0^4} = \frac{512}{160} = 3.2 \text{ m}$$

- **Prop4-158 . Determine the magnitude of the equivalent resultant force and its location, measured from point O ?**



Sol :

$$F_R = \int dA = \int_0^6 (4 + 2\sqrt{x})\, dx$$

$$= \left[4x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$F_R = 43.6 \text{ lb}$$

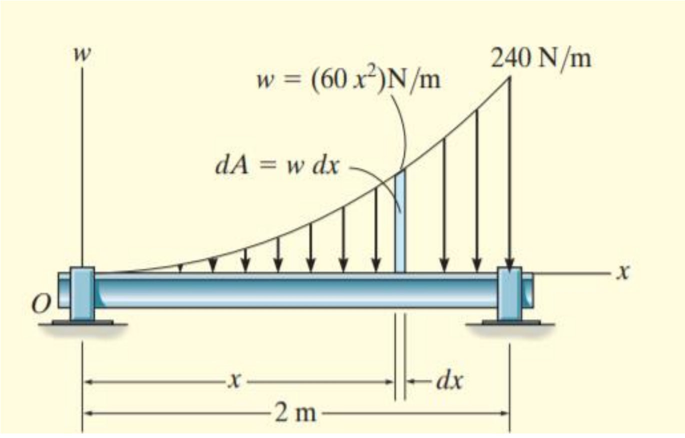
$$\int \bar{x} dF = \int_0^6 (4x + 2x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= \left[2x^2 + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^6$$

$$= 142.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$\bar{x} = \frac{142.5}{43.6} = 3.27 \text{ ft}$$

- **Example4-21 . Determine the magnitude and location of the equivalent resultant force acting on the shaft ?**



Sol :

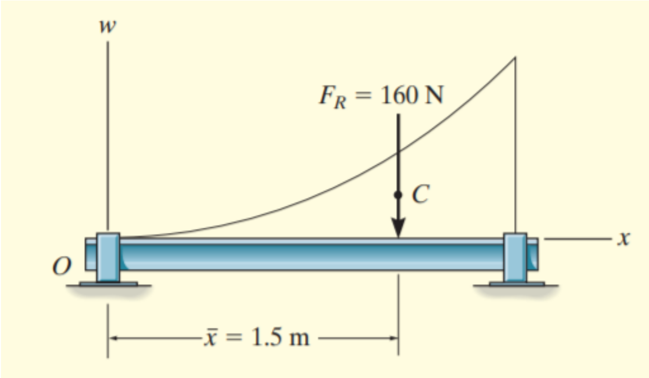
$$+\downarrow F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^{2\text{ m}} 60x^2\, dx = 60\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\text{ m}} = 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

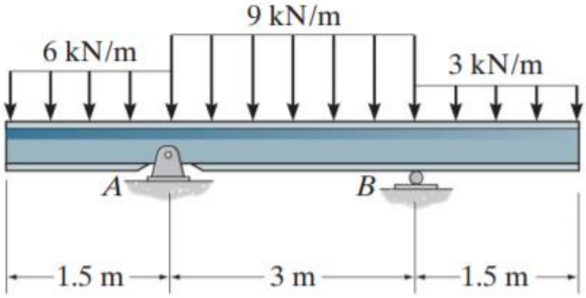
$$= 160 \text{ N}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{2\text{ m}} x(60x^2)\, dx}{160 \text{ N}} = \frac{60\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{2\text{ m}}}{160 \text{ N}} = \frac{60\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)}{160 \text{ N}}$$

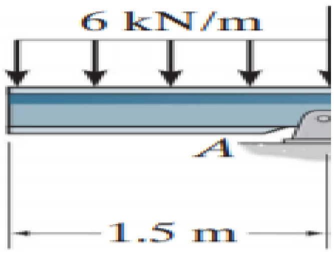
$$= 1.5 \text{ m}$$



- **F4-37. Determine the resultant force and <u>specify</u> where it acts on the beam measured from A ?**



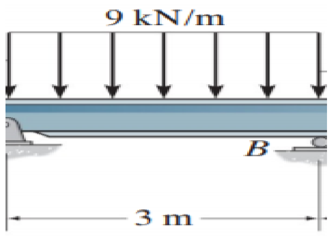
في الأشكال المنتظمة ليس داعي للتكامل , علينا أن تقوم بعمليات حسابية بسيطة (نقسم الشكل حسب القوة المؤثرة على كل منطقة)



F_1= 6*1.5= 9

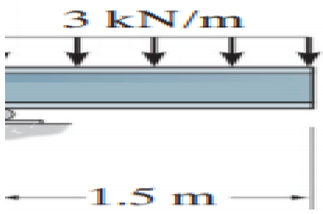
الطول * العرض لأنه مستطيل

x_1 from A=$\frac{1.5}{2}$=0.75



F_2= 9*3= 27

x_1 from A= $\frac{3}{2}$ = 1.5



F_3= 3*1.5= 4.5

x_1 from A=$\frac{1.5}{2}$ +3 =3.75

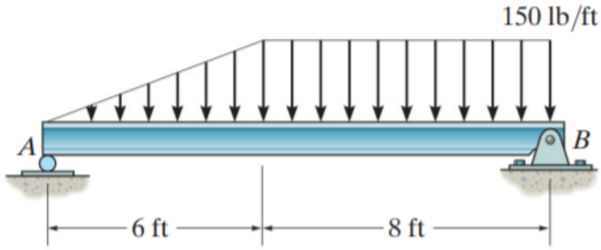
F_R=F_1+F_2+F_3 = 9+27+4.5=40.5

Next, find the moment about point A and equate that to the resultant force multiplied by a distance d.

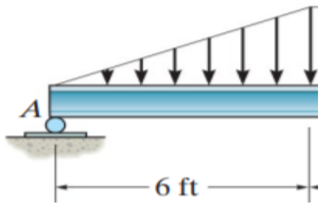
-40.5d = 9*0.75-27*1.5-4.5(3+0.75)

d=1.25m

- **F4-38. Determine the resultant force and specify where it acts on the beam measured from A ?**



- **SOL :** نقسم الشكل الى اشكال منتظمة ليسهل الحساب



- القوة = مساحة الشكل = (2/1)*طول القاعده * الإرتفاع

$$F_1 = \frac{1}{2}(6)(150)$$
$$F_1 = 450 \text{ lb}$$

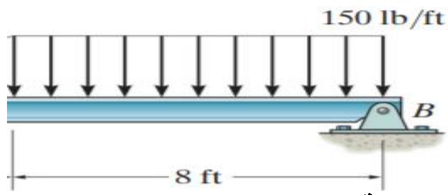
- بالنسبة ل الموقع الخاص بالمثلث : مهم جدا

(ننظر من اليسار الى اليمين دائما)

إذا كنا بإتجاه الزاوية الصغيرة نضرب المسافة ب ثلثين

اذا كنا بإتجاه الزاوية القائمة نضرب المسافة بالثلث

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}(6) = 4 \text{ ft}$$



القوة = مساحة الشكل = الطول* العرض

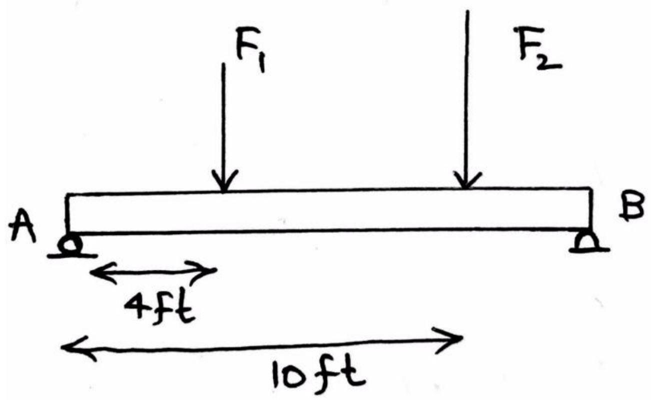
$$F_2 = 8(150)$$
$$F_2 = 1200 \text{ lb}$$

الموقع : منتصف الشكل إضافة إلى المسافة الكاملة وصولا ل النقطة المطلوبة

$$\bar{x}_2 = 6 + 4 = 10 \text{ ft}$$

$$F_R = 1200 + 450 = 1650 \text{ lb}$$

نرسم المحصلة لكل قوة كلآتي :



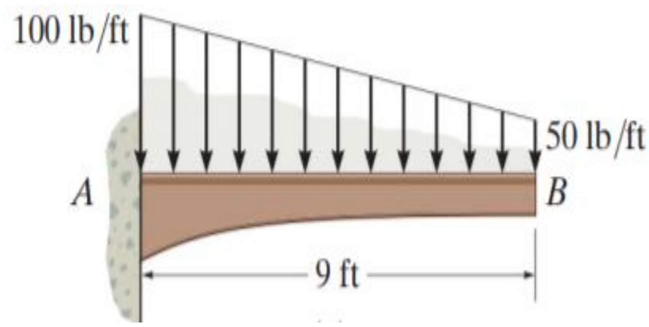
نطبق قانون العزم

M=f*d

-1650d = -450*4 - 1200*10

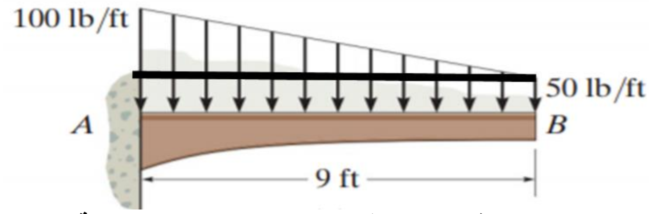
d=8.36 m

- **Example. The granular material exerts the distributed loading on the beam as shown . Determine the magnitude and location of the equivalent resultant of this load ?**

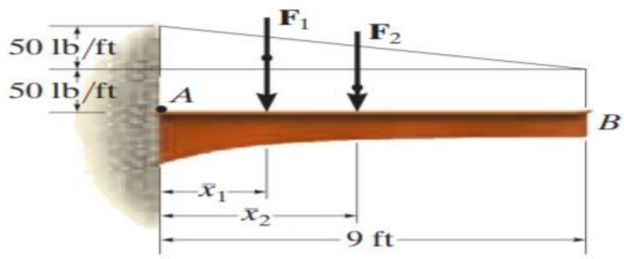


sol :

في الأشكال المنتظمة ليس داعي للتكامل , ما نلاحظه أنه ليس مثلثا إنما يتكون من جزئين فنقوم بتقسيم الشكل إلى شكلين قادرين على التعامل معهم .



تم تقسيمه إلى مثلث ومستطيل ونقوم بالعمليات الحسابية على كل جزء الآن :



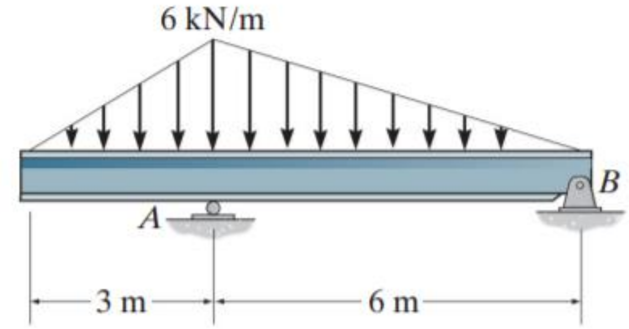
$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 225\text{ lb}$$ → خاص بالمثلث

$$F_2 = (9\text{ ft})(50\text{ lb/ft}) = 450\text{ lb}$$ → خاص بالمستطيل

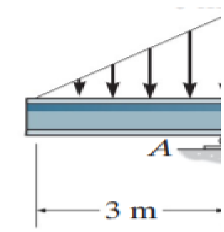
$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9\text{ ft}) = 3\text{ ft}$$

$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(9\text{ ft}) = 4.5\text{ ft}$$

- **F4-39 . Determine the resultant force and specify where it acts on the beam <u>measured from A</u> ?**

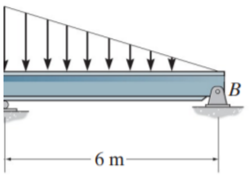


sol :



$$F_1 = \frac{1}{2}6\cdot 3 = 9\text{ kN}$$

$$X_1 = \frac{1}{3} * 3$$



$$F_2 = \frac{1}{2}6\cdot 6 = 18\text{ kN}$$

$$X_2 = \frac{1}{3} * 6$$

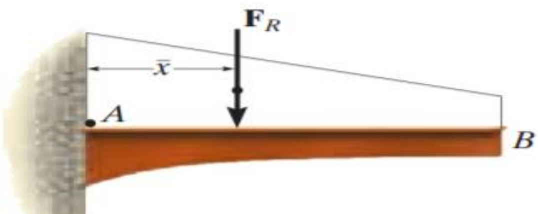
$$F_R = F_1 + F_2 = 27\text{ kN}$$

Moment about joint A is:

$$\widehat{M}_A = -F_1\cdot 1 + F_2\cdot 2$$

$$\widehat{M}_A = 27\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$x = \frac{M_A}{F_R} = 1\text{m}$$



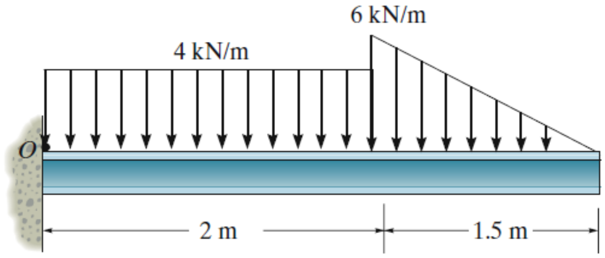
(c)

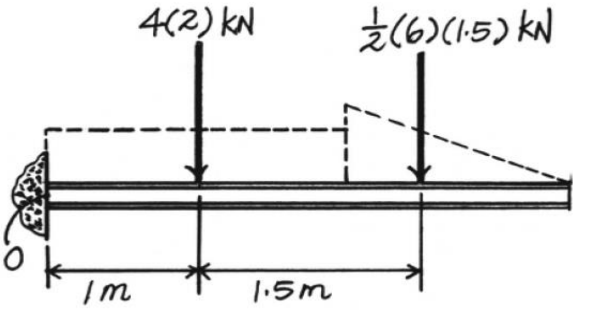
$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 225 + 450 = 675 \text{ lb}$$

$$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$$

$$\bar{x} = 4 \text{ ft}$$

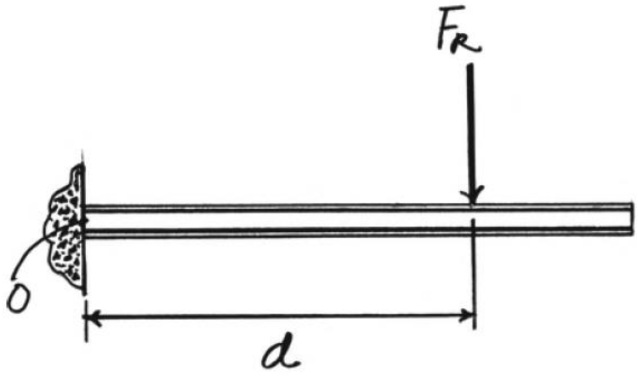
- **Prop4-143. Replace this loading by an equivalent resultant force and specify its location, measured from point O ?**





$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad -F_R = -4(2) - \frac{1}{2}(6)(1.5)$$

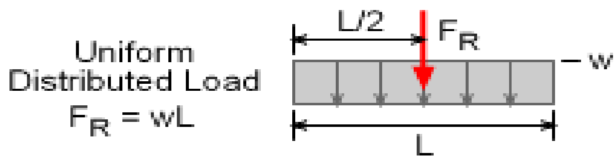
$$F_R = 12.5 \text{ kN}$$

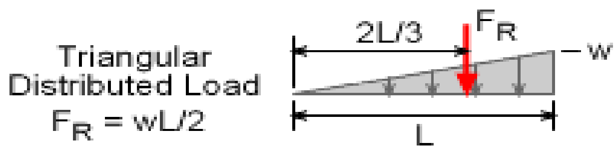


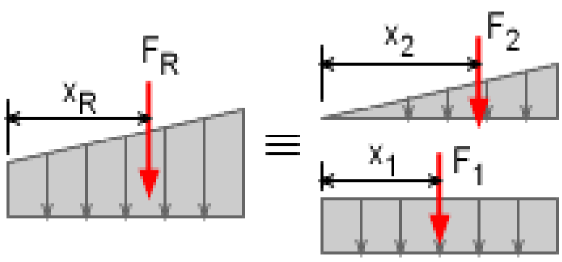
$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \quad -12.5(d) = -4(2)(1) - \frac{1}{2}(6)(1.5)(2.5)$$

$$d = 1.54 \text{ m}$$

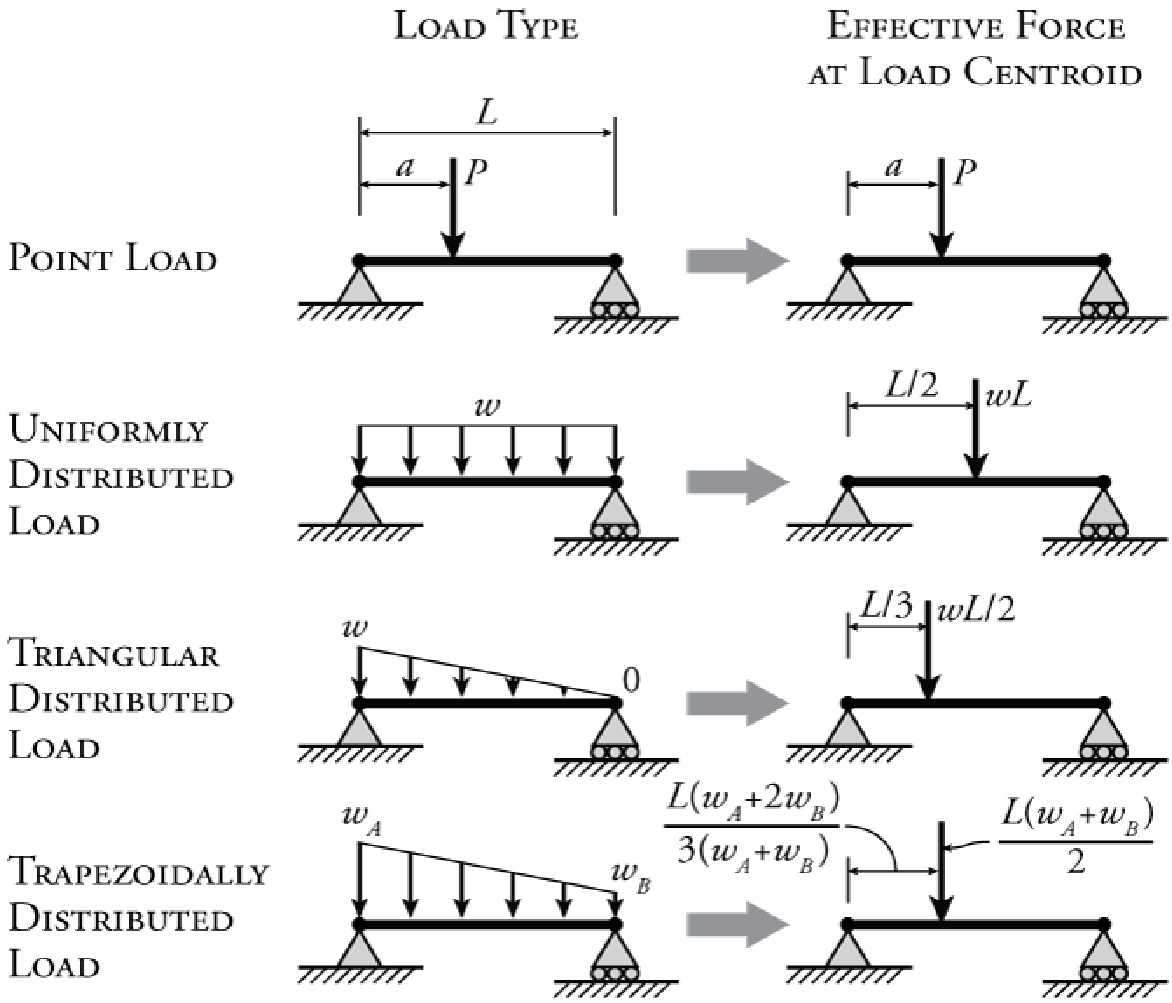
الخلاصة للأشكال المنتظمة :







Summry :


Load Type
Effective Force at Load Centroid
Point Load
L
a
P
Uniformly Distributed Load
w
L/2
wL
Triangular Distributed Load
0
L/3
wL/2
Trapezoidally Distributed Load
wA
wB
L(wA+2wB) / 3(wA+wB)
L(wA+wB) / 2

ولكي نطبق تلك القوانين لا بد من معرفة كامل القوى والمجاهيل بشكل عام لذلك نطبق مخطط الجسم الحر والذي اتفقنا عليه أن أفضل طريقه ولكن الأن وهو موضوع الشابتر الجديد وهو وجود الدعائم , للدعائم يوجد شئ اسمه ردود افعال سنتعلم كيفية حسابها وكامل التفاصيل في هذا الشابتر .

- ❑ **Internal Forces: the internal forces that act between adjacent particles in a body always occur in collinear pairs such that they have the same magnitude and act in opposite directions .**

القوى الداخلية : القوة التي تؤثر بين جزيئات الجسم وتكون على إستقامة وهي نفس المقدار ولكن مختلفة في الإتجاه .

- **Since these forces cancel each other, they will not create an external effect on the body.**

عند رسم مخطط الجسم الحر نهمل هذه القوى لأنها لا تؤثر على الجسم .

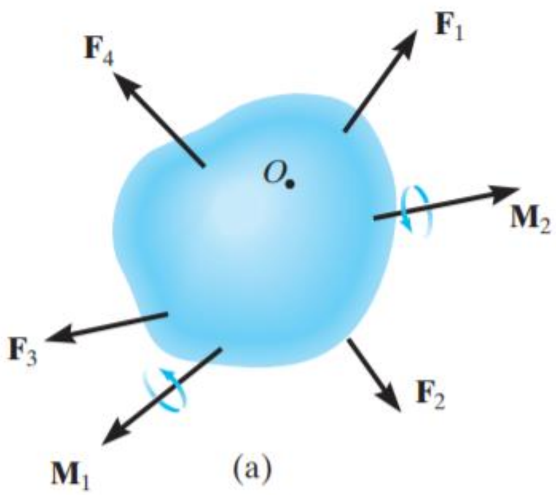
❖ **A support prevents the translation of a body in a given direction by exerting a force on the body in the opposite direction.**

❖ الدعائم التي تمنع من حركة الجسم في إتجاه محدد تولد قوة في الإتجاه المعاكس .

❖ الدعائم هي ما يستند عليها العنصر الإنشائي .

5 Equilibrium of a Rigid Body 207

❖ **If this resultant force and couple moment are both equal to zero, then the body is said to be in equilibrium. Mathematically, the equilibrium of a body is expressed as**



❖

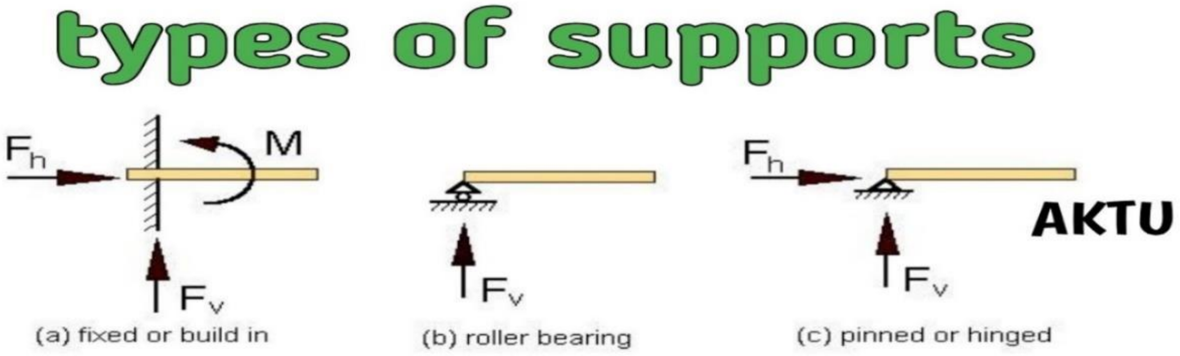
❖ إذا كانت محصلة القوى والعزوم يساوي صفر فإننا نستطيع أن نقول عن الجسم أنه متزن والإتزان نعبر عنه هكذا .

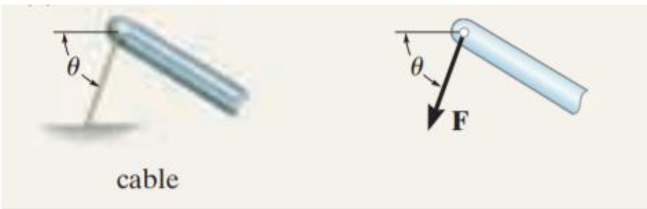
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$

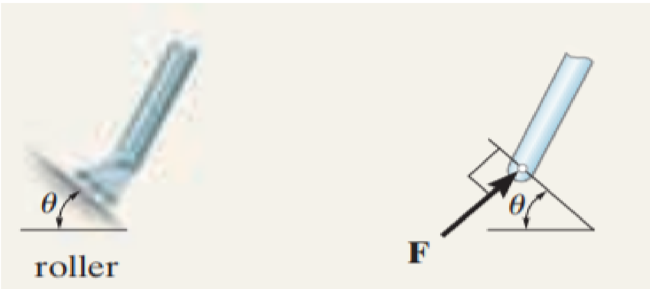
$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

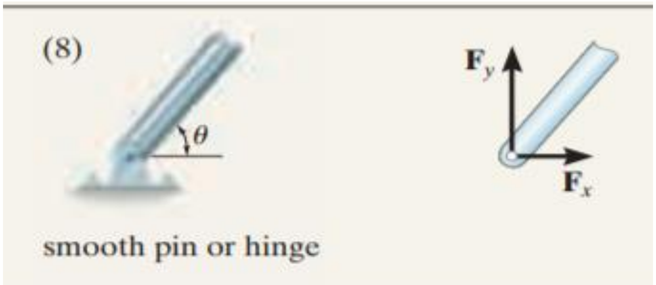
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

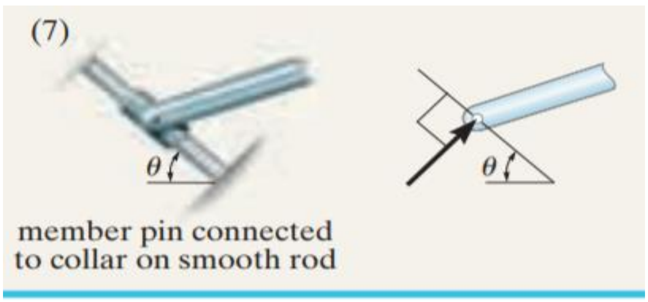
Type of support: حفظ زي اسمك

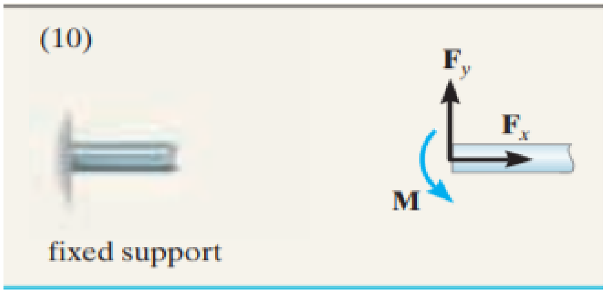




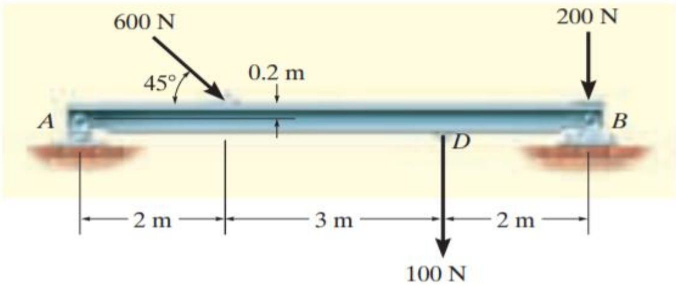








- **Example . Determine the horizontal and vertical components of reaction on the beam caused by the <u>pin at B and the rocker at A</u> as shown. Neglect the weight of the beam ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> يجب عليك تحليل القوى

600 cos 45°

600 sin 45°

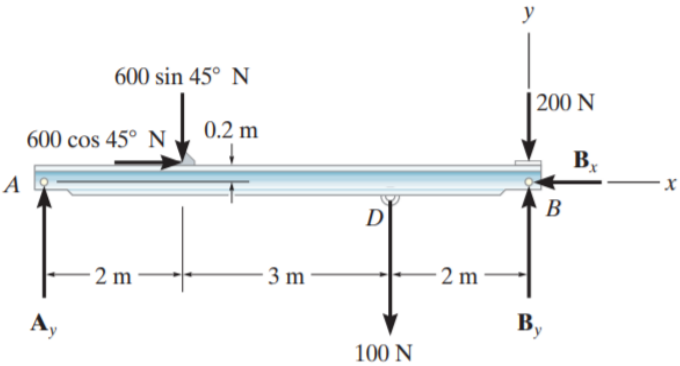
<u>الخطوة الثانية :</u> معرفة نوع الدعائم المتسخدمة في السؤال وبالعاده يقول لك السؤال وفي حال لا فلا بد من معرفتهم جيدا

pin at B and the rocker at A

Pin : يقيد حركتك في الإتجاه السيني والصادي لذلك يكون هناك رد فعل في الإتجاه السيني والصادي

Rocker(Roller) : يقيد حركتك فقط في الإتجاه الصادي لذلك فقط يكون هناك رد فعل فقط في الإتجاه الصادي فقط

<u>بعد عمل</u> الخطوة الأولى والثانية نرسم :



<u>الخطوة الثالثة :</u> نطبق معادلات الإتزان

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 600 \cos 45^\circ \text{ N} - B_x = 0$$

$$B_x = 424 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

لا يمكننا تطبيقها لأنه يوجد مجهولين لذلك علينا إستخدام العزم والأفضل <u>إستخدام العزم عند نقطة يوجد عندها أكبر عدد من المجاهيل</u>

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \sin 45^\circ \text{ N})(5 \text{ m})$$

$$- (600 \cos 45^\circ \text{ N})(0.2 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0$$

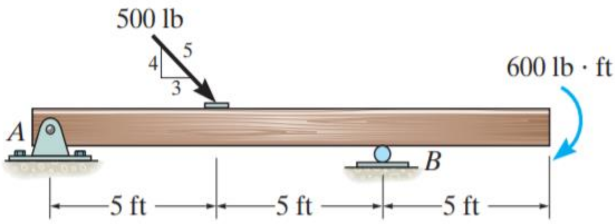
$$A_y = 319 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 319 \text{ N} - 600 \sin 45^\circ \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0$$

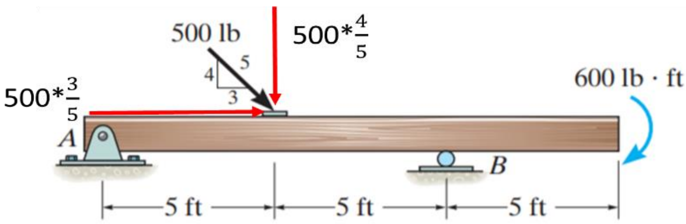
$$B_y = 405 \text{ N} \qquad \textit{Ans.}$$

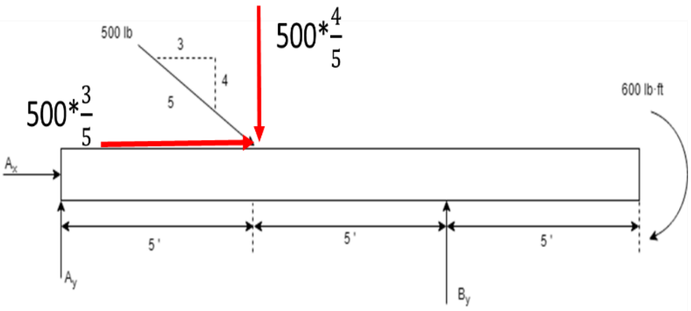
- **F5-1. Determine the horizontal and vertical components of reaction at the supports. Neglect the thickness of the beam ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> يجب عليك تحليل القوى

<u>الخطوة الثانية :</u> معرفة نوع الدعائم





الخطوة الثالثة : نطبق معادلات الإتزان

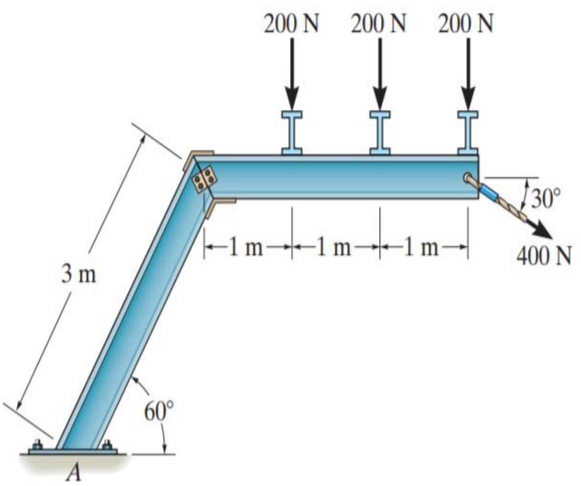
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 = A_x + 500(\frac{3}{5})$$
$$A_x = -300 \text{ lb}$$

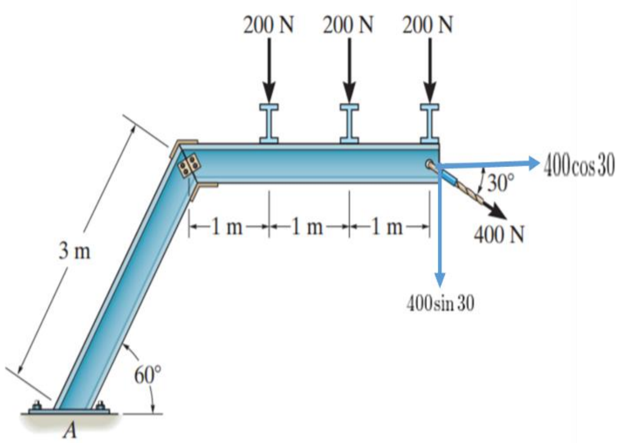
$$\Sigma M_A = 0 = B_y(10) - 600 - 500(\frac{4}{5})(5)$$
$$B_y = 260 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = 0 = A_y + 260 - 500(\frac{4}{5})$$
$$A_y = 140 \text{ lb}$$

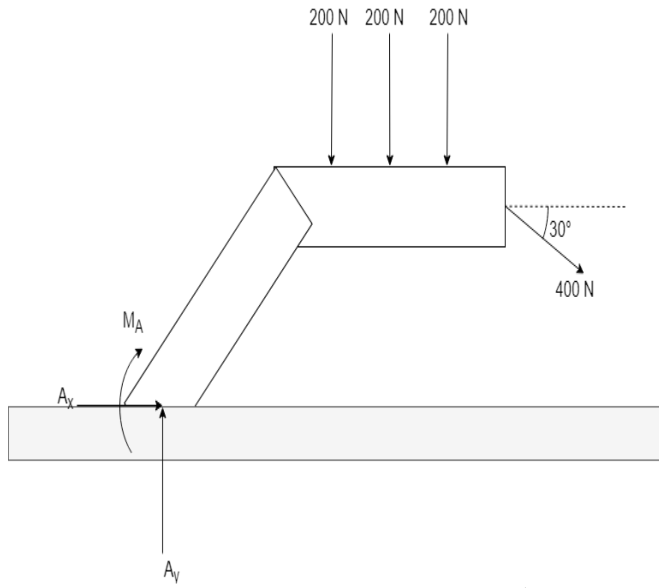
- **F5–4. Determine the components of reaction at the fixed support A Neglect the thickness of the beam ?**



Sol :



الخطوة الثانية : معرفة نوع الدعائم المتسخدمة في السؤال



Fixed : يقيد حركتك في الإتجاه السيني والصادي والقدرة على الدوران لذلك يكون هناك رد فعل في الإتجاه السيني والصادي والمومنت

الخطوة الثالثة : نطبق معادلات الإتزان

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

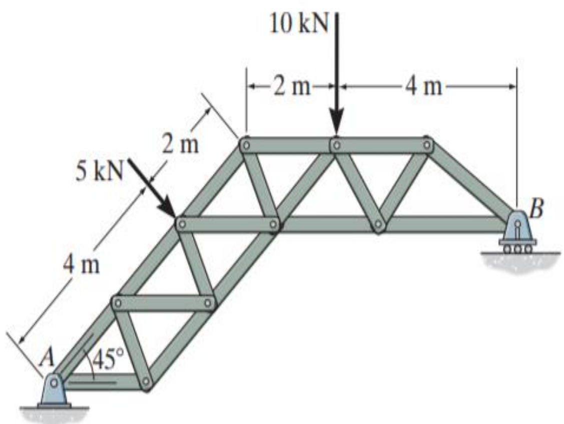
$$\Sigma F_x = 0 = A_x + 400\cos 30$$
$$A_x = 346 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 = A_x + 400\cos 30$$
$$A_x = 346 \text{ N}$$

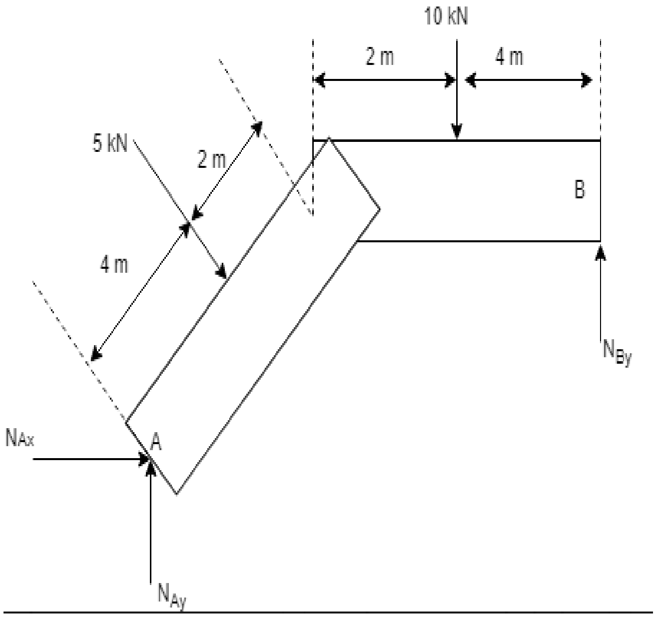
نحلل المسافة المائلة إلى مركبتين وكأنها قوة لكي نستطيع حساب العزم

$$\Sigma M_A = 0 = -400\cos 30(3\sin 60) - 400\sin 30(4.5) - 200(2.5) - 200(3.5) - 200(4.5)$$
$$M_A = 3900 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- **F5-3. The truss is supported by a pin at A and a roller at B. Determine the support reactions ?**



Sol :



$$\Sigma F_x = 0 \qquad N_{Ax} - 5\cos 45^\circ = 0$$

$$N_{Ax} = 3.53\ \text{kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_{Ay} - 5\sin 45^\circ - 10 + N_{By} = 0$$

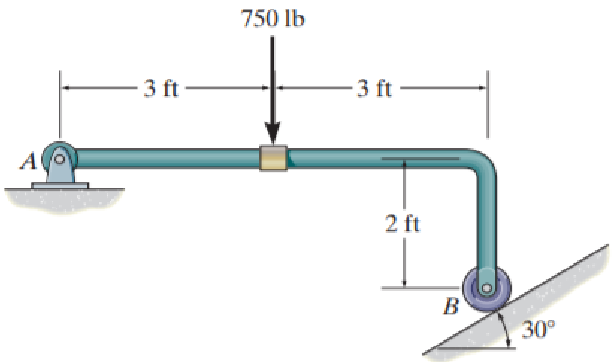
$$\sum \overset{\frown}{M_A} = 0$$

$$5 \cdot 4 + 10 \cdot (2 + 6\cos 45^\circ) - N_{By}(6 + 6\cos 45^\circ) = 0$$

$$N_{By} = 8.05\ \text{kN}$$

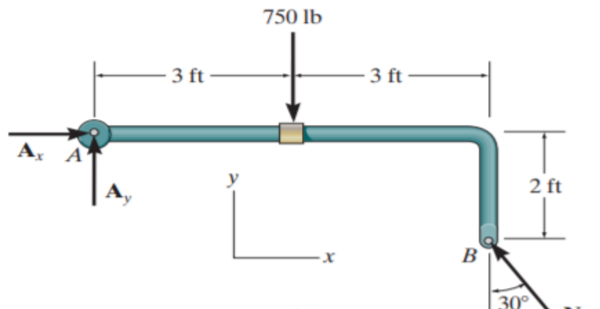
$$N_{Ay} = 5.48\ \text{kN}$$

❑ **Example . Determine the horizontal and vertical components of reaction on the member at the <u>pin A</u>, and the normal reaction at the roller B ?**

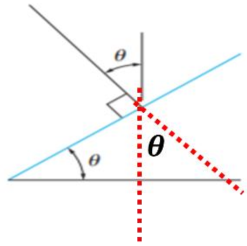


(a)

Sol :



(b)



<u>يوجد مجهولين لذلك علينا إستخدام العزم والأفضل إستخدام العزم عند نقطة يوجد عندها أكبر عدد من المجاهيل</u>

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$$

$$[N_B \cos 30^\circ](6\ \text{ft}) - [N_B \sin 30^\circ](2\ \text{ft}) - 750\ \text{lb}(3\ \text{ft}) = 0$$

$$N_B = 536.2\ \text{lb} = 536\ \text{lb}$$

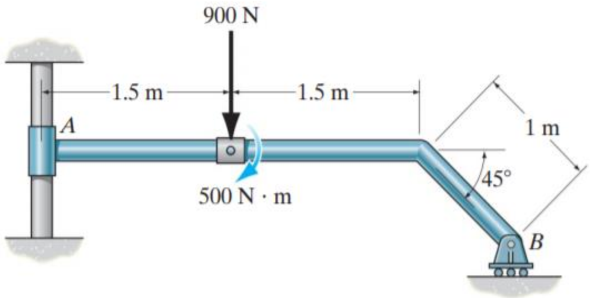
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - (536.2\ \text{lb})\sin 30^\circ = 0$$

$$A_x = 268\ \text{lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y + (536.2\ \text{lb})\cos 30^\circ - 750\ \text{lb} = 0$$

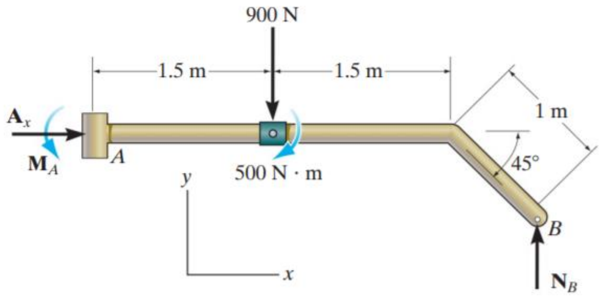
$$A_y = 286\ \text{lb}$$

- **Example5.12 . Determine the support reactions on the member The collar at A is fixed to the member and can slide vertically along the vertical shaft ?**



Sol :

Collar fixed to the member : يقيد حركتك في الإتجاه السيني ويقيد حركتك في الدوران لذلك هناك رد فعل في الإتجاه السيني و يوجد عزم أيضا . ومن باب التأكيد كتب السؤال أنه يمكنه الحركة في الإتجاه الصادي (العامودي)



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_B - 900\text{ N} = 0$$

$$N_B = 900\text{ N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$$

$$M_A - 900\text{ N}(1.5\text{ m}) - 500\text{ N}\cdot\text{m} + 900\text{ N}[3\text{ m} + (1\text{ m})\cos 45°] = 0$$

$$M_A = -1486\text{ N}\cdot\text{m} = 1.49\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

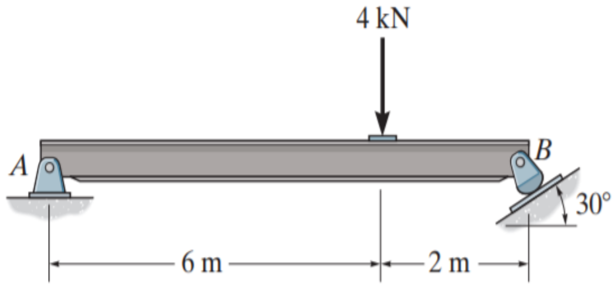
قيمة العزم السالب لا يعني حلك خاطئ لكنها تعني أنه عكس الفرض المطلوب

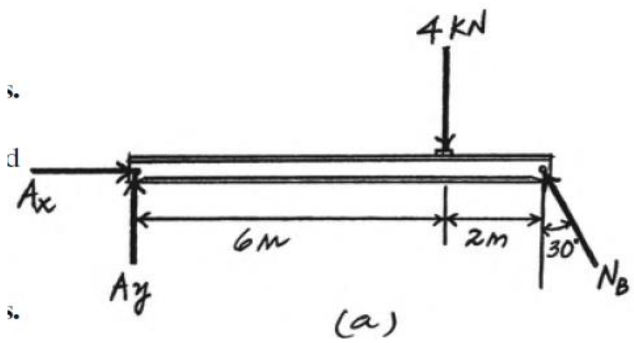
لا يشترط أخذ العزم عند هذه النقطة , تستطيع أخذ العزم في أي نقطة تريد لكنه يفضل دائما أخذ شئ سهل و واضح ويكون عنده مجاهيل

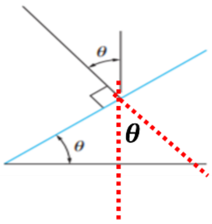
$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad M_A + 900\text{ N}[1.5\text{ m} + (1\text{ m})\cos 45°] - 500\text{ N}\cdot\text{m} = 0$$

$$M_A = -1486\text{ N}\cdot\text{m} = 1.49\text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

- **Prop5-12 . Determine the horizontal and vertical components of reaction at the pin *A* and the reaction of the rocker *B* on the beam**







$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0; \qquad N_B \cos 30°(8) - 4(6) = 0$$

$$N_B = 3.464\text{ kN} = 3.46\text{ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - 3.464 \sin 30° = 0$$

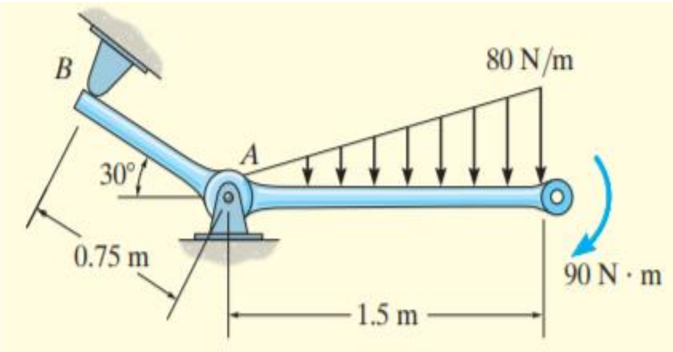
$$A_x = 1.73\text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y + 3.464 \cos 30° - 4 = 0$$

$$A_y = 1.00\text{ kN}$$

- **Example5.7 . The member shown in is pin connected at A and rests against a smooth support at B. Determine the horizontal and vertical components of reaction at the pin A**

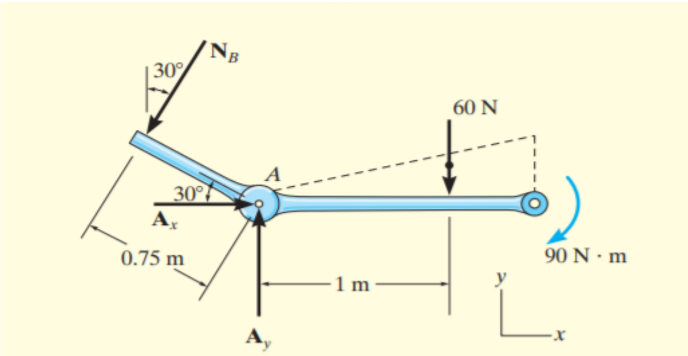
SOL:



The resultant of the distributed loading

$= \frac{1}{2} * 1.5 * 80 = 60N$

Smooth support : يشكل رد فعل عامودي على السطح (نقطة الإتصال)



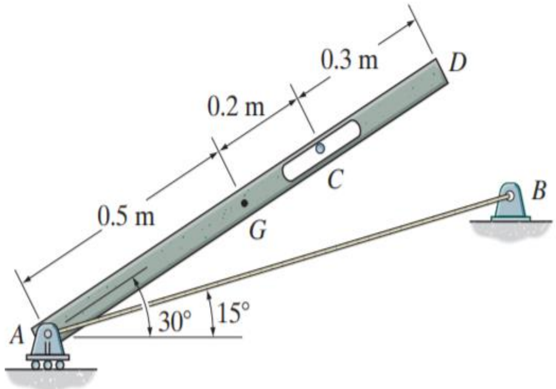
(b)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -90\ \text{N}\cdot\text{m} - 60\ \text{N}(1\ \text{m}) + N_B(0.75\ \text{m}) = 0$$
$$N_B = 200\ \text{N}$$

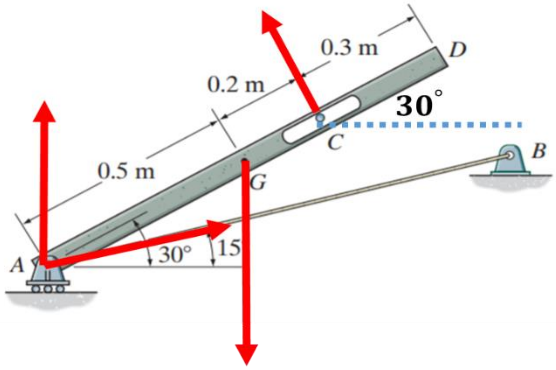
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 200 \sin 30°\ \text{N} = 0$$
$$A_x = 100\ \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 200 \cos 30°\ \text{N} - 60\ \text{N} = 0$$
$$A_y = 233\ \text{N}$$

- **F5-5. The 25-kg bar has a center of mass at G. If it is supported by a smooth peg at C, a roller at A, and cord AB, determine the reactions at these supports ?**



sol :



W=25*9.81

$$\sum M_A = 0$$

$$0.7\, F_C - 0.5\, W \sin 60 = 0$$

$$0.7\, F_C - 0.5 \times 245 \sin 60 = 0$$

$$F_C = 151.6\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad T_{AB} \cos 15 - F_C \sin 30 = 0$$

$$T_{AB} \cos 15 - 151.6 \sin 30 = 0$$

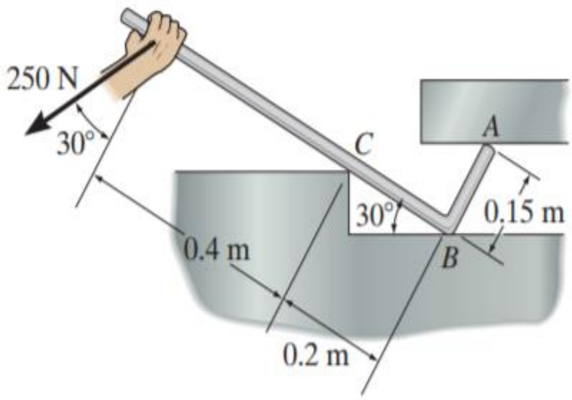
$$T_{AB} = 78.5\ N$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_A - W + T_{AB} \sin 15 + F_C \cos 30 = 0$$

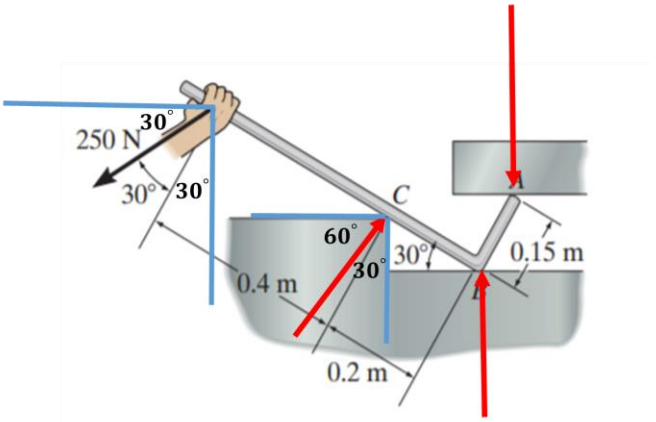
$$F_A - 245 + 78.5 \sin 15 + 151.6 \cos 30 = 0$$

$$F_A = 93.4\ N$$

- **F5-6. Determine the reactions at the smooth contact points A, B, and C on the bar ?**



sol : draw (FBD)

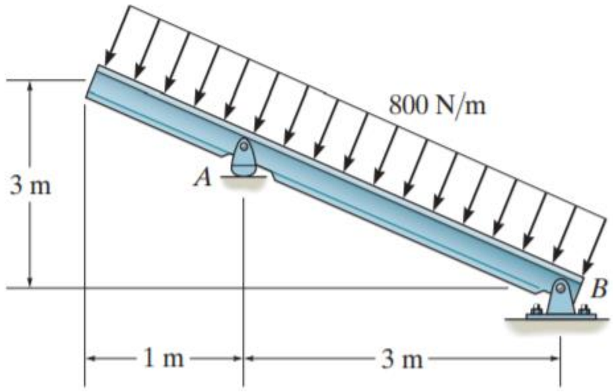


$$\Sigma F_x = 0 = N_C \sin 30 - 250 \sin 60$$
$$N_C = 433 \text{ N}$$

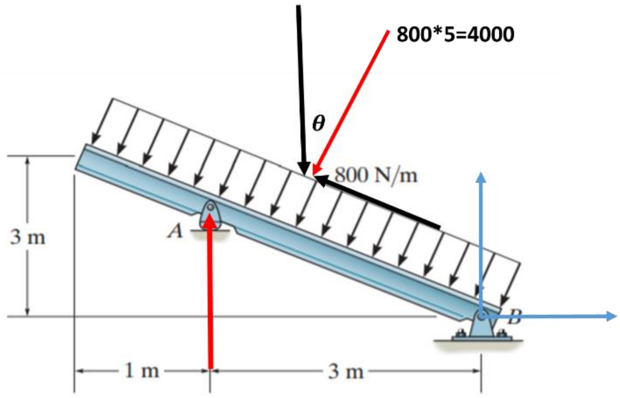
$$\Sigma M_B = 0 = N_A \sin 30(0.15) + (250 \cos 30)(0.6) - 433(0.2)$$
$$N_A = 577.4 \text{ N}$$

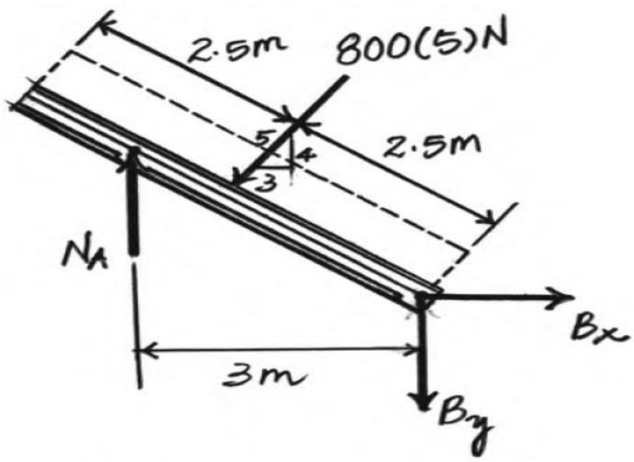
$$\Sigma F_y = 0 = N_B - 250 \cos 60 - 577.4 + 433 \cos 30$$
$$N_B = 327 \text{ N}$$

- **Prop5-14. Determine the reactions at the supports ?**



SOL :





تغير شكل الحمل لكي يسهل التعامل معه

$$5 = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ$$

$$\zeta + \Sigma M_B = 0;$$

$$800(5)(2.5) - N_A(3) = 0$$

$$N_A = 3333.33\ \text{N} = 3.33\ \text{kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$$

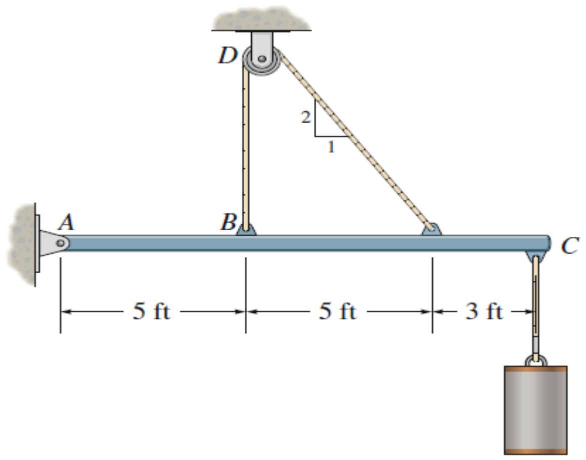
B_X- 800*5*$\sin 36.87 = 0$

B_X=2.40kN

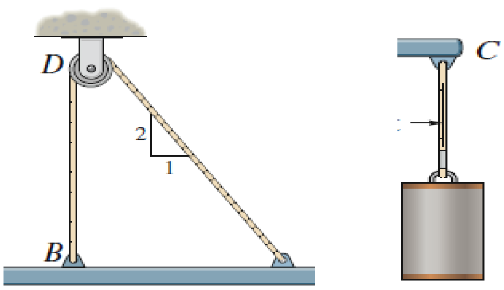
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

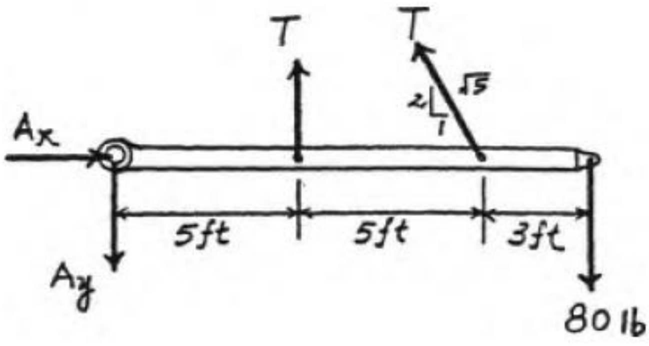
3333.33-800*5*$\cos 36.87$ - B_Y=0

- **Prop5-16 . Determine the tension in the cable and the horizontal and vertical components of reaction of the pin *A*. The pulley at *D* is frictionless and the cylinder weighs 80 lb ?**



SOL : DRAW FBD





$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad T(5) + T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)(10) - 80(13) = 0$$

$$T = 74.583\ \text{lb} = 74.6\ \text{lb}$$

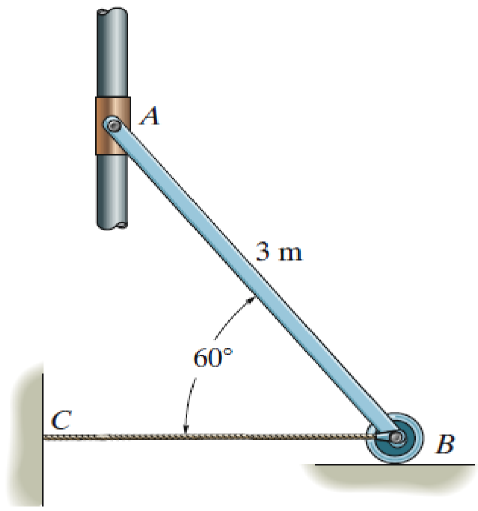
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - 74.583\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

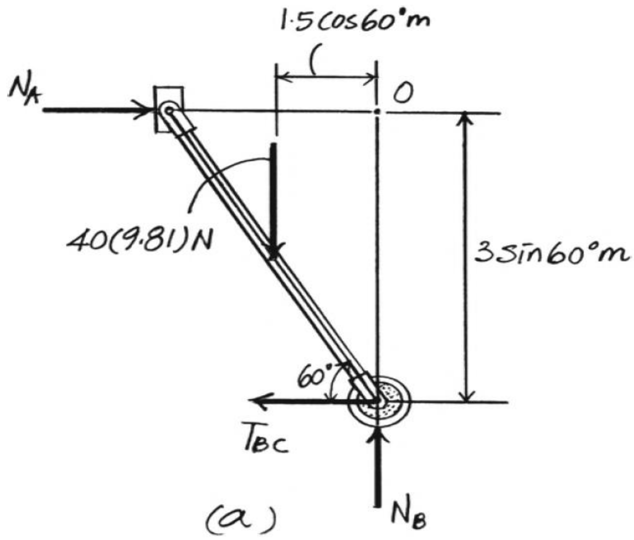
$$A_x = 33.4\ \text{lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 74.583 + 74.583\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 80 - B_y = 0$$

$$A_y = 61.3\ \text{lb}$$

- **Prop5-21. The uniform rod *AB* has a mass of 40 kg. Determine the force in the cable when the rod is in the position shown. There is a smooth collar at *A* ?**

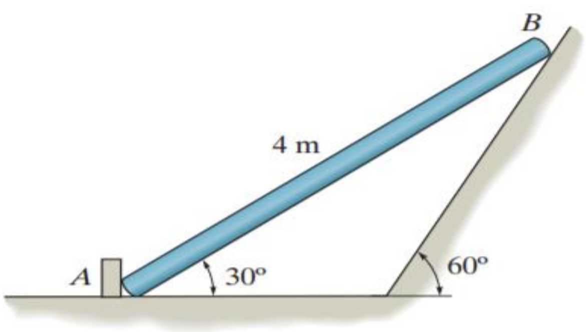




$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \quad 40(9.81)(1.5\cos 600°) - T_{BC}(3\sin 60°) = 0$$

$$T_{BC} = 113.28\text{ N} = 113\text{ N}$$

- **Prop5-27. Determine the reactions acting on the smooth uniform bar, which has a mass of 20 kg ?**



sol : draw FBD :

$$\sum F_X = 0$$

$$N_{AX} - N_B \sin 60° = 0$$

$$N_{AX} = N_B \sin 60°$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_{AY} + N_B \cos 60° - W = 0$$

$$N_{AY} = W - N_B \cos 60°$$

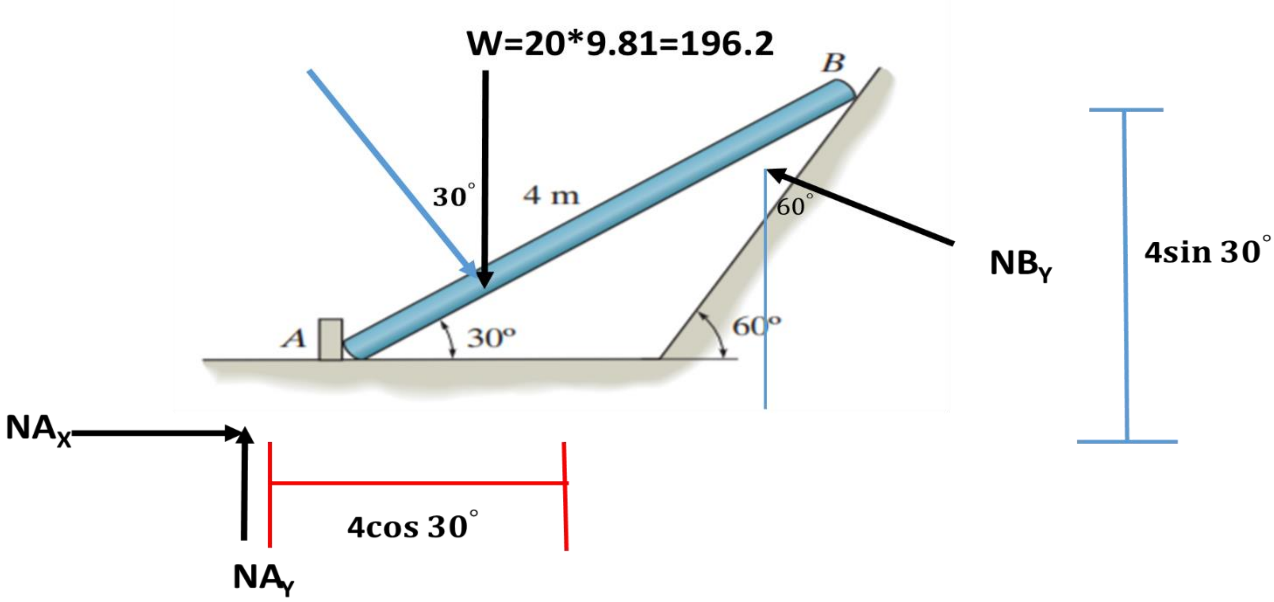
$$\overset{\curvearrowleft}{M_A} = 0$$

$$W \cdot 2 \cdot \cos 30° - N_B \sin 60° \cdot 4 \cdot \sin 30° - N_B \cos 60° \cdot 4 \cdot \cos 30° = 0$$

$$F_B = 98.1\text{ N}$$

$$N_{AX} = 84.95\text{ N}$$

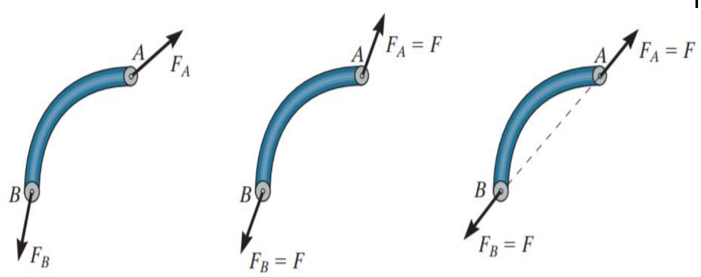
$$N_{AY} = 147.15\text{ N}$$



❖ **Two-Force Members : The two forces acting on the member must have the same magnitude, act in opposite directions, and have the same line of action, directed along the line joining the two points where these forces act.**

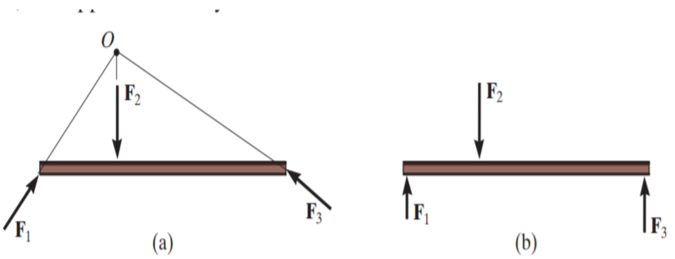
قوتان تؤثر على نفس الجزء لهما نفس المقدار , متعاكسات في الإتجاه , ويكون لهما نفس خط امتداد عمل القوة .

كيف يبسط النظام ؟ أنه بدل من وجود قوتين يصبحان قوة واحدة فقط وتخف المجاهيل .

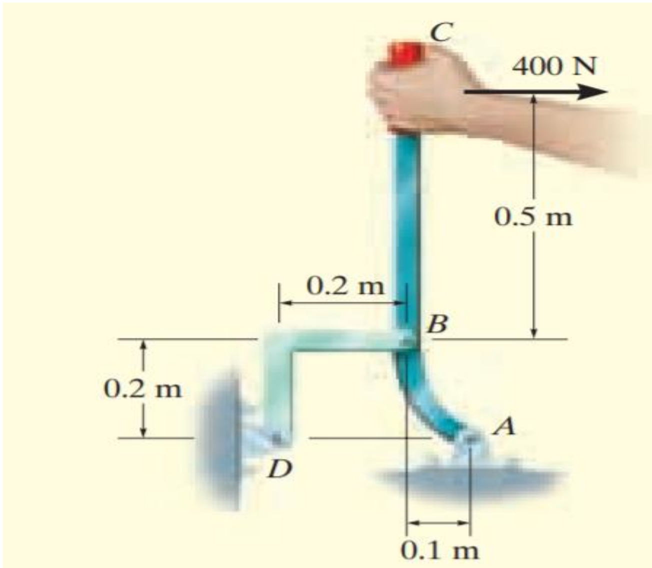


❖ **Three-Force Members : If a member is subjected to only three forces, it is called a three-force member. Moment equilibrium can be satisfied only if the three forces form a <u>concurrent or parallel force system.</u>**

❖ إذا كان الجزء عليها ثلاث قوى , ولكي نحقق الإتزان يجب أن يكون نظام القوى هكذا كما في الأسفل .



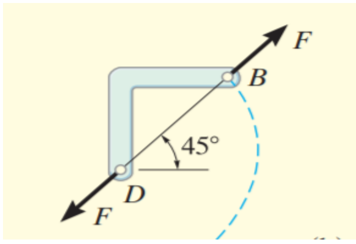
❑ **Example. The lever ABC is pin supported at A and connected to a short link BD If the weight of the members is negligible, determine the force of the pin on the lever at A ?**



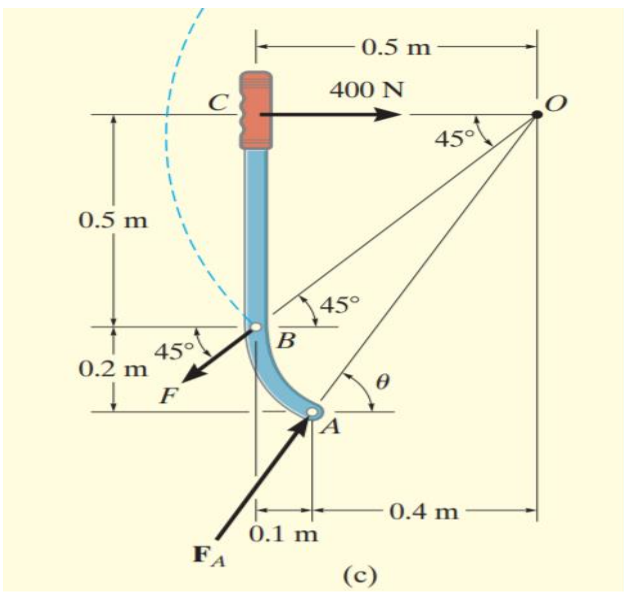
sol :

BD : Two force member

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.2}{0.2}\right) = 45^{\circ}$$



ABC : Three force member



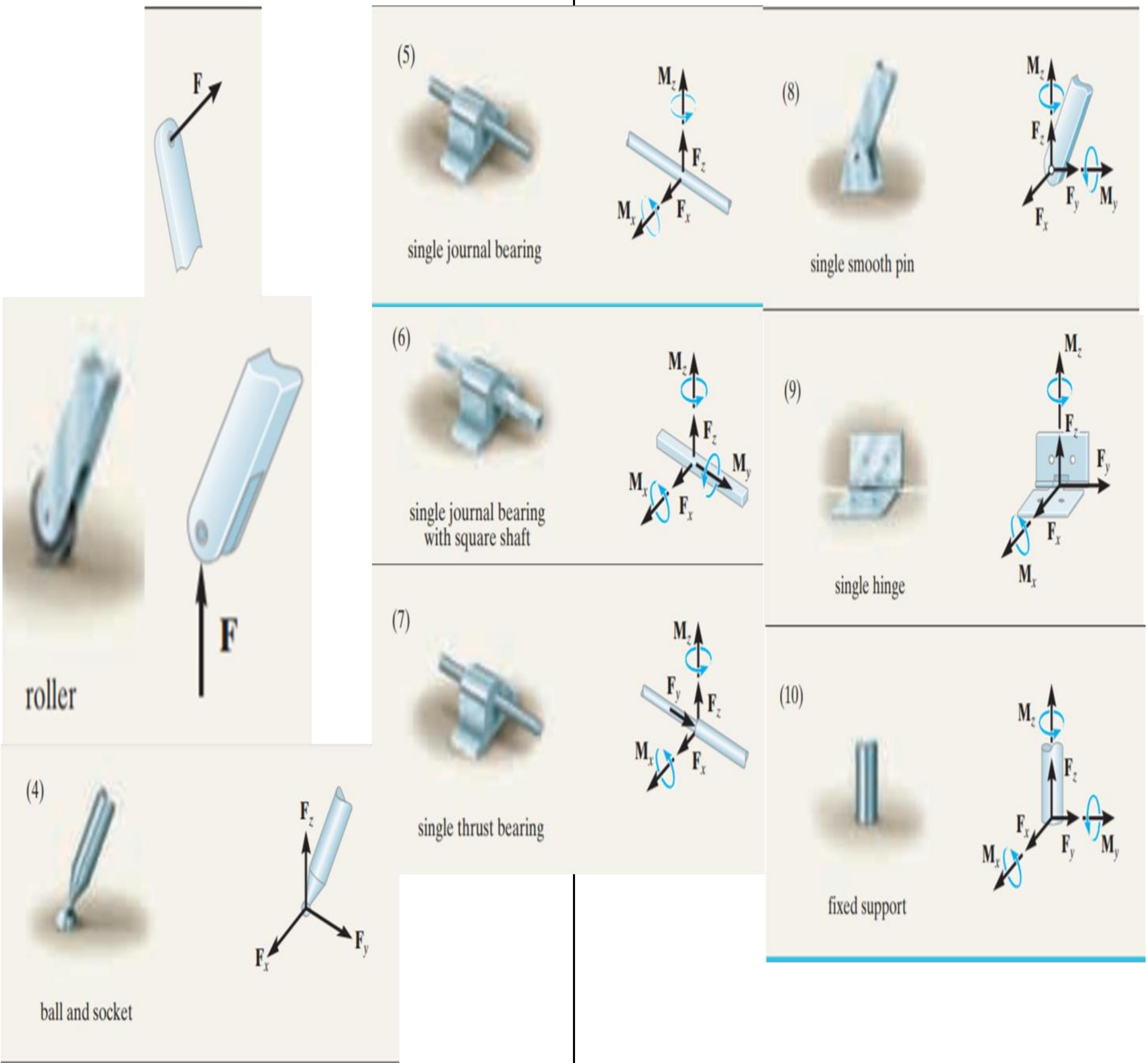
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_A \cos 60.3^\circ - F\cos 45^\circ + 400\text{ N} = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad F_A \sin 60.3^\circ - F\sin 45^\circ = 0$$

$$F_A = 1.07\text{ kN}$$
$$F = 1.32\text{ kN}$$

Support in 3d :



لكي يتحقق الإتزان في الثلاثي الأبعاد لا بد من توافر الشروط الستة , سابقا كان فقط ثلاثة شروط لأننا كنا في ثنائي البعد .

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

بعض المصطلحات الهامة التي يجب عليك معرفتها وهي سهلة جدا ومنطقية وقد يأتي سؤال عليه لذلك عليكم الإطلاع عليه .

❖ **Statical Determinacy :**

1- Statically determinate

عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات التي يمكننا إستخدامهم

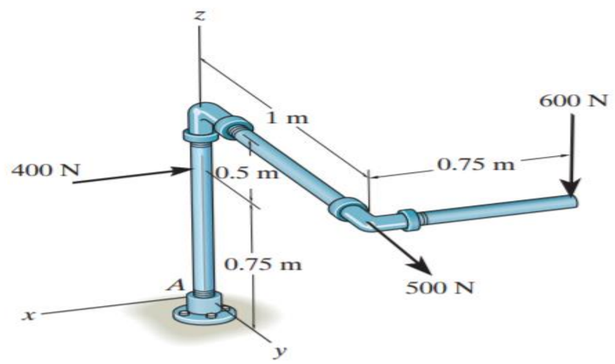
2- Statically indeterminate

عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات التي يمكننا إستخدامهم وهو له درجات ونعرف الدرجة عن طريق طرح عدد المجاهيل من عدد المعادلات

6unknown , 3 known

6-3 =3 from Statically indeterminate

❑ **Prop5-64. Determine the components of reaction at the fixed support A. The 400 N, 500 N, and 600 N forces are parallel to the x, y, and z axes, respectively ?**



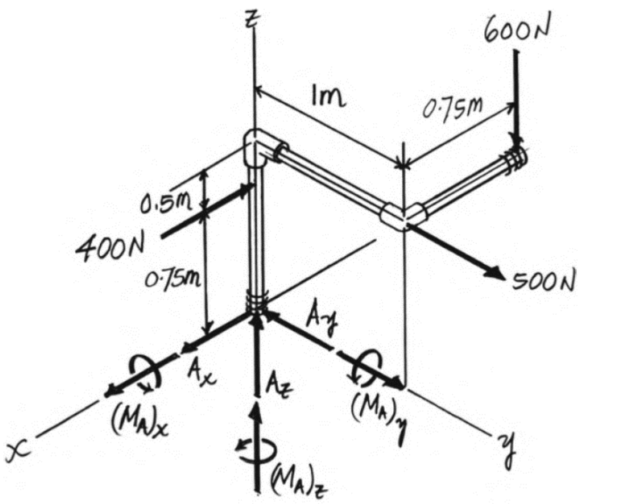
الخطوة الأولى : يجب عليك تحليل القوى إن كانت في صيغة الكارتيزن أو جعلها بصيغة الكارتيزن ومن ثم تحليلها

جميع القوة موازية ل المحاور أي يعني إنهم بصيغة الكارتيزن

الخطوة الثانية : معرفة نوع الدعائم المتسخدمة في السؤال

Fixed-support : يقيد حركتك في كامل الإتجاهات ويقيدك في الدوران في كامل الإتجاهات لذلك سيكون لدينا ردود أفعال في ثلاثة محاور و سيكون ردود فعل عزم أيضا في ثلاثة محاور

الخطوة الثالثة : نطبق معادلات الإتزان



$$\Sigma F_x = 0; \quad A_x - 400 = 0 \quad A_x = 400\text{ N}$$
$$\Sigma F_y = 0; \quad 500 - A_y = 0 \quad A_y = 500\text{ N}$$
$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 600 = 0 \quad A_z = 600\text{ N}$$

"طريقة حل سريعه " إذا لم تعجبك فاستخدم الطريقة التي تم أخذها في الشابتر الرابع .

انظر للصفحة التالية

$$\Sigma M_x = 0; \quad (M_A)_x - 500(1.25) - 600(1) = 0$$
$$(M_A)_x = 1225\text{ N}\cdot\text{m} = 1.225\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad (M_A)_y - 400(0.75) - 600(0.75) = 0$$
$$(M_A)_y = 750\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad (M_A)_z = 0$$

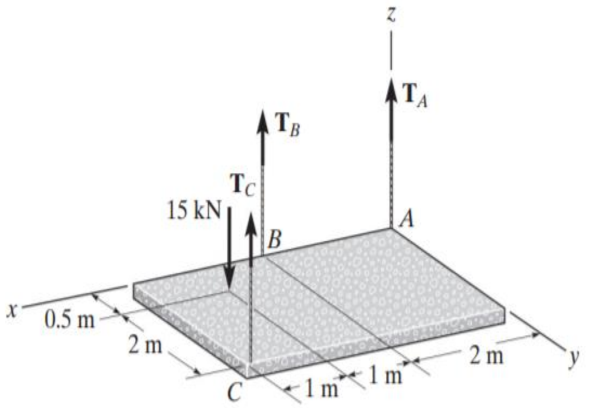
<u>خلاصة الكلام (مهم جدا)</u>

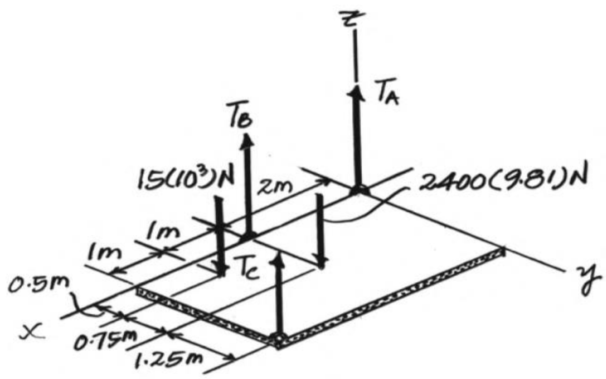
<u>إذا أردنا العزم ل المحور السيني :</u> وكانت القوة الموجود مركبة صادية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور الصادي

<u>إذا أردنا العزم ل المحور الصادي :</u> وكانت القوة الموجود مركبة سينية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور الزيد وإذا كانت القوة موجودة في المركبة الزيد إضرب بالمسافة الموازية ل المحور السيني

<u>إذا أردنا العزم ل المحور الزيد :</u> وكانت القوة الموجود مركبة صادية مباشرة إضرب ب المسافة الموازية ل المحور السيني وإذا كانت القوة موجودة في المركبة السينية إضرب بالمسافة الموازية ل المحور الصادي

- ☐ **P5-67. The uniform concrete slab has a mass of 2400 kg. Determine the tension in each of the three parallel supporting <u>cables</u> when the slab is held in the horizontal plane ?**





$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X & Y & Z \\ F_X & F_Y & F_Z \end{vmatrix}$$

الجداول السابقة ثابتة (حفظ)

<u>العزم الخاص بالمحور السينى :</u> بداية نلغي القوى التي لا تعمل عزم ويبقى القوى التي تعمل العزم ونفعل هكذا مع كامل المحاور .

القوى تكون موازية للمحاور أي يعني أنها تمتلك فقط مركبة واحدة والباقي صفروهذا متفقين عليه وأيضا نعرف إذا كان الصف الأول صفر سيكون ليس له قيمة و هذا متفقين عليه

إذا كانت القوة موازية ل المحور السيني إذن مركبة الصادية والزيد تساوي أصفار وهكذا ل باقي القوى ومتجه الموقع كذلك .

نريد حساب عزم المحور السيني والقوى الداخلة هم 500 وهي ل المحور الصادي و600 ل المحور الزيد

القوة 500 نهتم بالإحداثي الزيد فقط , مع الممارسة ستصبح تحسبها ذهنيا دون كتابة

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 500 & 0 \end{vmatrix}$$

القوة 600 نهتم بالإحداثي الصداي فقط

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

نريد حساب <u>عزم المحور الصادي</u> والقوى الداخلة هم 400 وهي ل المحور السيني و600 ل المحور الزيد

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 400 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & T_C \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 23544 \end{vmatrix}$$

س

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 14.72 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & 23544 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ X & Y & Z \\ 0 & 0 & T_B \end{vmatrix}$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad T_C(2.5) - 2400(9.81)(1.25) - 15(10^3)(0.5) = 0$$

$$T_C = 14{,}772 \text{ N} = 14.8 \text{ kN}$$

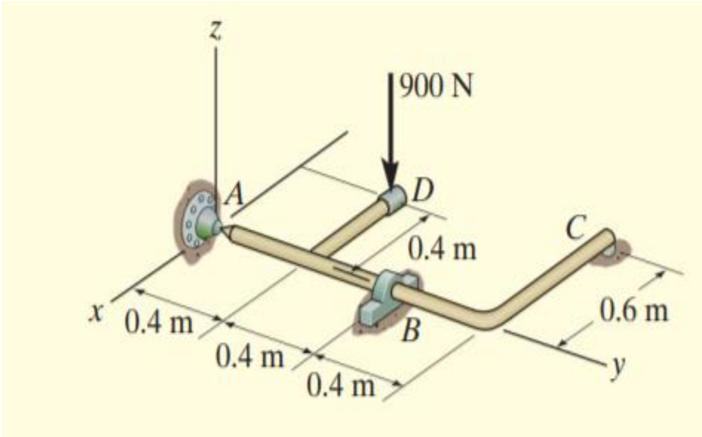
$$\Sigma M_y = 0; \quad T_B(2) + 14{,}772(4) - 2400(9.81)(2) - 15(10^3)(3) = 0$$

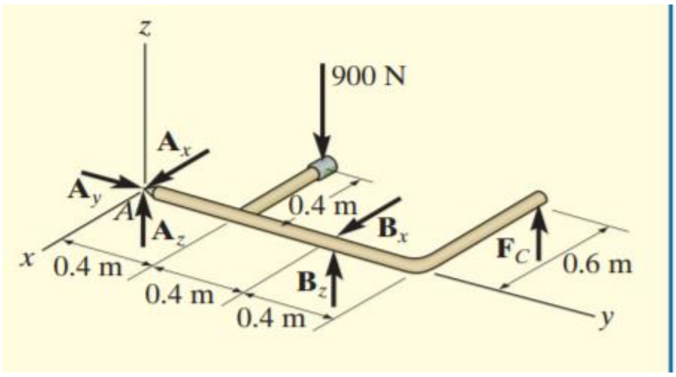
$$T_B = 16{,}500 \text{ N} = 16.5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad T_A + 16{,}500 + 14{,}772 - 2400(9.81) - 15(10^3) = 0$$

$$T_A = 7272 \text{ N} = 7.27 \text{ kN}$$

- **Example5-16. Determine the components of reaction that the ball-and-socket joint at A, the smooth journal bearing at B, and the roller support at C exert on the rod ?**





$$\Sigma F_y = 0; \qquad A_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0; \qquad -B_x(0.8 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad A_x + 0 = 0 \qquad A_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0; \qquad F_C(0.6 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$$

$$F_C = 600 \text{ N}$$

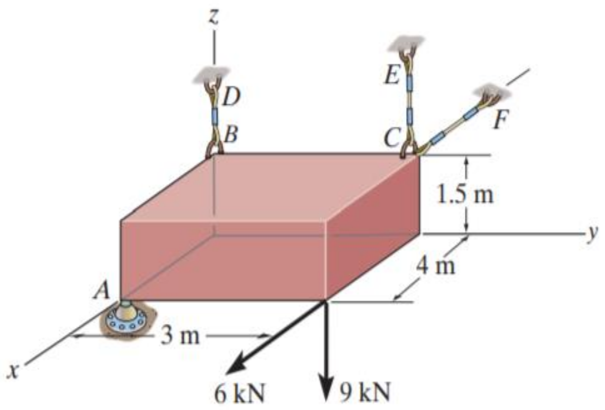
$$\Sigma M_x = 0; \qquad B_z(0.8 \text{ m}) + 600 \text{ N}(1.2 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$$

$$B_z = -450 \text{ N}$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z + (-450 \text{ N}) + 600 \text{ N} - 900 \text{ N} = 0$$

$$A_z = 750 \text{ N}$$

- F5-11 . Determine the force developed in the short link BD, and the tension in the cords CE and CF, and the reactions of the ball-and-socket joint A on the block ?

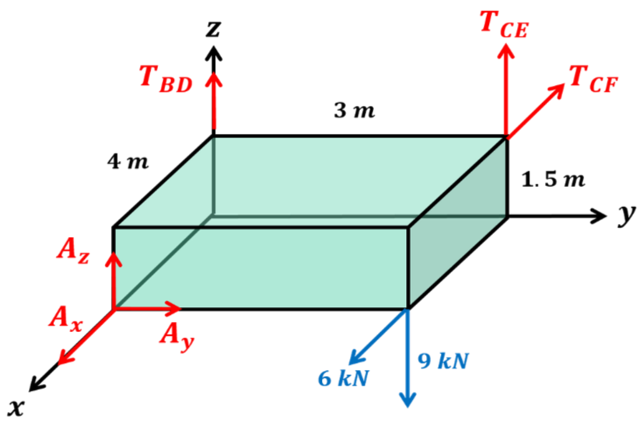


$\Sigma F_y = 0$

$A_y + 0 = 0$ $A_y = 0$

$\Sigma M_x = 0$

$T_{CE} * 3 - 9 * 3 = 0$ $T_{CE} = 9$



$\Sigma M_z = 0$

$0 * 4 - 3 * T_{FC} - 6 * 3 = 0$ $T_{FC} = -6$

$\Sigma M_y = 0$

$-A_z * 4 + 9 * 4 - 6 * 1.5 = 0$

$A_z = 6.75$

$\Sigma F_z = 0$

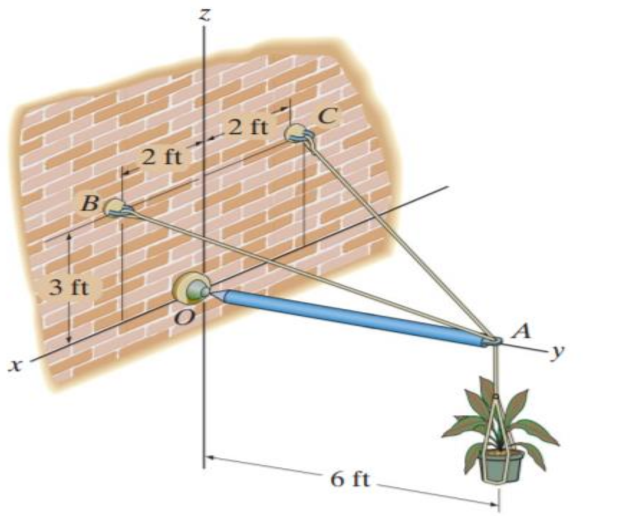
$6.75 + F_{BD} - 9 + 9 = 0$

$F_{BD} = -6.75$

$\Sigma F_x = 0$ $A_x + 6 - 6 = 0$

$A_x = 0$

- Example5-17. The boom is used to support the 75-lb flowerpot. Determine the tension developed in wires AB and AC ?

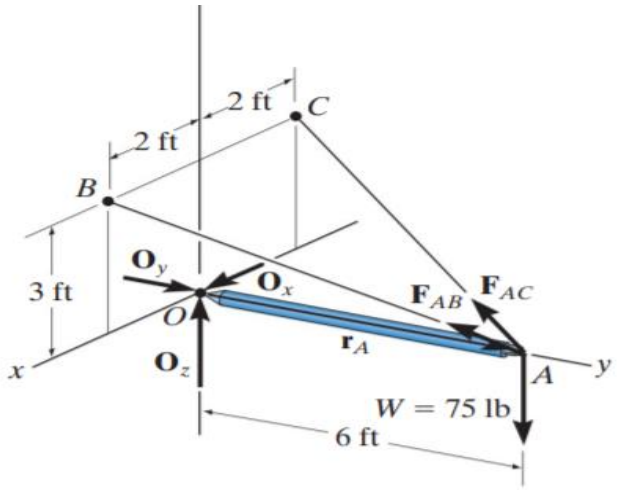


Sol :

الخطوة الأولى : يجب عليك تحليل القوى إن كانت في صيغة الكارتيزن أو جعلها ب صيغة الكارتيزن ومن ثم تحليلها

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = F_{AB}\left(\frac{\{2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\ \text{ft}}{\sqrt{(2\ \text{ft})^2 + (-6\ \text{ft})^2 + (3\ \text{ft})^2}}\right)$$
$$= \tfrac{2}{7}F_{AB}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AB}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AB}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = F_{AC}\left(\frac{\{-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\ \text{ft}}{\sqrt{(-2\ \text{ft})^2 + (-6\ \text{ft})^2 + (3\ \text{ft})^2}}\right)$$
$$= -\tfrac{2}{7}F_{AC}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AC}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AC}\mathbf{k}$$



$$\Sigma M_O = 0; \qquad \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$(6\mathbf{j}) \times \left[\left(\tfrac{2}{7}F_{AB}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AB}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AB}\mathbf{k}\right) + \left(-\tfrac{2}{7}F_{AC}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AC}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AC}\mathbf{k}\right) + (-75\mathbf{k})\right] = \mathbf{0}$$

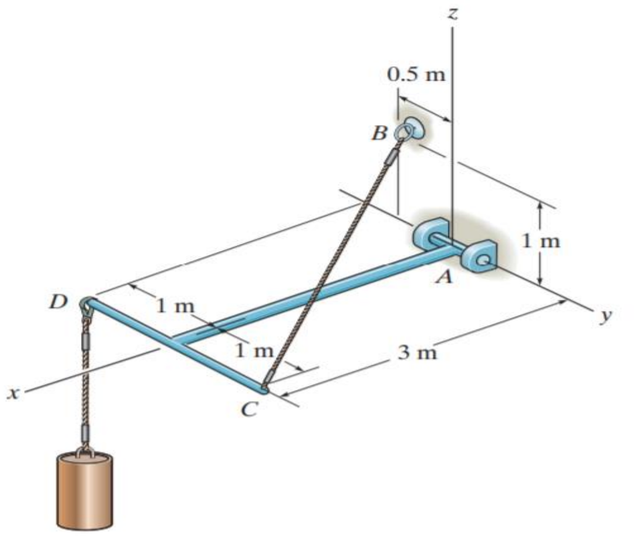
$$\left(\tfrac{18}{7}F_{AB} + \tfrac{18}{7}F_{AC} - 450\right)\mathbf{i} + \left(-\tfrac{12}{7}F_{AB} + \tfrac{12}{7}F_{AC}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \qquad \tfrac{18}{7}F_{AB} + \tfrac{18}{7}F_{AC} - 450 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0; \qquad -\tfrac{12}{7}F_{AB} + \tfrac{12}{7}F_{AC} = 0$$

$$F_{AB} = F_{AC} = 87.5 \text{ lb}$$

- **Prop5-76. The member is supported by a pin at A and cable BC. Determine the components of reaction at these supports if the cylinder has a mass of 40 kg ?**



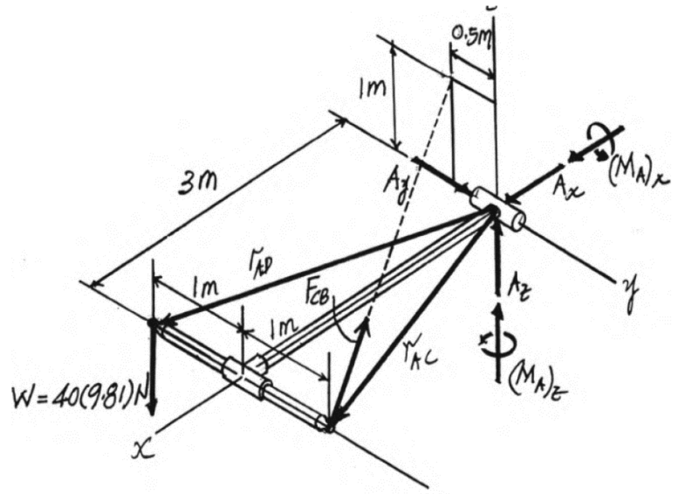
$$\mathbf{F}_{CB} = F_{CB}\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right) = F_{CB}\left[\frac{(0-3)\mathbf{i} + (-0.5-1)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(0-3)^2 + (-0.5-1)^2 + (1-0)^2}}\right]$$

$$= -\frac{6}{7}F_{CB}\mathbf{i} - \frac{3}{7}F_{CB}\mathbf{j} + \frac{2}{7}F_{CB}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = \{-40(9.81)\mathbf{k}\}\text{ N} = \{-392.4\mathbf{k}\}\text{ N.}$$

$$F_A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_A = (M_A)_x\mathbf{i} + (M_A)_z\mathbf{k}$$



$$\Sigma F_y = 0 \qquad -\frac{3}{7}F_{CB} + A_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \qquad \frac{2}{7}F_{CB} + A_z - 392.4 = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad -\frac{6}{7}F_{CB} + A_x = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = 0; \qquad \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}_{CB} + \mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{W} + \mathbf{M}_A = 0$$

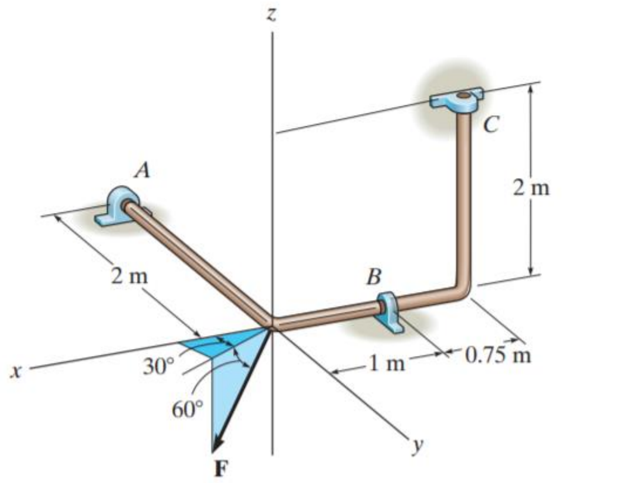
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{7}F_{CB} & -\frac{3}{7}F_{CB} & \frac{2}{7}F_{CB} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -392.4 \end{vmatrix} + (M_A)_x\mathbf{i} + (M_A)_z\mathbf{k} = 0$$

$$\left[\frac{2}{7}F_{CB} + 392.4 + (M_A)_x\right]\mathbf{i} + \left(-\frac{6}{7}F_{CB} + 1177.2\right)\mathbf{j} + \left[-\frac{9}{7}F_{CB} + \frac{6}{7}F_{CB} + (M_A)_z\right]\mathbf{k} = 0$$

$$\frac{2}{7}F_{CB} + 392.4 + (M_A)_x = 0$$
$$-\frac{6}{7}F_{CB} + 1177.2 = 0$$
$$-\frac{9}{7}F_{CB} + \frac{6}{7}F_{CB} + (M_A)_z = 0$$

$$\frac{2}{7}F_{CB} + 392.4 + (M_A)_x = 0$$
$$-\frac{6}{7}F_{CB} + 1177.2 = 0$$
$$-\frac{9}{7}F_{CB} + \frac{6}{7}F_{CB} + (M_A)_z = 0$$

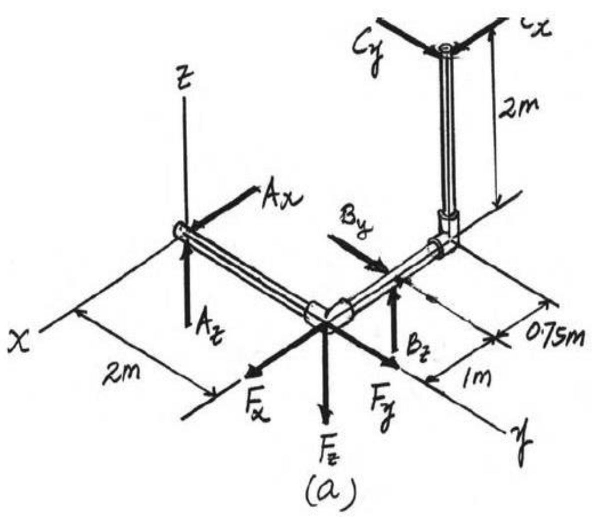
- **Prop5-73. The bent rod is supported at A, B, and C by smooth journal bearings. Determine the components of reaction at the bearings if the rod is subjected to the force F = 800 N. The bearings are in proper alignment and <u>exert only force reactions on the rod</u>?**



$$F_x = 800 \cos 60° \cos 30° = 346.41 \text{ N}$$

$$F_y = 800 \cos 60° \sin 30° = 200 \text{ N}$$

$$F_z = 800 \sin 60° = 692.82 \text{ N}$$



$\Sigma M_x = 0; \quad -C_y(2) + B_z(2) - 692.82\,(2) = 0$

$\Sigma M_y = 0; \quad B_z(1) + C_x(2) = 0$

$\Sigma M_z = 0; \quad -C_y(1.75) - C_x(2) - B_y(1) - 346.41(2) = 0$

$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + C_x + 346.41 = 0$

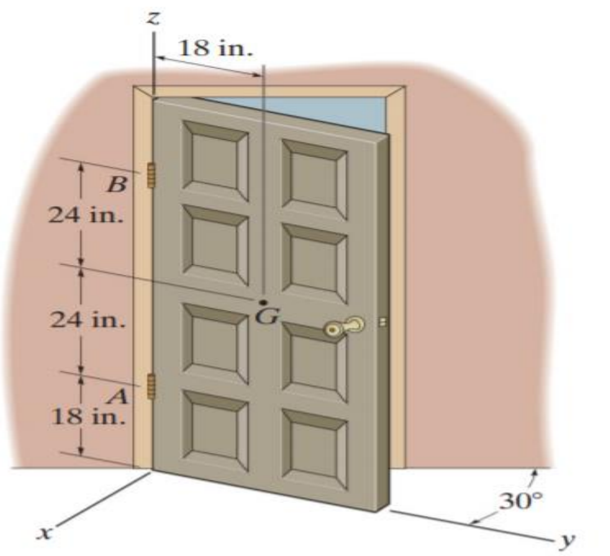
$\Sigma F_y = 0; \quad 200 + B_y + C_y = 0$

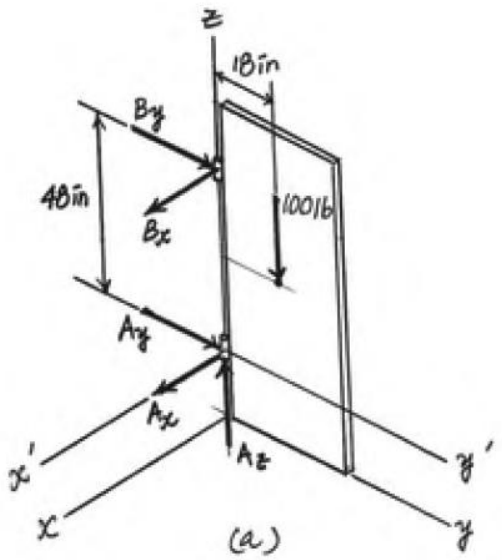
$\Sigma F_z = 0; \quad A_z + B_z - 692.82 = 0$

$C_y = 800\text{ N} \quad B_z = -107.18\text{ N} = 107\text{ N} \quad B_y = 600\text{ N}$

$C_x = 53.59\text{ N} = 53.6\text{ N} \quad A_x = 400\text{ N} \quad A_z = 800\text{ N}$

- **Prop5-68 . The 100-lb door has its center of gravity at G. Determine the components of reaction at <u>hinges</u> A and B if hinge B resists only <u>forces in the x and y directions and A resists forces in the x, y, z directions</u>?**





$$\Sigma F_z = 0 = A_z - 100$$
$$A_z = 100 \text{ lb}$$

$$\Sigma M_x = 0 = -100(18) - B_y(48)$$
$$B_y = -37.5 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -37.5 + A_y$$
$$A_y = 37.5 \text{ lb}$$

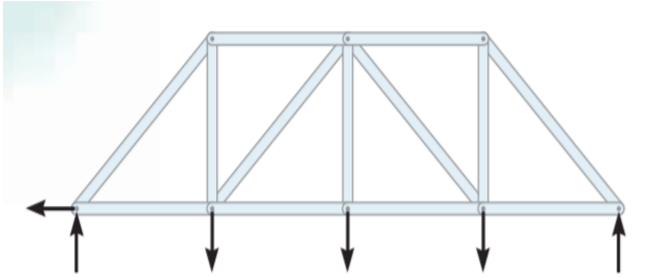
$$\Sigma F_x = 0 = A_x$$

$B_X=0$

6 Structural Analysis 273

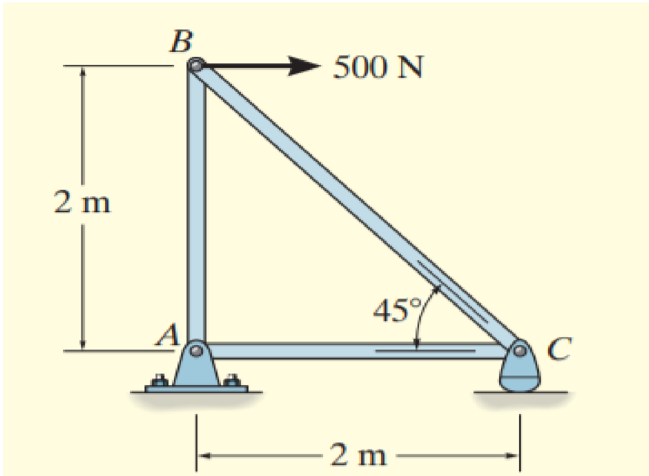
- ❖ **A Truss is a structure composed of slender members joined together at their end points.**
- ❖ **الجملون هو جسم إنشائي مكون من إتحاد مجموعة من الأجزاء متصلة في نهايتها .**

- ❖ **Method of joints :** يتطلب عليك معرفة القوى في كامل الأجزاء وهي طويلة ومملة
- ❖ **Method of sections :** أن يطلب منك القوة في أجزاء محددة , هنا يمكنك إستخدام الطريقة الأولى لكن كم ستؤخذ وقت ؟ لذلك نستخدم هذه الطريقة .



Bridge truss

❑ **Example6.1. Determine the force in each member of the truss shown in and indicate whether the members are in tension or compression ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> إنظر إلى السؤال نظرة سريعه وعند كل نقطة ننظر إلى ردود الأفعال والقوى , ونختار نقطة فيها معلوم وليس فيها مجاهيل كثيرة

A: يوجد لديها مجهولين

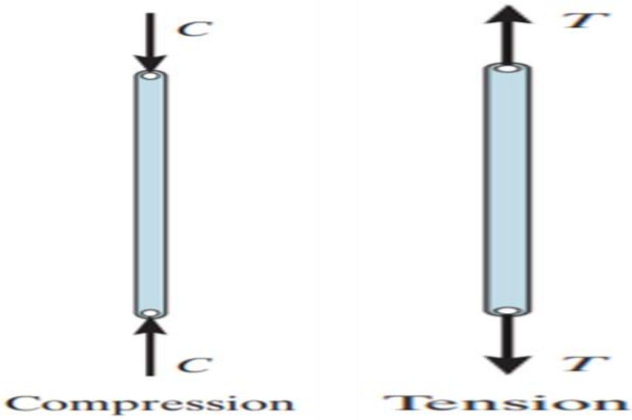
B: لا يوجد مجاهيل ويوجد معلوم واحد فقط لذلك نبدأ بها ولكن هذا ليس شرطا <u>دائما</u> , ستفهم القصد عندما يكون النظام أكثر تعقيدا .

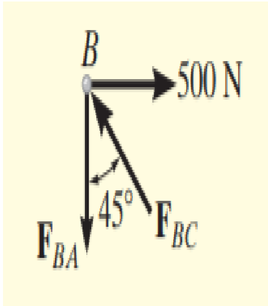
C: يوجد لديها مجهول

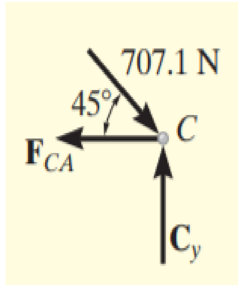
توضيح بخصوص الشد والضغط

يكون السهم بإتجاه النقطة : (ضغط) C

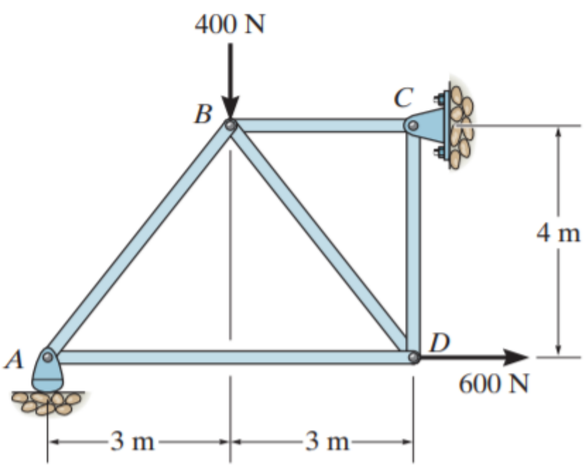
يكون السهم بعيدا عن النقطة : (شد) T







- **Example. Determine the force in each member of the truss Indicate whether the members are in tension or compression ?**

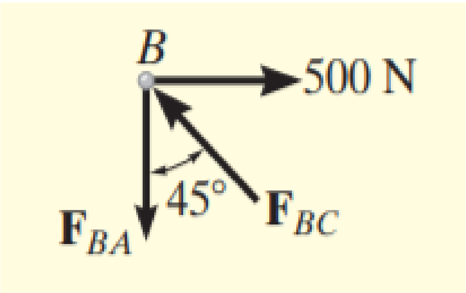


الخطوة الأولى: إنظر إلى السؤال نظرة سريعه وعند كل نقطة ننظر إلى ردود الأفعال والقوى , ونختار نقطة فيها معلوم وليس فيها مجاهيل كثيرة

A: يوجد لديها مجهول واحد فقط

B: لا يوجد مجاهيل ويوجد معلوم واحد فقط لذلك نبدأ بها

الخطوة الثانية : عند كل نقطة نطبق معادلات الإتزان ونقوم بفرض القوى , شد أو ضغط (فرض) إذا كانت الإشارة الموجبة فالفرض صحيح وإذا كانت الإشارة سالبة ف فرضنا خاطئ وعن نفسي أفضل دائما أن يكون الفرض دائما شد .



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad 500\text{ N} - F_{BC}\sin 45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 707.1\text{ N (C)}$$

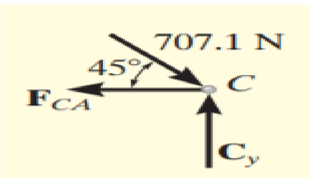
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad F_{BC}\cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 500\text{ N (T)}$$

ملاحظة : نصيحتي لكم دائما إفرضوا القوة هي قوة شد وإذا كان الناتج بالسالب فاكتب القيمة فقط دون إشارة وبجانبها هي شد أو ضغط وسأوضح ذلك في المثال

$$500+F_{BC}\sin 45^\circ = 0$$

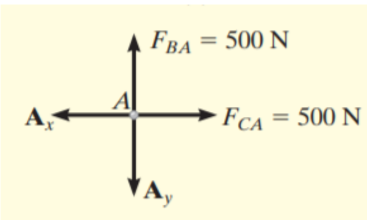
F_{BC}=-707.1=707.1 (c)

التفسير : أن هذه القوة ليست قوة شد وإنما هي قوة ضغط لذلك إجعل القيمة موجبة وإكتب بجانبها هي قيمة ضغط (c)



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1\cos 45^\circ\text{ N} = 0 \quad F_{CA} = 500\text{ N (T)}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad C_y - 707.1\sin 45^\circ\text{ N} = 0 \quad C_y = 500\text{ N}$$



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad 500\text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 500\text{ N}$$

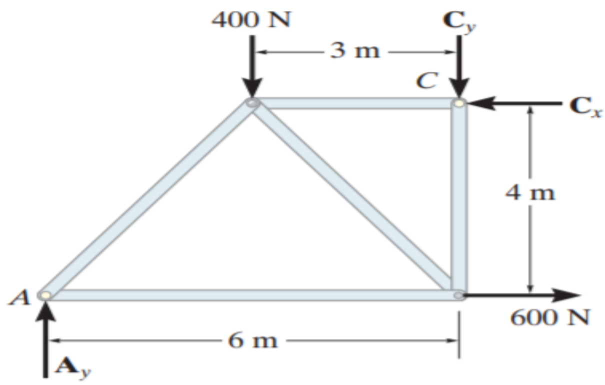
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 500\text{ N} - A_y = 0 \quad A_y = 500\text{ N}$$

يوجد لدينا مجهولين فقط :C

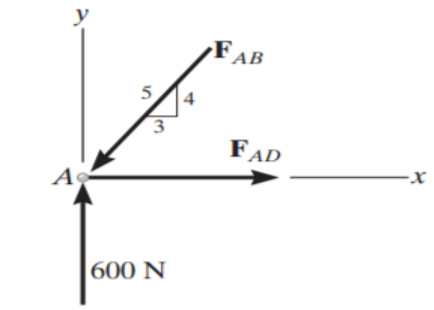
لا يوجد مجاهيل ويوجد معلوم واحد فقط لذلك نبدأ بها :D

الخطوة الثانية : عند كل نقطة نطبق معادلات الإتزان ونقوم بفرض القوى , شد أو ضغط (فرض) إذا كانت الإشارة الموجبة فالفرض صحيح وإذا كانت الإشارة سالبة ف فرضنا خاطئ

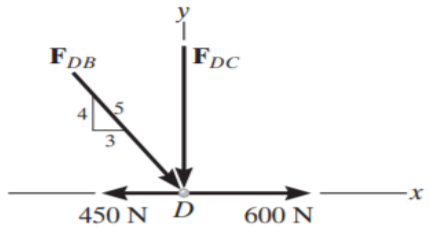
ما قبل البدء : هذا النظام أكثر تعقيدا من النظام السابق لذلك نجد أولا ردود الأفعال أولا , نأخذ العزم عند النقطة الأكثر مجاهيل ومن ثم تطبيق مجموع القوى يساوي صفر كما فعلنا سابقا .



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad 600\text{ N} - C_x = 0 \qquad C_x = 600\text{ N}$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \qquad -A_y(6\text{ m}) + 400\text{ N}(3\text{ m}) + 600\text{ N}(4\text{ m}) = 0$$
$$A_y = 600\text{ N}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - 400\text{ N} - C_y = 0 \qquad C_y = 200\text{ N}$$



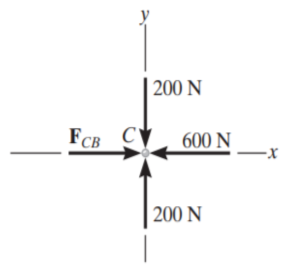
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - \tfrac{4}{5}F_{AB} = 0 \qquad F_{AB} = 750\text{ N} \quad (C)$$
$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{AD} - \tfrac{3}{5}(750\text{ N}) = 0 \qquad F_{AD} = 450\text{ N} \quad (T)$$



FAD : نعلمها ويوجد قوة معروفة معطاه على المحور السيني

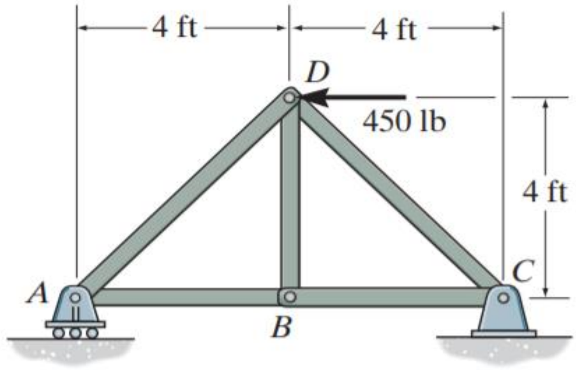
متصلة ب محور موازي ل المحور الصادي أي أنه لا يملك مركبة سينية وهذه مميزة عند تطبيق قوانين الإتزان , بقي فقط قوة مجهولة مائلة إذن نستطيع إيجادها .

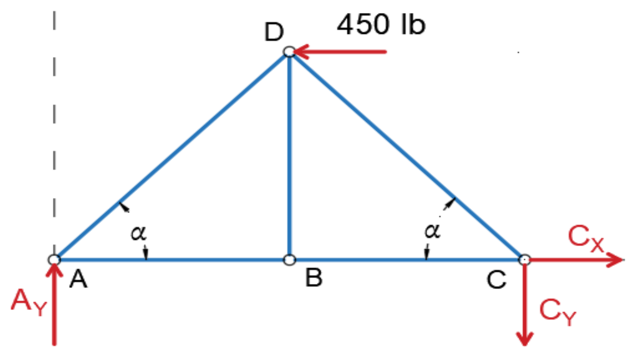
$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad -450\text{ N} + \tfrac{3}{5}F_{DB} + 600\text{ N} = 0 \qquad F_{DB} = -250\text{ N}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad -F_{DC} - \tfrac{4}{5}(-250\text{ N}) = 0 \qquad F_{DC} = 200\text{ N} \quad (C)$$



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{CB} - 600\text{ N} = 0 \qquad F_{CB} = 600\text{ N} \quad (C)$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 200\text{ N} - 200\text{ N} \equiv 0 \quad \text{(check)}$$

- ❑ **F6-1. Determine the force in each member of the truss. State if the members are in tension or compression ?**



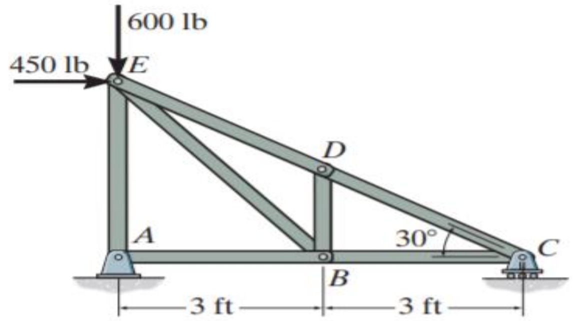


$$\sum F_x = 0$$
$$-450 + C_x = 0$$
$$\boxed{C_x = 450\text{ lb}}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$A_y - C_y = 0$$
$$A_y - 225 = 0$$
$$\boxed{A_y = 225\text{ lb}}$$

$$\sum M_A = 0$$
$$450 \cdot 4 - 8C_y = 0$$
$$1800 - 8C_y = 0$$
$$D_y = \frac{1800}{8}$$
$$\boxed{C_y = 225\text{ lb}}$$

❑ **F6-6. Determine the force in each member of the truss. State if the members are in tension or compression ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> إنظر إلى السؤال نظرة سريعه وعند كل نقطة ننظر إلى ردود الأفعال والقوى , ونختار نقطة فيها معلوم وليس فيها مجاهيل كثيرة

A: يوجد لديها مجهولين فقط

C: يوجد لديها مجهول واحد فقط

E: يوجد لديها معلومين فقط

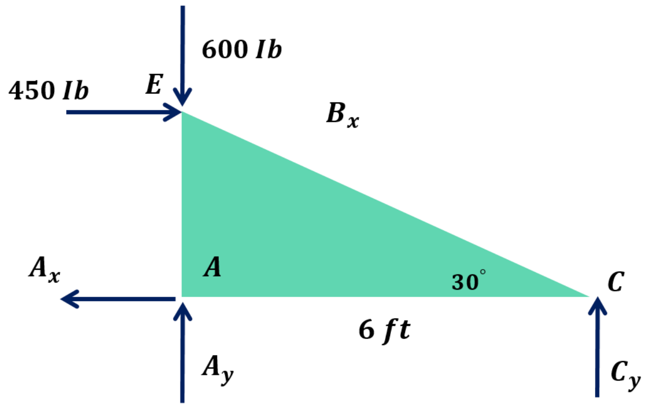
هذا <u>أول مؤشر</u> للإشارة لنا من أين نبدأ لكنه ليس كاف , <u>يجب النظر إلى كل نقطة بكم جزء متصل</u>

A: متصلة بجزئين , واحد على المحور السيني والأخر الصادي

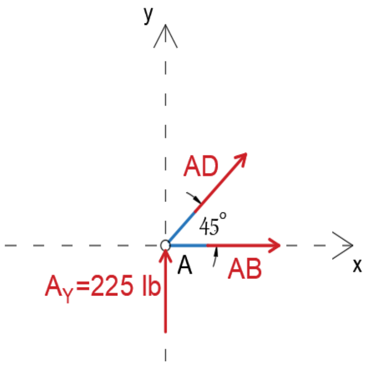
E: متصلة ب ثلاثة أجزاء وهو الأكثر تعقيدا ك بداية

C: متصلة بجزئين , واحد على المحور السيني والأخر مائل أي له مركبتين

<u>الخطوة الثانية :</u>تأكد من القدرة على إستخدام معادلة العزم أو مجموع القوى يساوي صفر لكي يسهل الحل عليك وإخراج ردود الأفعال خاصة إذا كان النظام ليس بسيط .



دائما خذ العزم عند <u>أكثر</u> نقطة بها مجاهيل



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = 45^\circ$$

$$\sum F_x = 0$$

$$AD\cos 45^\circ + AB = 0$$

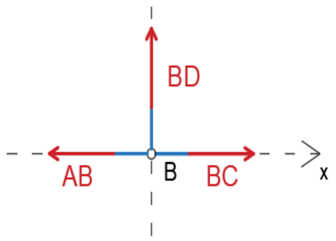
$$-318.20\cos 45^\circ + AB = 0$$

$$\boxed{AB = 225 \text{ lb (T)}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$225 + AD\sin 45^\circ = 0$$

$$AD = -\frac{225}{\sin 45^\circ} = -318.20 \text{ lb}$$



$$\sum F_x = 0$$

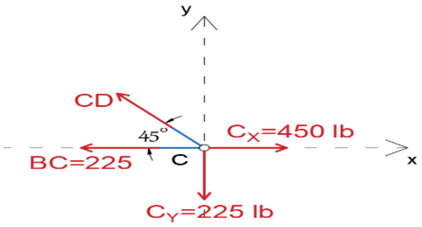
$$-AB + BC = 0$$

$$-225 + BC = 0$$

$$\boxed{BC = 225 \text{ lb (T)}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\boxed{BD = 0}$$



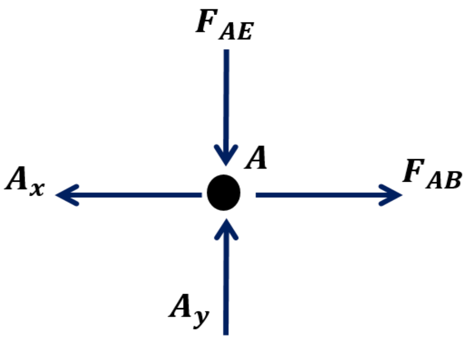
$$\sum F_y = 0$$

$$-225 + CD\sin 45^\circ = 0$$

$$CD = \frac{225}{\sin 45^\circ}$$

$$\boxed{CD = 318.20 \text{ lb (T)}}$$

<u>الخطوة الثالثة</u>: عند كل نقطة نطبق معادلات الإتزان ونقوم بفرض القوى , شد أو ضغط (فرض) إذا كانت الإشارة الموجبة فالفرض صحيح وإذا كانت الإشارة سالبة ف فرضنا خاطئ



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{AB} - A_x = 0$$

$$F_{AB} - 450 = 0$$

$$F_{AB} = 450\ Ib\ (\mathrm{T})$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - F_{AE} = 0$$

$$340.2 - F_{AE} = 0$$

$$F_{AE} = 340.2\ Ib\ (\mathrm{C}).$$

$$\sum M_A = 0$$

$$6\ C_y - 6\ \tan 30\ (450) = 0$$

$$C_y = 259.8\ Ib.$$

$$\sum F_x = 0$$

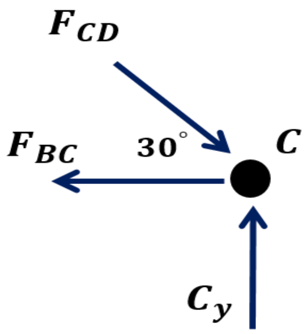
$$450 - A_x = 0$$

$$A_x = 450\ Ib$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y + A_y - 600 = 0$$

$$A_y = 340.2\ Ib$$



$$\sum F_y = 0$$

$$C_y - F_{CD}\ \sin\ 30 = 0$$

$$259.8 - F_{CD}\ \sin\ 30 = 0$$

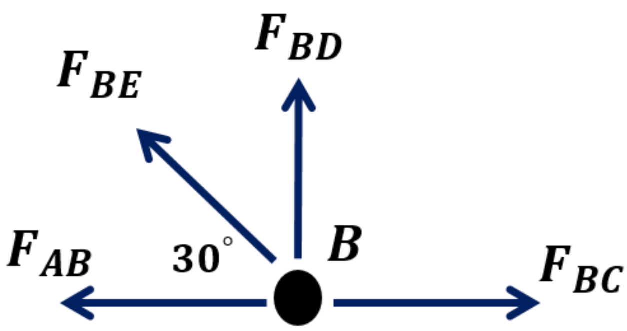
$$F_{CD} = 519.6\ Ib\ (\mathrm{C}).$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{CD}\ \cos\ 30 - F_{BC} = 0$$

$$519.6\ \cos\ 30 - F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = 450\ Ib\ (\mathrm{T}).$$



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{BC} - F_{AB} - F_{BE} \cos 30 = 0$$

$$450 - 450 - F_{BE} \cos 30 = 0$$

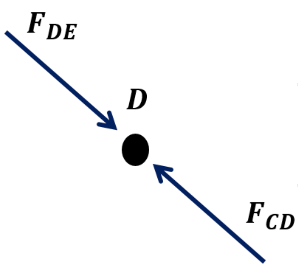
$$F_{BE} = 0.$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BD} + F_{BE} \sin 30 = 0$$

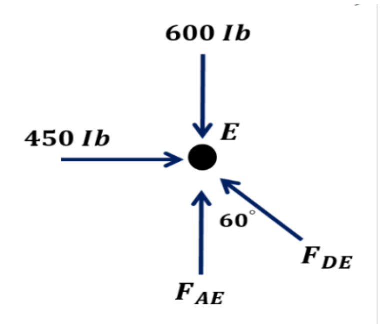
$$F_{BD} + 0 \sin 30 = 0$$

$$F_{BD} = 0.$$



$$F_{CD} = F_{DE}$$

$$F_{DE} = 519.6\ Ib\ (C).$$

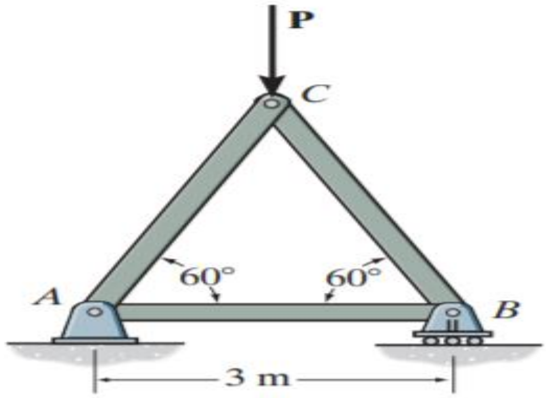


$$\sum F_x = 0$$

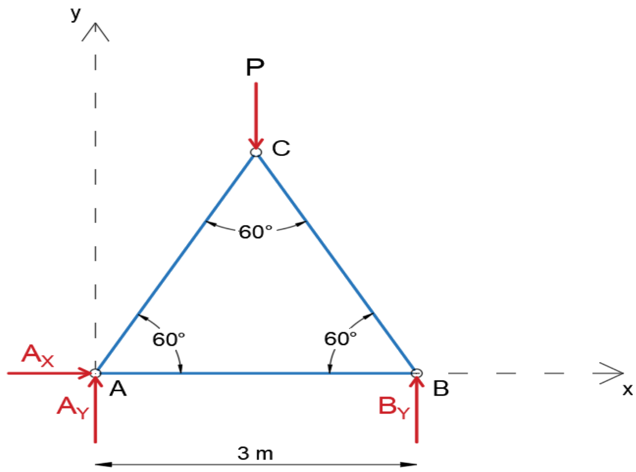
$$450 - F_{DE} \sin 60 = 0$$

$$F_{DE} = 519.6\ (C).$$

- **F-4. Determine the greatest load P that can be applied to the truss so that none of the members are subjected to a force <u>exceeding either 2 kN in tension or 1.5 kN in compression ?</u>**



<u>الخطوة الأولى :</u> نجد <u>ردود الأفعال</u> عن طريق تطبيق معادلات الإتزان



$$\sum F_x = 0$$

$$\boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-1.5P + 3B_y = 0$$

$$B_y = \frac{1.5P}{3}$$

$$\boxed{B_y = 0.5P}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - P = 0$$

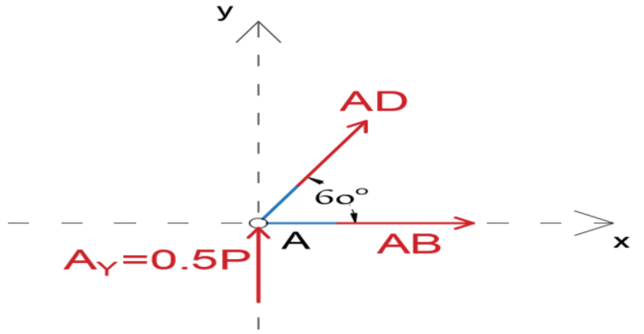
$$A_y + 0.5P - P = 0$$

$$A_y - 0.5P = 0$$

$$\boxed{A_y = 0.5P}$$

<u>الخطوة الثانية :</u> عند كل نقطة نطبق معادلات الإتزان لكي نجد المجاهيل وإختيار أين البداية ؟.

Joint A



$$\sum F_y = 0$$

$$0.5P + AD\sin 60^\circ = 0$$

$$AD = -\frac{0.5P}{\sin 60^\circ} = -0.577P$$

Since we got the negative result, this means that the member is in compression

$$\boxed{AD = 0.577P\ (\mathrm{C})}$$

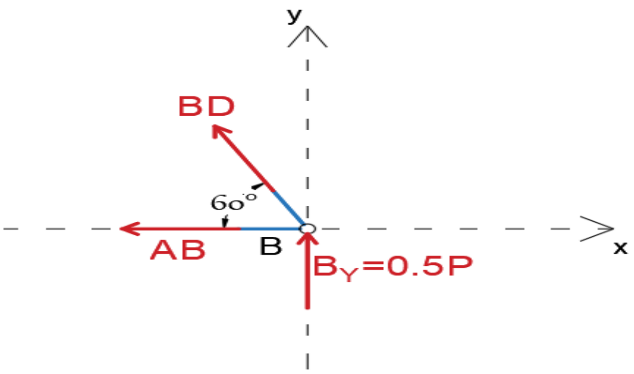
$$\sum F_x = 0$$

$$AD\cos 60^\circ + AB = 0$$

$$-0.577P\cos 60^\circ + AB = 0$$

$$\boxed{AB = 0.288P\ (\mathrm{T})}$$

Joint B



$$\sum F_y = 0$$

$$0.5P + BD\sin 60^\circ = 0$$

$$BD = -\frac{0.5P}{\sin 60^\circ} = -0.577P$$

Since we got the negative result, this means that the member is in compression

$$\boxed{BD = 0.577P\ (\mathrm{C})}$$

1.5 هي أقصى حمل في الضغط وهو معطى في السؤال ومنه نجد الحمل

$$0.577P = 1.5\ \mathrm{kN}$$

$$P = \frac{1.5}{0.577}$$

$$P = 2.60\ \mathrm{kN}$$

2 هي أقصى حمل في الشد وهو معطى في السؤال ومنه نجد الحمل

$$0.288P = 2\ \mathrm{kN}$$

$$P = \frac{2}{0.288}$$

$$P = 6.94\ \mathrm{kN}$$

إذا طلب <u>أقصى</u> , إختر القيمة <u>الأقل</u>

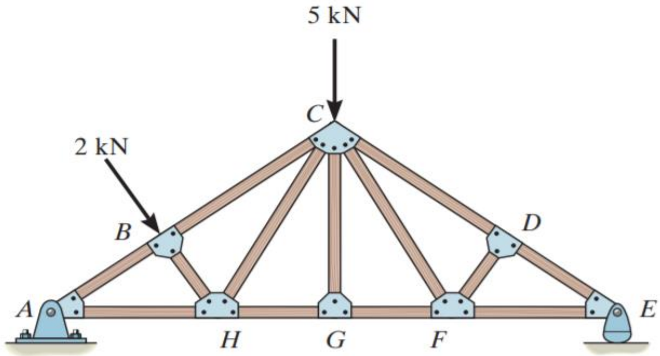
- **If only two non-collinear members form a truss joint and no external load or support reaction is applied to the joint, the two members must be zero-force members.**

إذا كان لدينا جزيئين على غير إستقامة واحدة ولا يوجد عليها قوى إضافية أو ردود فعل دعائم فإن هؤلاء الجزيئين يكون القوى عليهم صفر .

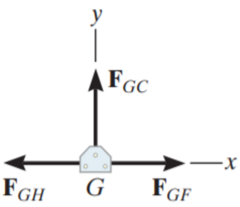
- **If three members form a truss joint for which two of the members are collinear, the third member is a zero-force member provided no external force or support reaction has a component that acts along this member.**

إذا كان يوجد لدينا ثلاثة أجزاء ومنهم جزيئين على إستقامة واحدة ف سيكون الجزء الثالث ليس يحمل أي قوة بشرط أن لا يكون عليه قوة خارجية أو رد فعل دعائم

❑ **Example. Using the method of joints, determine all the zero-force members of the Fink roof truss. Assume all joints are pin connected ?**

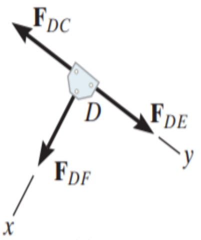


نبدأ جزء جزء و عليك اليقظة في الحل والتركيزومن باب التذكير دائما إبدء بها في حل الأسئلة لأنها ستوفر عليك الوقت والراحة وشرحتها الأن لكي تتعود على صعوبة الحساب وأن تكون قادر على التعامل مع الأنظمة المعقدة

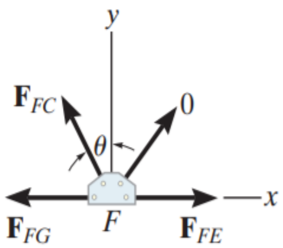


(b)

$$F_{GC} = 0$$

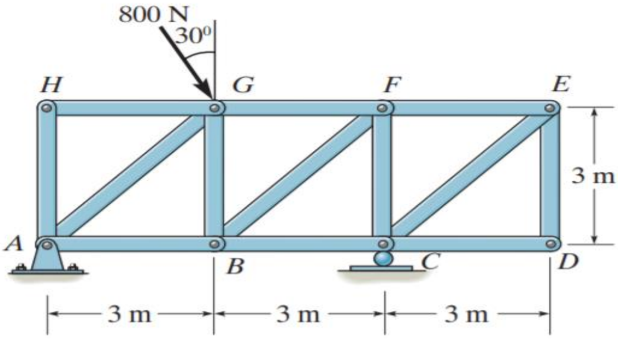


$$F_{DF} = 0$$

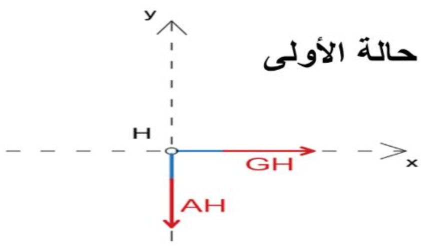


$$F_{FC} = 0$$

❑ **P-2. Identify the zero-force members in each truss ?**



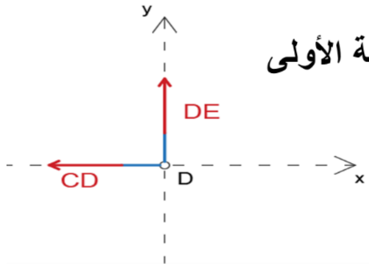
Joint H



حالة الأولى

F_{GH}=F_{AH}=0

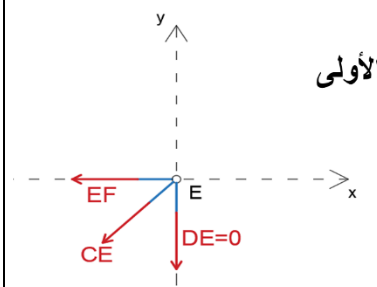
Joint D



حالة الأولى

F_{DE}=F_{CD}=0

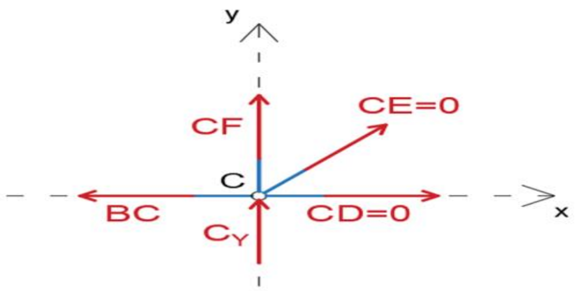
Joint E



حالة الأولى

F_{EF}=F_{CF}0

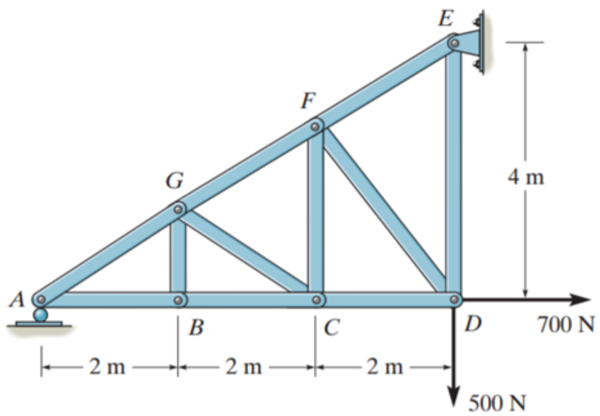
Joint C



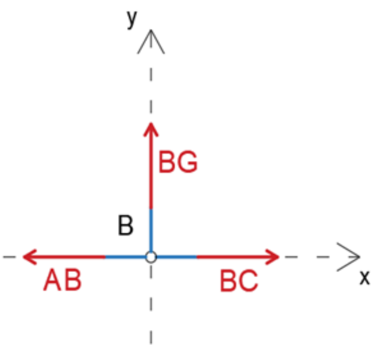
$$\Sigma F_X = 0$$

So $F_{BC}=0$

- ❑ **P-2. Identify the zero-force members in each truss ?**

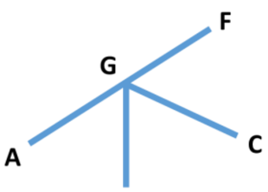


Joint B



$$\sum F_y = 0$$
$$BG = 0$$

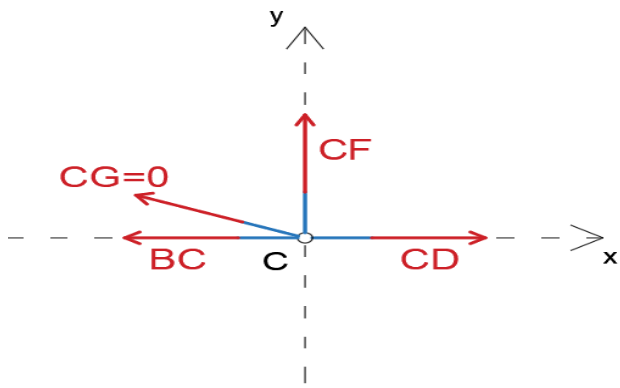
Joint G



BG=0

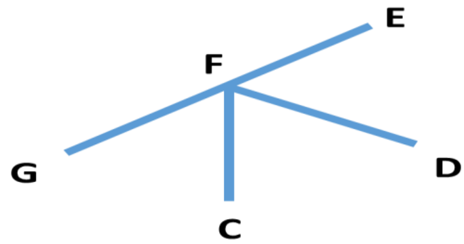
GC=0

Joint C



$$\sum F_y = 0$$
$$CF = 0$$

Joint F



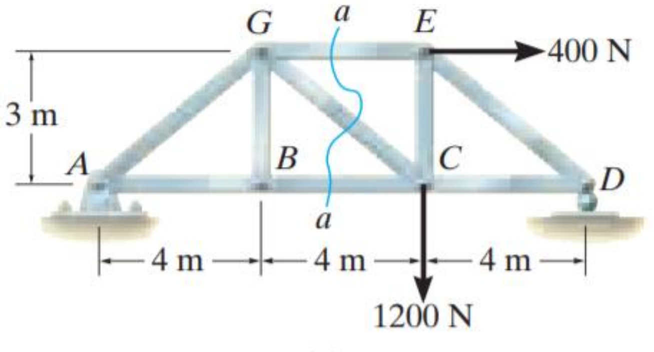
FD=0

CF=0

When we need to find the force in only a few members of a truss, we can analyze the truss using the method of sections

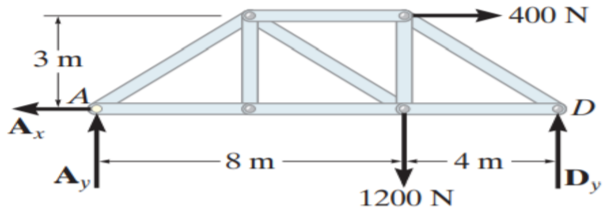
والآن سنتعلم طريقة أخرى ل إيجاد القوى في الأجزاء , سنتعلم طريقة القطع والتي تتميز بمعرفة أجزاء محددة وليس كامل النظام .

- **Example. Determine the force in members <u>GE, GC, and BC</u> of the truss , Indicate whether the members are in tension or compression ?**



الأن لدينا طريقتين فأي الطرق سنختار ؟ إذا أردنا القوة في أجزاء محددة فإستخدم الطريقة الثانية أما في حال طلب القوى في كامل الأجزاء فعليك بالطريقة الأولى

<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تجد ردود الأفعال عن طريق تطبيق معادلات الإتزان



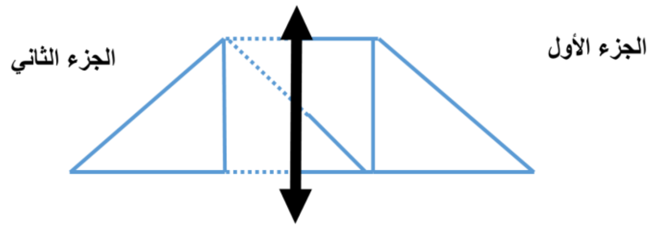
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 400\text{ N} - A_x = 0 \qquad A_x = 400\text{ N}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad -1200\text{ N}(8\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + D_y(12\text{ m}) = 0$$

$$D_y = 900\text{ N}$$

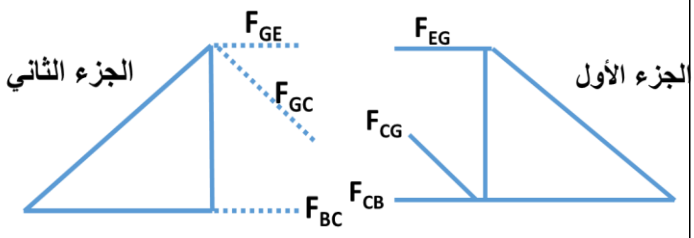
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 1200\text{ N} + 900\text{ N} = 0 \qquad A_y = 300\text{ N}$$

<u>الخطوة الثانية :</u> نلقي نظرة على الأجزاء المطلوبة ونحدد عليهم ومن ثم ننزل خط قاطع <u>بشرط</u> أن لا يقطع أكثر من ثلاثة أجزاء ويصبح الشكل مقسم إلى جزئين ويجب أن نختار <u>الجزء الأسهل</u> والذي فيه أقل متغيرات وهذه في البداية صعبة

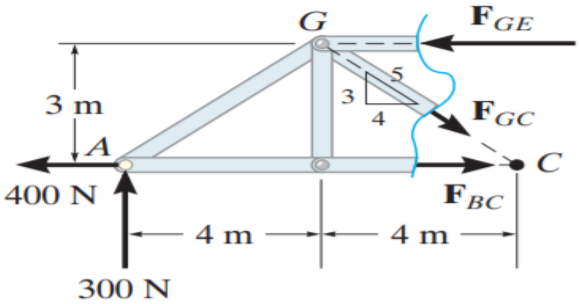


الخط المتقطع دلالة على وجود خط القطع ولنا حرية الإختيار في إختيار الجزء .

عند القطع يظهر شئ اسمه <u>القوى الداخلية</u> , متساوية في المقدار ومتعاكس في الإتجاهات أي عندما نقرب الجزئين يكتمل الشكل .



دائما إختار الجزء الذي فيه <u>أقل مجاهيل</u>



نأخذ العزم عند <u>نقطة الإلتقاء</u> لأنه سيلغي قوتين

$$\circlearrowleft +\Sigma M_G = 0; \quad -300\text{ N}(4\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + F_{BC}(3\text{ m}) = 0$$

$$F_{BC} = 800\text{ N} \quad (T)$$

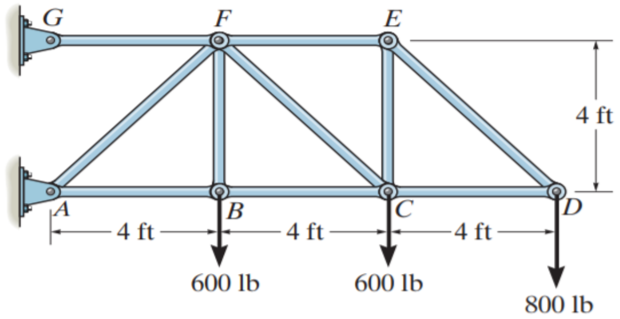
$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \quad -300\text{ N}(8\text{ m}) + F_{GE}(3\text{ m}) = 0$$

$$F_{GE} = 800\text{ N} \quad (C)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 300\text{ N} - \tfrac{3}{5}F_{GC} = 0$$

$$F_{GC} = 500\text{ N} \quad (T)$$

F6-7. Determine the force in members BC, CF, and FE. State if the members are in tension or compression ?

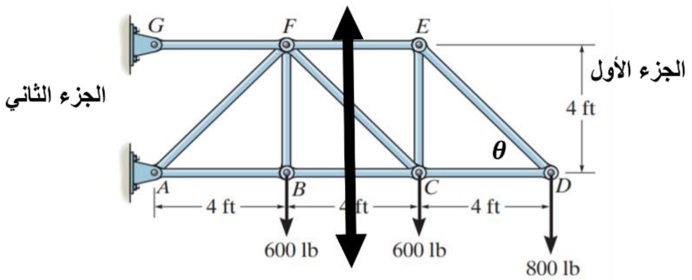


الحل على <u>الطريقة الثانية</u> لماذا ؟ طلب القوى في <u>أجزاء محددة</u>

<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تجد ردود الأفعال عن طريق تطبيق معادلات الإتزان , , إذا كنا سنأخذ جزء لا يوجد فيه دعائم فلا داعي لإيجاد ردود الأفعال أما في حال أخذت جزء فيه دعائم فهنا لا بد من إيجادهم في الخطوة الأولى

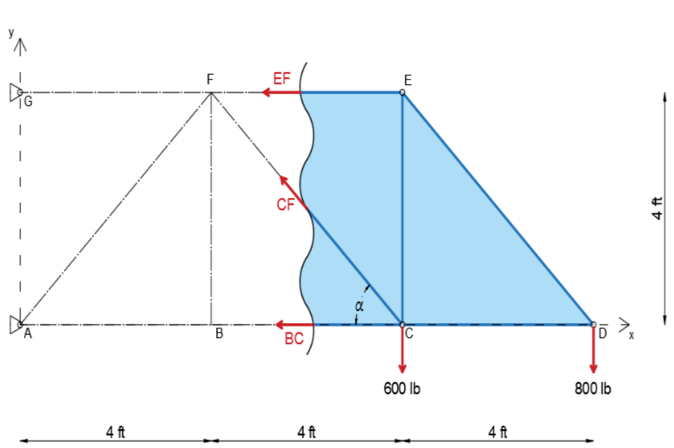
<u>ما قبل البدء قم بإيجاد الزاوية لكى تحلل القوة</u>

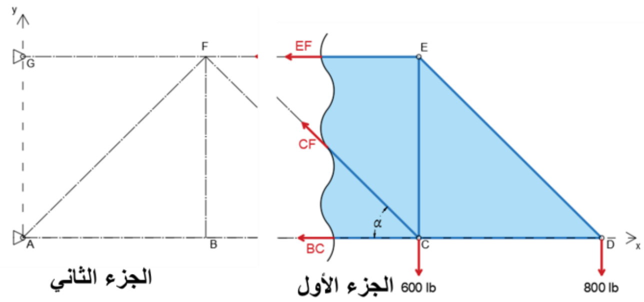
$$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = 45^{\circ}}$$

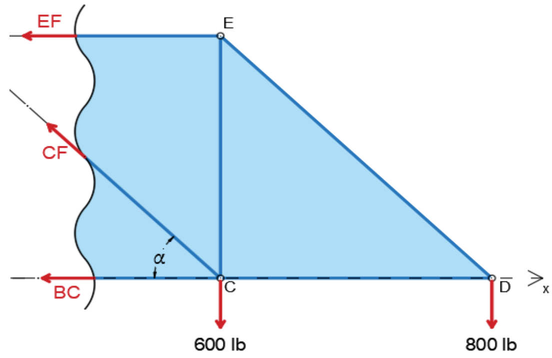


<u>الخطوة الثانية :</u> نلقي نظرة على الأجزاء المطلوبة ونحدد عليهم ومن ثم ننزل خط قاطع بشرط أن لا يقطع أكثر من ثلاثة أجزاء ويصبح الشكل مقسم إلى جزئين ويجب أن نختار الجزء الأسهل والذي فيه أقل متغيرات

free-body diagram







نأخذ العزم عند <u>نقطة الإلتقاء</u> لأنه سيلغي قوتين

$$\sum M_C = 0$$

$$-4EF + 800 \cdot 4 = 0$$

$$EF = \frac{800 \cdot 4}{4}$$

$$\boxed{EF = 800 \text{ lb (T)}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-600 - 800 + CF \cos 45^{\circ} = 0$$

$$CF = \frac{600 + 800}{\cos 45^{\circ}}$$

$$\boxed{CF = 1980 \text{ lb (T)}}$$

$$\sum F_x = 0$$

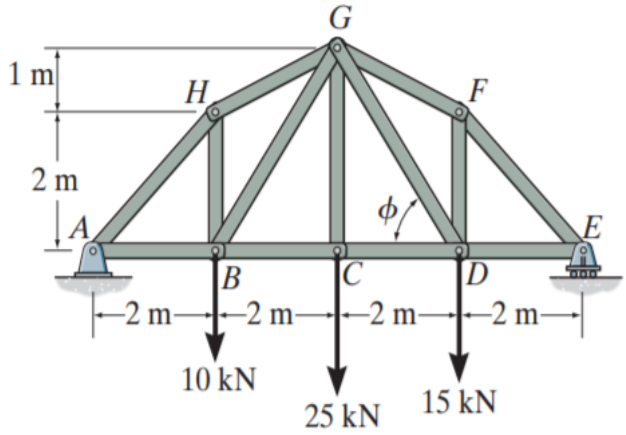
$$-BC - EF - CF \cos 45^{\circ} = 0$$

$$BC = -EF - CF \cos 45^{\circ}$$

$$BC = -800 - 1980 \cos 45^{\circ} = -2200 \text{ lb}$$

$$\boxed{BC = 2200 \text{ lb (C)}}$$

- **F6-11. Determine the force in members <u>GF, GD, and CD</u> of the truss. State if the members are in tension or compression ?**



ما قبل البدء قم بإيجاد الزاوية لكي تحلل القوة وهنا يوجد زاويتين لإختلاف أطوال الأضلاع

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\alpha = 56.31^\circ$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = 26.57^\circ$$

<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تجد ردود الأفعال عن طريق تطبيق معادلات الإتزان

الدعائم هنا متوزعة على الجهتين لذلك <u>لا بد</u> من إيجاد ردود الأفعال

$$\sum M_A = 0$$

$$10 \cdot 2 + 25 \cdot 4 + 15 \cdot 6 - 8E_y = 0$$

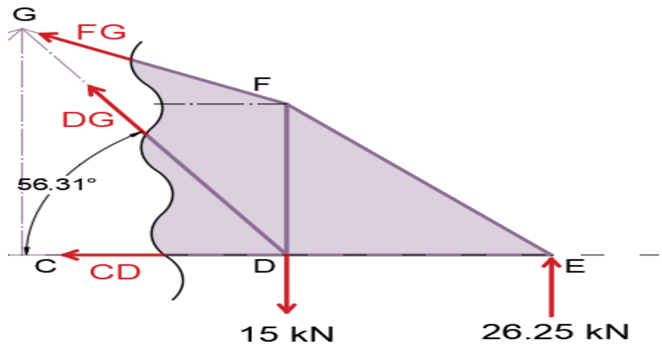
$$210 - 8E_y = 0$$

$$E_y = \frac{210}{8}$$

$$E_y = 26.25 \text{ kN}$$

إكتفينا بهذه فقط لأننا قد <u>أخذنا الجزء الأول</u> .

<u>الخطوة الثانية :</u> نلقي نظرة على الأجزاء المطلوبة ونحدد عليهم ومن ثم ننزل خط قاطع بشرط أن لا يقطع أكثر من ثلاثة أجزاء ويصبح الشكل مقسم إلى جزئين ويجب أن نختار الجزء الأسهل والذي فيه أقل متغيرات



$$\sum M_D = 0$$

$$-2FG\cos 26.57^\circ - 2 \cdot 26.25 = 0$$

$$FG = -\frac{2 \cdot 26.25}{2\cos 26.57^\circ} = -29.35 \text{ kN}$$

$$\boxed{FG = 29.35 \text{ kN (C)}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$FG\sin 26.57^\circ + DG\sin 56.31^\circ - 15 + 26.25 = 0$$

$$-29.35\sin 26.57^\circ + DG\sin 56.31^\circ - 15 + 26.25 = 0$$

$$DG\sin 56.31^\circ - 1.88 = 0$$

$$DG = \frac{1.88}{\sin 56.31^\circ}$$

$$\boxed{DG = 2.26 \text{ kN (T)}}$$

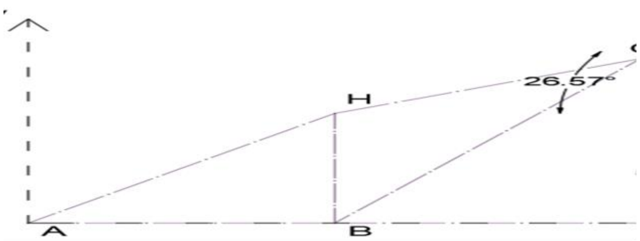
$$\sum F_x = 0$$

$$-CD - DG\cos 56.31^\circ - FG\cos 26.57^\circ = 0$$

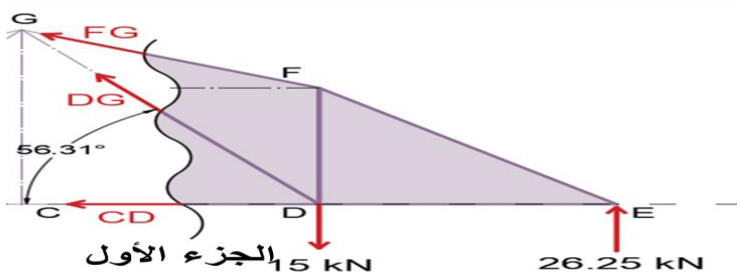
$$CD = -DG\cos 56.31^\circ - FG\cos 26.57^\circ$$

$$CD = -2.26\cos 56.31^\circ - (-29.35)\cos 26.57^\circ$$

$$\boxed{CD = 25.00 \text{ kN (T)}}$$

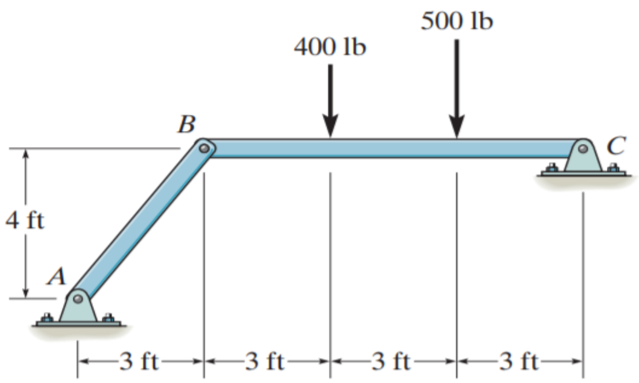


الجزء الثاني



الجزء الأول

- **F6-14. Determine the horizontal and vertical components of reaction at pin C ?**

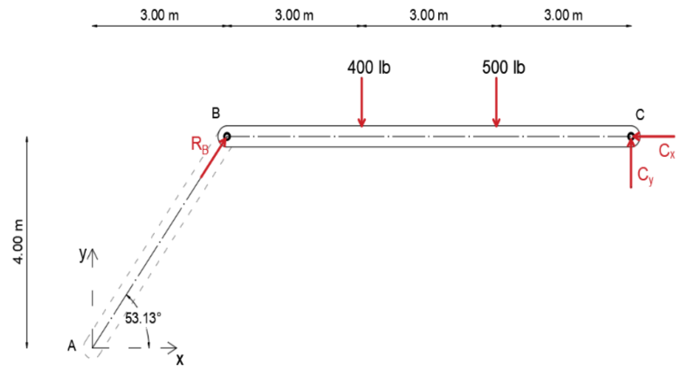


- ما قبل البدء , نظرة سريعة نجد أنه عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات لذلك لا بد من شئ إسمه الفصل .
- نجد الزاوية في البداية لكي نستطيع أن نحلل

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$

$$\alpha = 53.13^\circ$$

- الخطوة الأولى : حدد نقطة الفصل وعندما نفصل تظهر القوى الداخلية كما قلنا سابقا .
- الخطوة الثانية : نأخذ العزم عند نقطة القطع ونجد المجاهيل



$$\sum M_B = 0$$

$$400\cdot 3 + 500\cdot 6 - 9C_y = 0$$

$$4200 - 9C_y = 0$$

$$C_y = \frac{4200}{9}$$

$$\boxed{C_y = 466.67\text{ lb}}$$

الخطوة الثالثة : نطبق معادلات الإتزان , ونجد المجاهيل المطلوبة

$$\sum F_x = 0$$

$$R_B\cos 53.13^\circ - C_x = 0$$

$$C_x = R_B\cos 53.13^\circ$$

$$C_x = 541.66\cos 53.13^\circ$$

$$\boxed{C_x = 325.00\text{ lb}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B\sin 53.13^\circ - 400 - 500 + C_y = 0$$

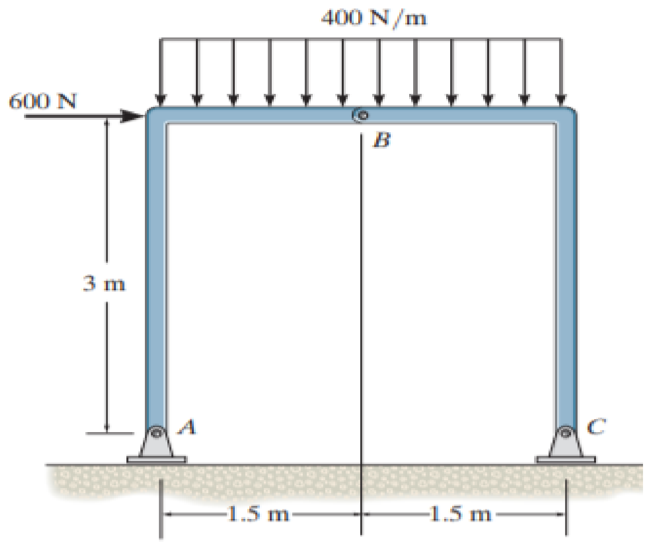
$$R_B\sin 53.13^\circ - 900 + 466.67 = 0$$

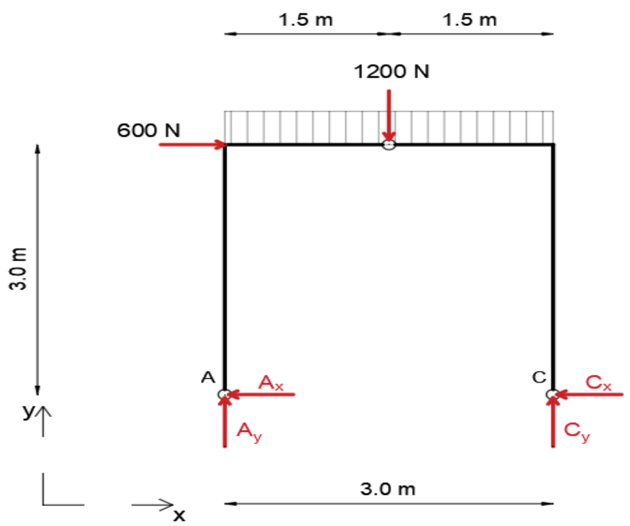
$$R_B\sin 53.13^\circ - 433.33 = 0$$

$$R_B = \frac{433.33}{\sin 53.13^\circ}$$

$$R_B = 541.66\text{ lb}$$

- **F6-21. Determine the components of reaction at A and C ?**





$$\sum M_A = 0$$

$$600 \cdot 3 + 1200 \cdot 1.5 - 3C_y = 0$$

$$C_y = \frac{600 \cdot 3 + 1200 \cdot 1.5}{3}$$

$$\boxed{C_y = 1200 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + C_y - 1200 = 0$$

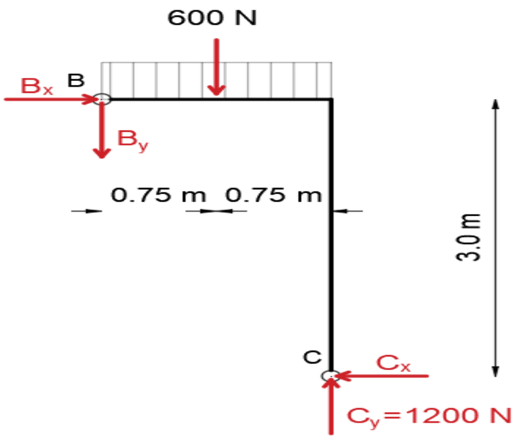
$$A_y + 1200 - 1200 = 0$$

$$\boxed{A_y = 0}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$600 - A_x - C_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_x = 600 - C_x$$



$$\sum M_B = 0$$

$$600 \cdot 0.75 - 1200 \cdot 1.5 + 3C_x = 0$$

$$C_x = \frac{-600 \cdot 0.75 + 1200 \cdot 1.5}{3}$$

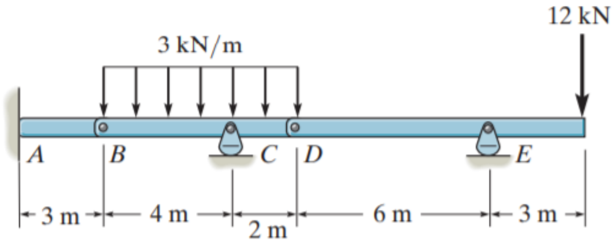
$$\boxed{C_x = 450 \text{ N}}$$

$$A_x = 600 - C_x$$

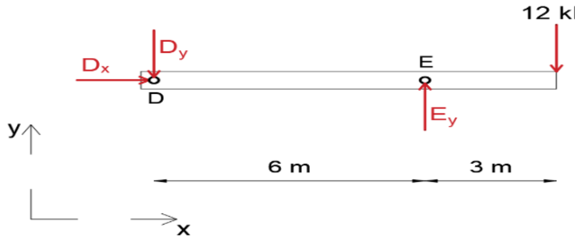
$$A_x = 600 - 450$$

$$\boxed{A_x = 150 \text{ N}}$$

- ❑ **Prop6-71. Determine the reactions at the supports A, C, and E of the compound beam ?**



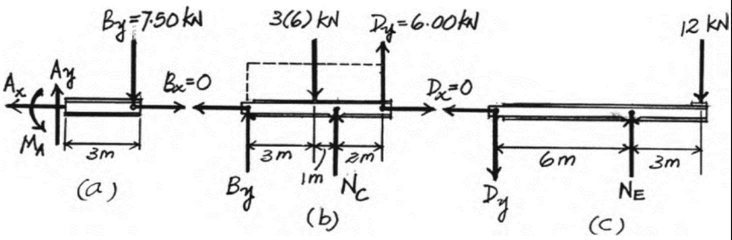
free-body diagram



$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0; \quad N_E(6) - 12(9) = 0 \quad N_E = 18.0 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \quad D_y(6) - 12(3) = 0 \quad D_y = 6.00 \text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad D_x = 0$$



BD

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad 6.00(2) + 3(6)(1) - B_y(4) = 0 \quad B_y = 7.50 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad N_C(4) + 6.00(6) - 3(6)(3) = 0 \quad N_C = 4.50 \text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0$$

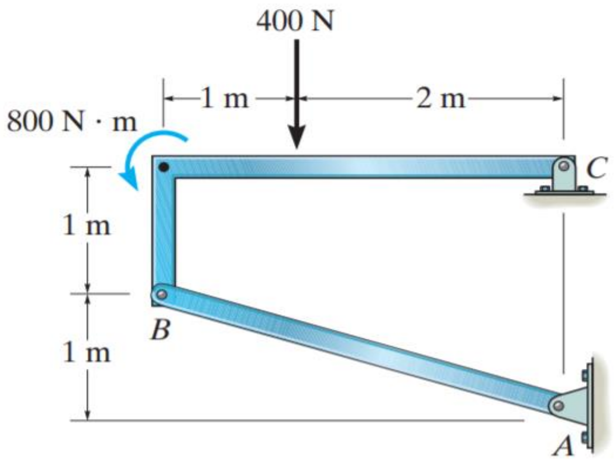
AB

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

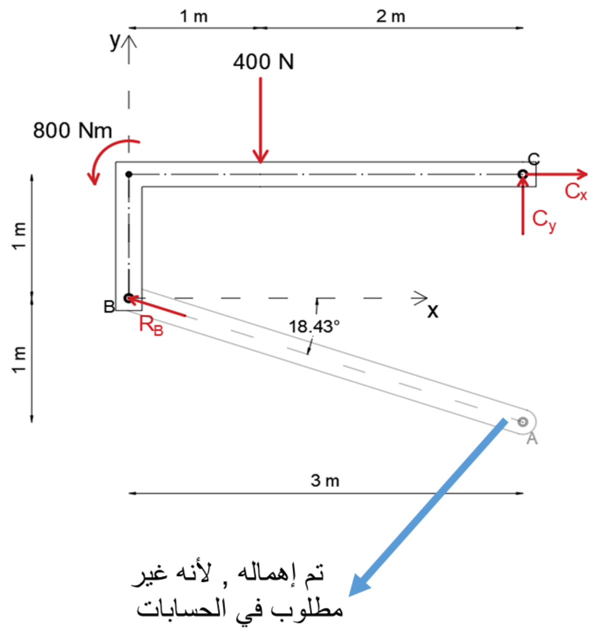
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 7 - 50 = 0 \quad A_y = 7.50 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad M_A - 7.50(3) = 0 \quad M_A = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

- **F6-16. Determine the horizontal and vertical components of reaction at pin C ?**



$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$
$$\alpha = 18.43^\circ$$



ما قبل الفصل نجد ردود الافعال التي تخص الدعائم

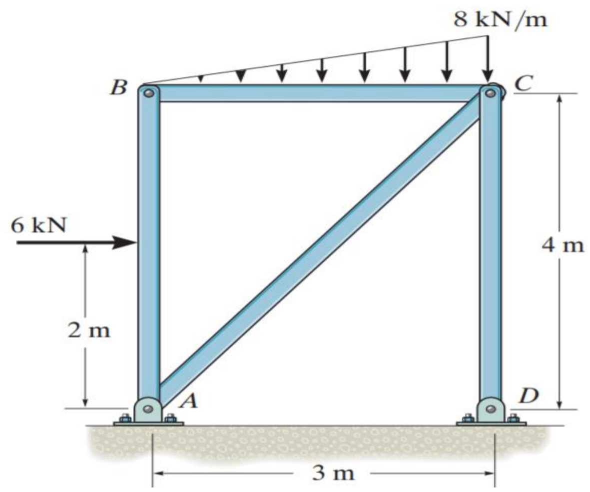
$$\sum M_C = 0$$
$$1R_B\cos 18.43^\circ + 3R_B\sin 18.43^\circ - 800 - 400\cdot 2 = 0$$
$$1.897R_B - 1600 = 0$$
$$R_B = \frac{1600}{1.897}$$
$$R_B = 843.37\text{ N}$$

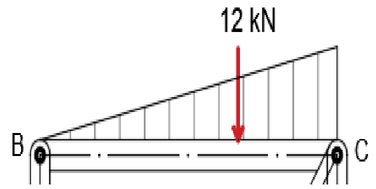
ولكي نوفر الوقت دائما إقرأ السؤال بشكل جيد , المطلوب فقط هو عند نقطة محددة فالجزء الغير مطلوب نهمله

$$\sum F_y = 0$$
$$R_B\sin 18.43^\circ - 400 + C_y = 0$$
$$C_y = -R_B\sin 18.43^\circ + 400$$
$$C_y = -843.37\sin 18.43^\circ + 400$$
$$\boxed{C_y = 133.37\text{ lb}}$$

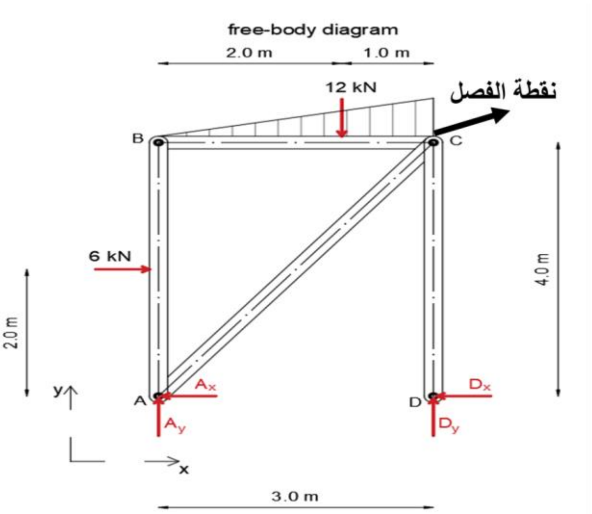
$$\sum F_x = 0$$
$$-R_B\cos 18.43^\circ + C_x = 0$$
$$C_x = R_B\cos 18.43^\circ$$
$$C_x = 843.37\cos 18.43^\circ$$
$$\boxed{C_x = 800.00\text{ N}}$$

- **F6-24. Determine the components of reaction at D and the components of reaction the pin at A exerts on member BA ?**





$$R = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8 = 12\text{ kN}$$



$$\sum M_A = 0$$

$$6 \cdot 2 + 12 \cdot 2 - 3D_y = 0$$

$$D_y = \frac{6 \cdot 2 + 12 \cdot 2}{3}$$

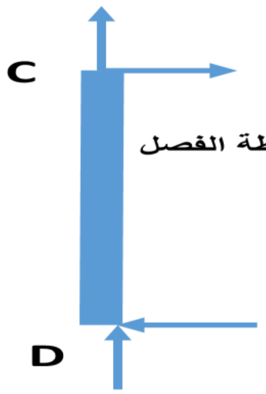
$$\boxed{D_y = 12 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + D_y - 12 = 0$$

$$A_y + 12 - 12 = 0$$

$$\boxed{A_y = 0}$$



نأخذ العزم عند نقطة الفصل

$$\sum F_x = 0$$

$$-A_x + 6 - D_x = 0$$

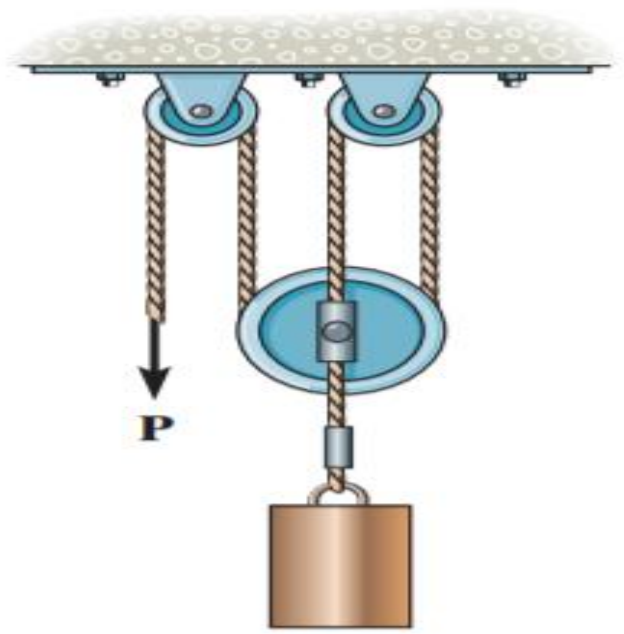
$$A_x = 6 - D_x$$

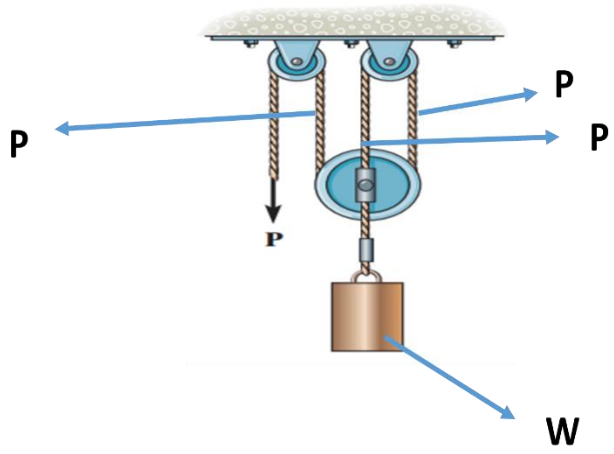
$$A_x = 6 - 0$$

$$\boxed{A_x = 6 \text{ kN}}$$

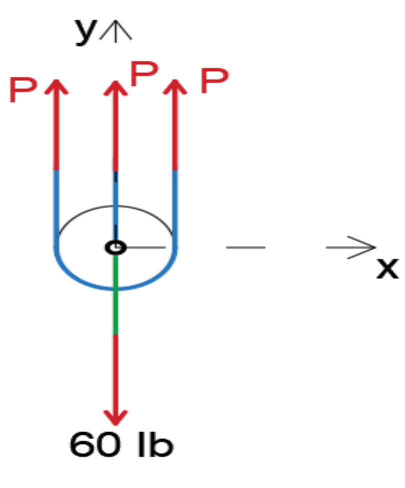
$$\Sigma MC = DX * 4 = 0 \quad DX = 0$$

- **F-13. Determine the force P needed to hold the 60-lb weight in equilibrium?**





فكرة السؤال قلناها سابقا , هذه تسمى البكرة والمميز فيها أن قوة الشد متساوية



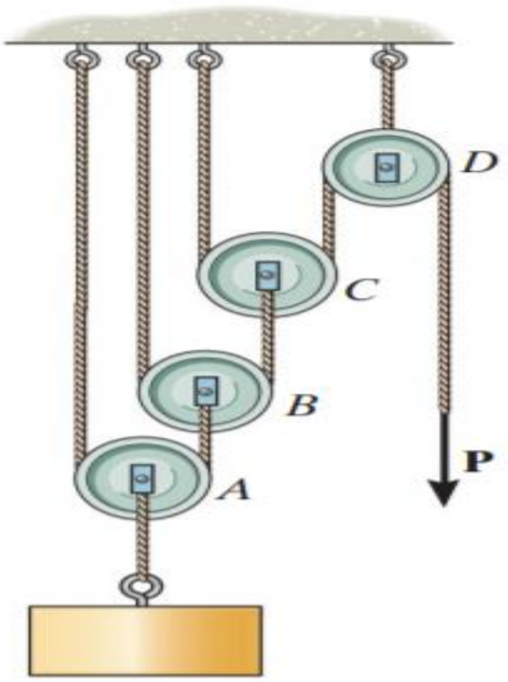
$$\sum F_y = 0$$

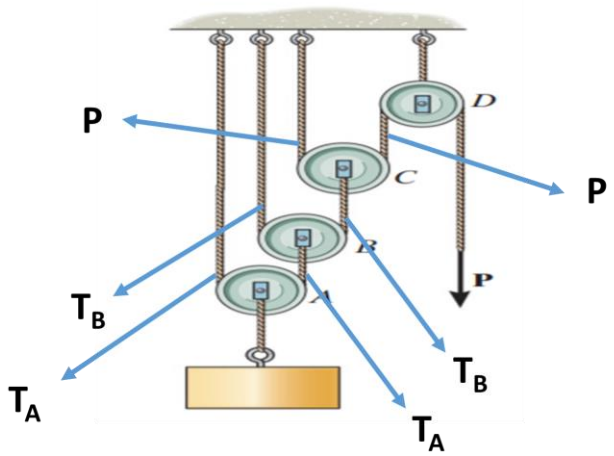
$$3P - 60 = 0$$

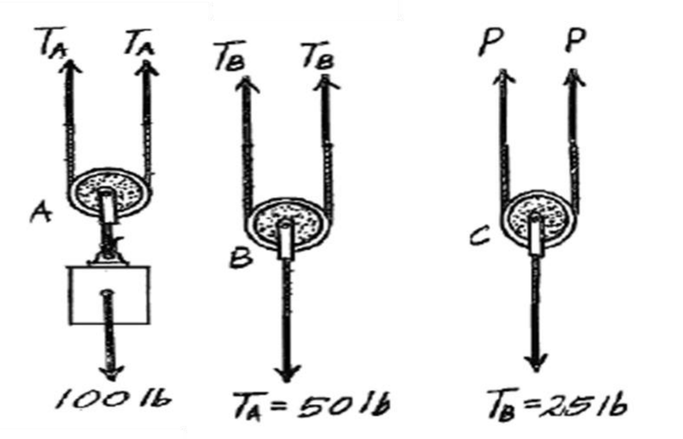
$$P = \frac{60}{3}$$

$$\boxed{P = 20\ \text{lb}}$$

- ❑ **Prop6-61. Determine the force P required to hold the 100-lb weight in equilibrium ?**





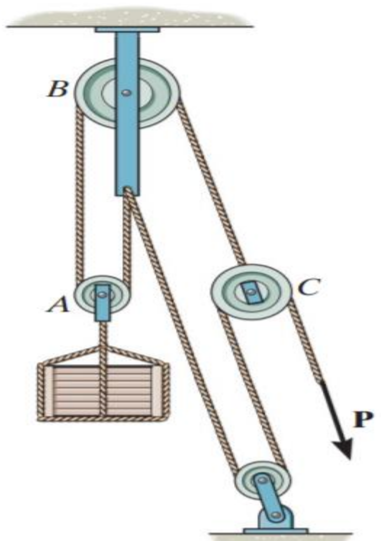


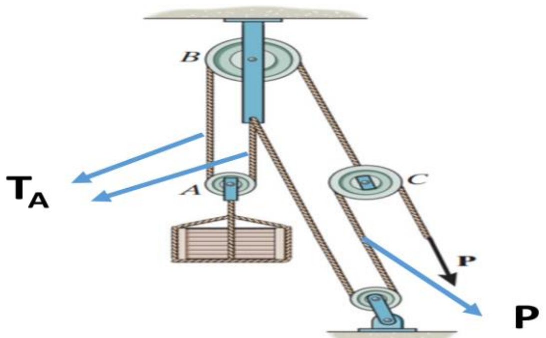
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2T_A - 100 = 0\quad T_A = 50\ \text{lb}$

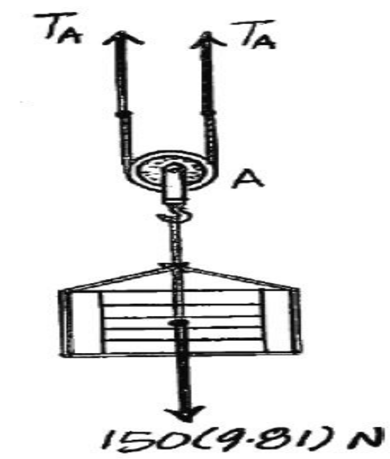
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2T_B - 50 = 0\quad T_B = 25\ \text{lb}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2P - 25 = 0\quad P = 12.5\ \text{lb}$

- ❑ **Prop6-64. Determine the force P required to hold the 150-kg crate in equilibrium ?**



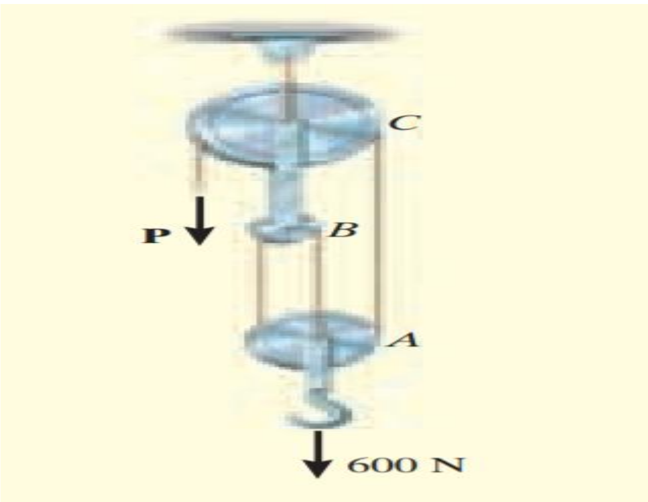


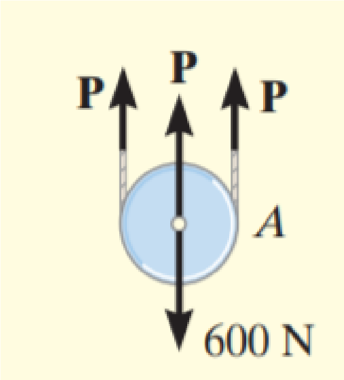


$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 2T_A - 150(9.81) = 0 \quad T_A = 735.75\text{ N}$

$\Sigma F_{y'} = 0; \quad 735.75 - 2P = 0 \qquad P = 367.88\text{ N} = 368\text{ N}$

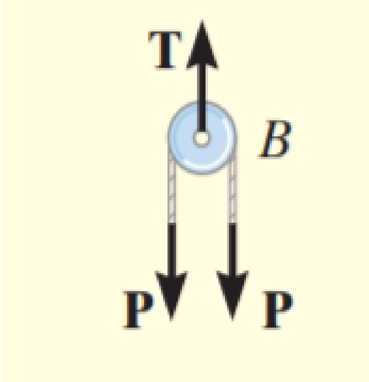
- **Example6-14. Determine the tension in the cables and also the force P required to support the 600-N force using the frictionless pulley system ?**





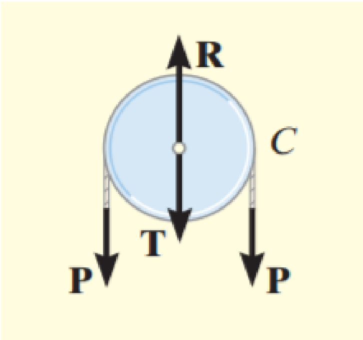
Pulley A

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 3P - 600\text{ N} = 0 \qquad P = 200\text{ N}$



Pulley B

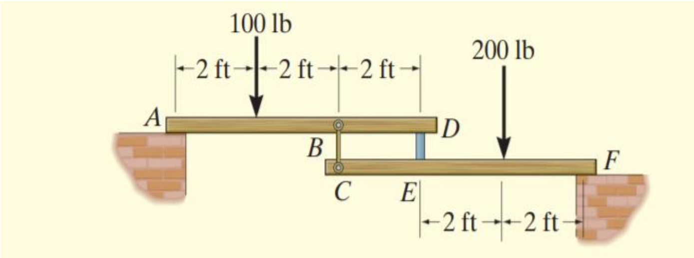
$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad T - 2P = 0 \qquad T = 400\text{ N}$

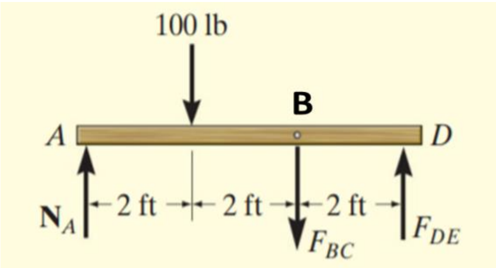


Pulley C

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad R - 2P - T = 0 \qquad R = 800\text{ N}$

- **Example6-18. The two planks are connected together by cable BC and a smooth spacer DE. Determine the reactions at the smooth supports A and F, and also find the force developed in the cable and spacer ?**

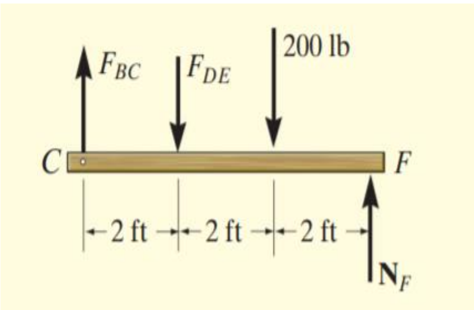




$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad F_{DE}(6\text{ ft}) - F_{BC}(4\text{ ft}) - 100\text{ lb}\,(2\text{ ft}) = 0$$

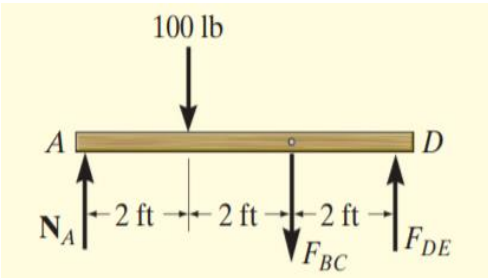
فصلنا أو قطعنا عند نقطتين

BC and DE



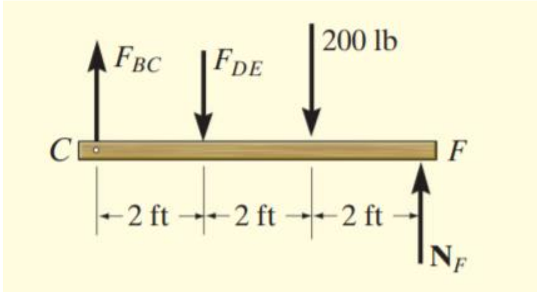
$$\circlearrowleft + \Sigma M_F = 0; \qquad F_{DE}(4\text{ ft}) - F_{BC}(6\text{ ft}) + 200\text{ lb}\,(2\text{ ft}) = 0$$

$$F_{DE} = 140\text{ lb} \qquad F_{BC} = 160\text{ lb}$$



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A + 140\text{ lb} - 160\text{ lb} - 100\text{ lb} = 0$$

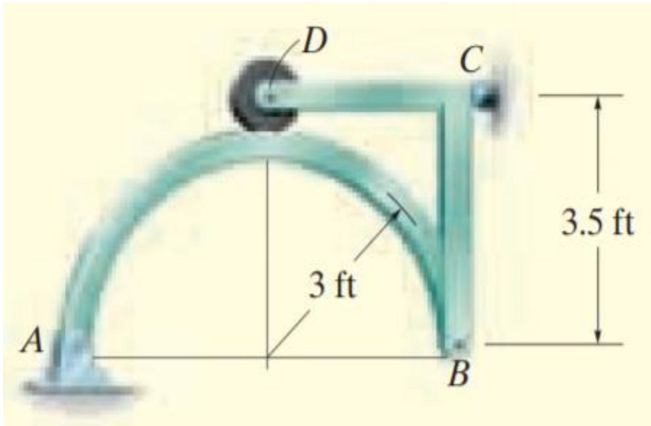
$$N_A = 120\text{ lb}$$

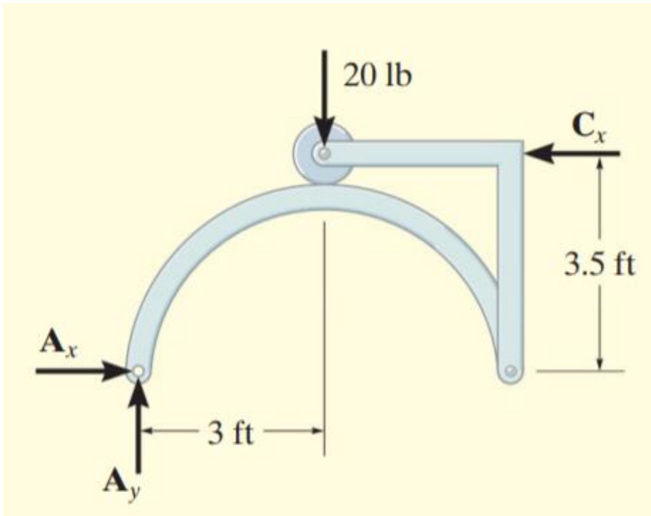


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_F + 160\text{ lb} - 140\text{ lb} - 200\text{ lb} = 0$$

$$N_F = 180\text{ lb}$$

- **Example6-20. The smooth disk is pinned at D and has a weight of 20 lb. Neglecting the weights of the other members, determine the horizontal and vertical components of reaction at pins B and D ?**

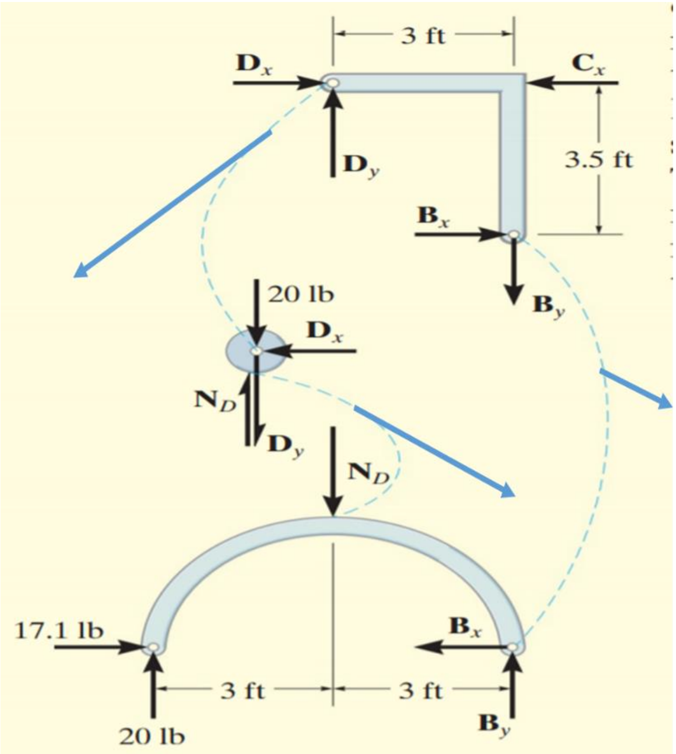




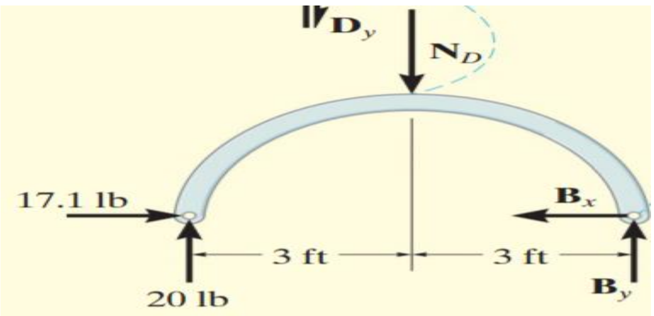
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -20\text{ lb}\,(3\text{ ft}) + C_x(3.5\text{ ft}) = 0 \qquad C_x = 17.1\text{ lb}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - 17.1\text{ lb} = 0 \qquad A_x = 17.1\text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 20\text{ lb} = 0 \qquad A_y = 20\text{ lb}$$



فصلنا إلى ثلاثة أجزاء والأهم من ذلك عند نقطة الفصل تكون القوى متساوية في المقدار و متعاكسة في الإتجاه لكي يلغوا بعض كا هوموضح في الصورة

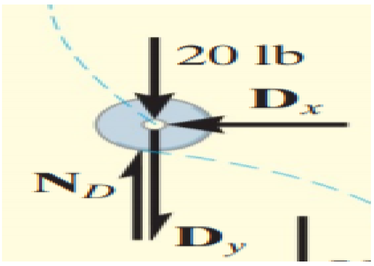


Member AB

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 17.1 \text{ lb} - B_x = 0 \qquad B_x = 17.1 \text{ lb}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad -20 \text{ lb}(6 \text{ ft}) + N_D(3 \text{ ft}) = 0 \qquad N_D = 40 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 20 \text{ lb} - 40 \text{ lb} + B_y = 0 \qquad B_y = 20 \text{ lb}$$



$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad D_x = 0$$

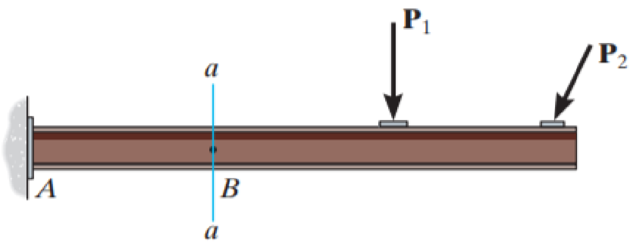
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 40 \text{ lb} - 20 \text{ lb} - D_y = 0 \qquad D_y = 20 \text{ lb}$$

7 Internal Forces 343

- To <u>design</u> a structural or mechanical member it is necessary to know the <u>loading</u> acting within the member in order to be sure the material can resist this loading. <u>Internal loadings</u> can be determined by using the <u>method of sections</u>.

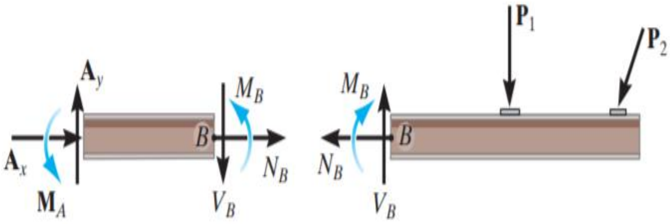
لكي نصمم عنصر إنشائي يتطلب علينا معرفة الأحمال المؤثرة عليه لكي نضمن مقاومته لهذا الحمل . والقوى الداخلية يمكننا معرفتها عن طريق الشابتر السادس الذي أخذناه وتسمى الطريقه ب القطع .

ومن باب التذكير القوى الداخلية , تكون ثلاثة أنواع ولا نرسمها في مخطط الجسم الحر لأنهم نفس المقدار ومتعاكسات في الإتجاه لذلك يلغوا بعض .

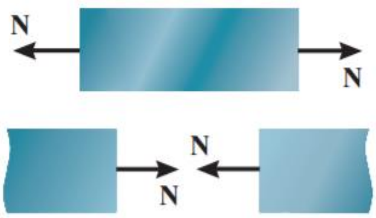


جسم إنشائي نريد معرفة القوى الداخلية عليه عند النقطة المطلوبة , ما المقصود القطع ؟ إعتبر الجسم قطعة كيك وقمت بنشرها وصارت ل جزئين ف ماذا سنرى ؟

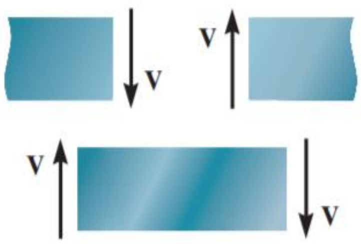
عندما نقطع يصبح الجسم إلى جزئين , عند نقطة الإنفصال وعليه القوى الداخليه وإذا أردنا وصل الجزيئين مع بعضهم البعض تلتغي القوى الداخلية والأن سنوضح .



- The force component N_B that acts perpendicular to the cross section is termed the <u>normal force</u> .
- The normal force is said to be positive if it creates tension .
- The force component V_B that is tangent to the cross section is called the <u>shear force</u> .
- <u>Positive shear</u> force will cause the beam segment on which it acts to <u>rotate clockwise</u>



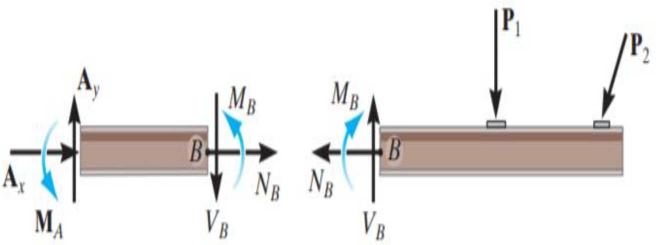
Positive normal force

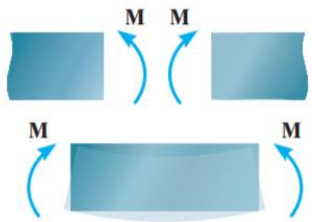


Positive shear

❖ The couple moment M_B is referred to as the **bending moment**.

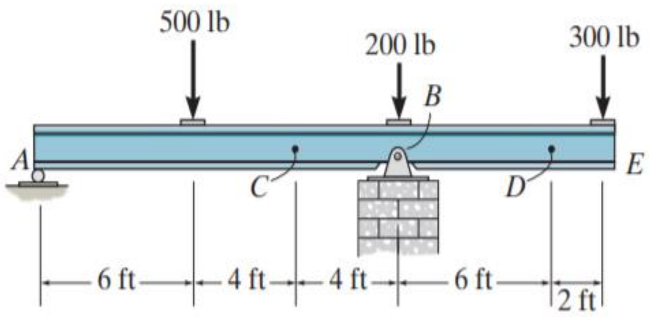
➢ Positive bending moment will tend to bend the segment on which it acts in a concave upward manner.



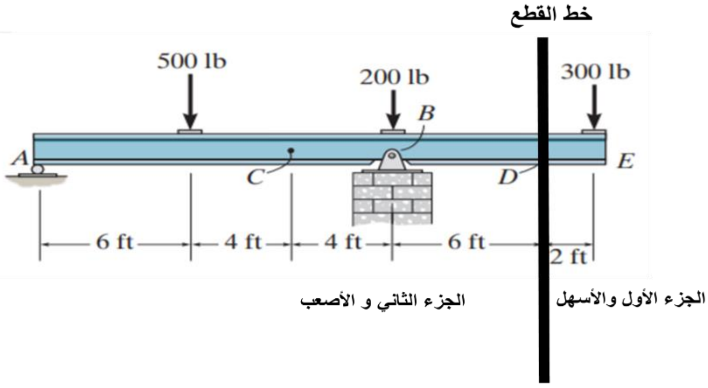


Positive moment

❑ **Prop7-1. Determine the shear force and moment at D ?**

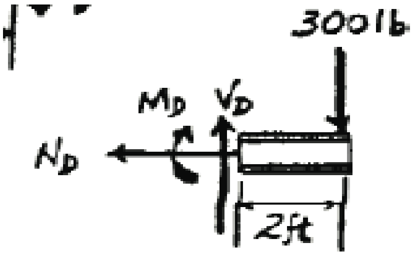


الخطوة الأولى : عليك أن تنظر إلى مكان النقطة المطلوبة وتعرف أي جزء تختار لكي تجد ردود الافعال للدعائم



ملاحظة : لو قمنا بإيجاد ردود الأفعال , لن نخسر سوى الوقت في الإمتحان لذلك كن حكيما في الإختيار وأيضا عليك أن تختار جزء سهل للحل وكلاهما صحيح لكن نحن نهتم بالوقت

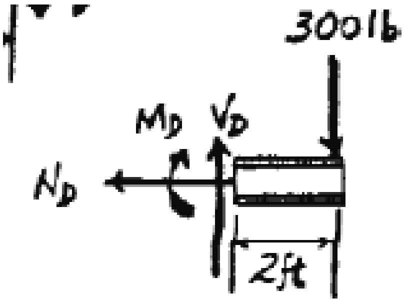
الخطوة الثانية : نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad N_D = 0$$

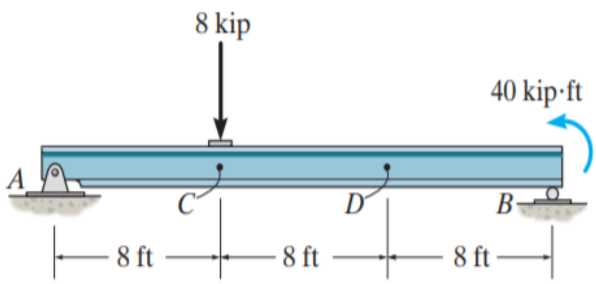
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_D - 300 = 0 \qquad V_D = 300 \text{ lb}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0; \qquad -M_D - 300\,(2) = 0 \qquad M_D = -600 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

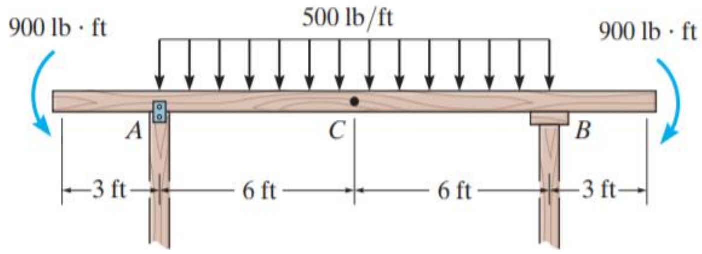


❑ **Prop7-2. Determine the internal normal force and shear force, and the bending moment in the beam at point C .**

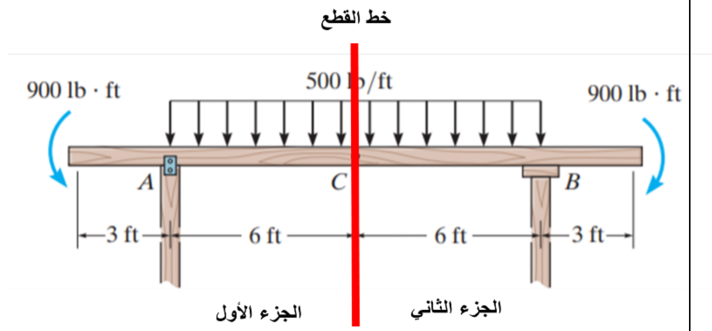
Assume the support at B is a roller. Point C is located just to the right of the 8-kip load ?



- ☐ **Prop7-8. Determine the internal shear force and moment acting at <u>point C</u> in the beam ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تنظر إلى مكان النقطة المطلوبة وتعرف أي جزء تختار لكي تجد ردود الافعال ل الدعائم

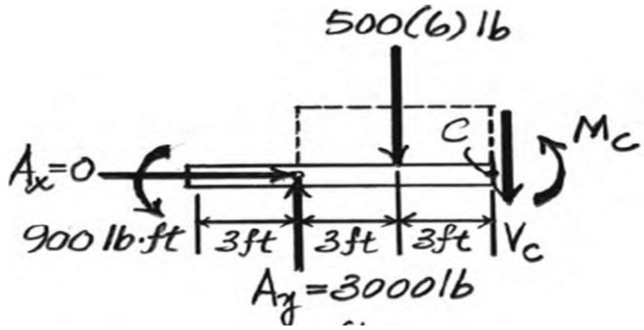


الجزء الأول أو الثاني لن يفرق نفس المستوى وهنا سنأخذ الجزء الأول

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 500(12)(6) + 900 - 900 - A_y(12) = 0 \quad A_y = 3000 \text{ lb}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$

<u>الخطوة الثانية :</u> نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .



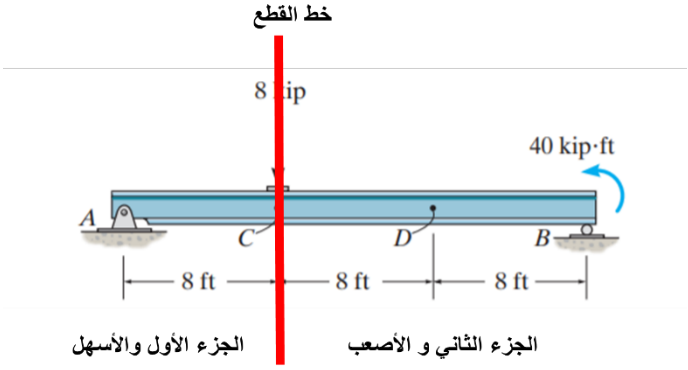
<u>حساب القوى الداخلية</u>

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3000 - 500(6) - V_C = 0 \quad V_C = 0$

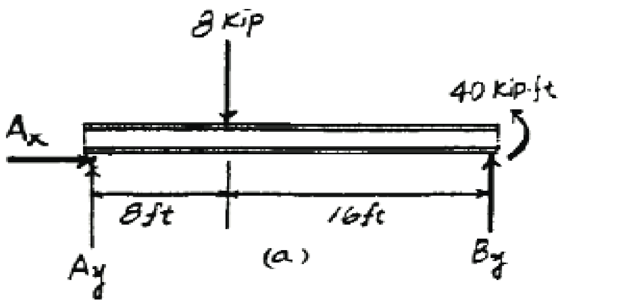
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad M_C + 500(6)(3) + 900 - 3000(6) = 0$

$M_C = 8100 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 8.10 \text{ kip} \cdot \text{ft}$

<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تنظر إلى مكان النقطة المطلوبة وتعرف أي جزء تختار لكي تجد ردود الافعال ل الدعائم



<u>حساب ردود الأفعال</u>



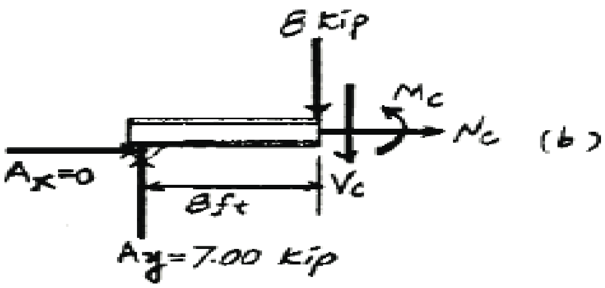
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(24) + 40 - 8(8) = 0 \quad B_y = 1.00 \text{ kip}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 1.00 - 8 = 0 \quad A_y = 7.00 \text{ kip}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

<u>حسبنا رد الفعل هكذا فقط لأننا أخذنا جزء فيها هذه الدعيمة</u>

<u>الخطوة الثانية :</u> نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .

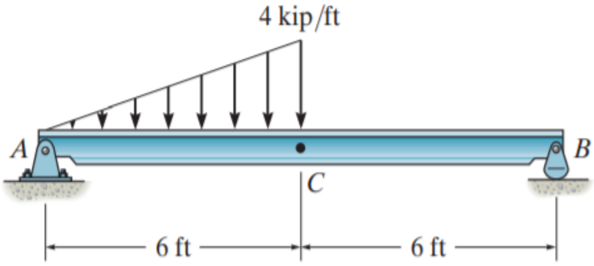


$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad N_C = 0$

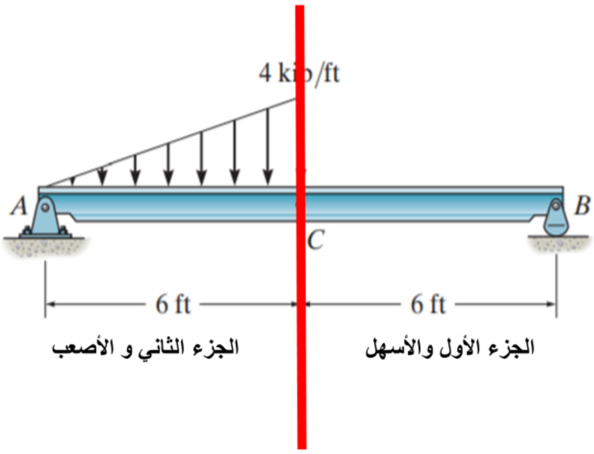
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 7.00 - 8 - V_C = 0 \quad V_C = -1.00 \text{ kip}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad M_C - 7.00(8) = 0 \quad M_C = 56.0 \text{ kip} \cdot \text{ft}$

- **Prop7-7. Determine the internal shear force and moment acting at point C in the beam ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تنظر إلى مكان النقطة المطلوبة وتعرف أي جزء تختار لكي تجد ردود الافعال ل الدعائم

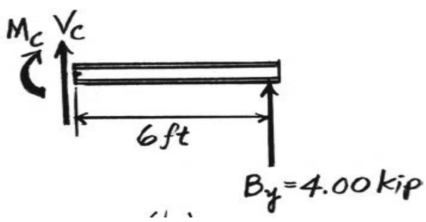


<u>حساب ردود الأفعال</u>

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(12) - \frac{1}{2}(4)(6)(4) = 0 \quad B_y = 4.00 \text{ kip}$$

وهذا الرد الفعل الذي اريده لانه سأخذ الجزء الأول وهنا يكمن تميز طالب عن طالب أخر بحكمة الإختيار

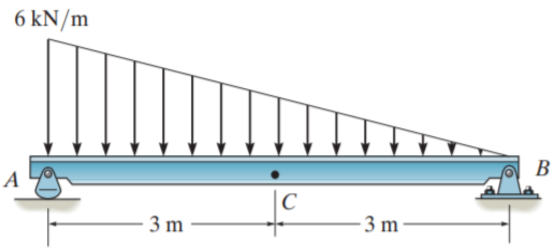
<u>الخطوة الثانية :</u> نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .

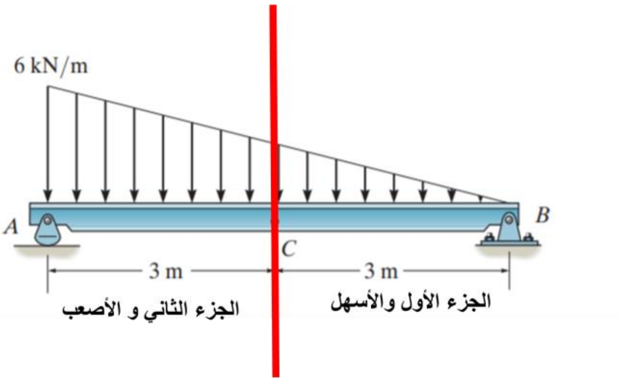


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 4.00 = 0 \quad V_C = -4.00 \text{ kip}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad 4.00(6) - M_C = 0 \quad M_C = 24.0 \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

- **Prop7-15. Determine the internal normal force, shear force, and moment <u>at point C</u> ?**

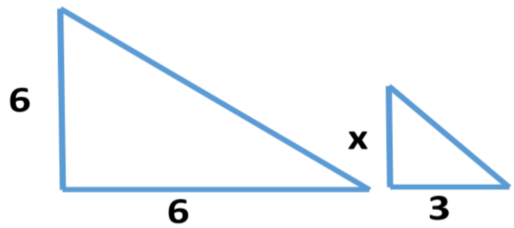




$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(6) - \frac{1}{2}(6)(6)(2) = 0 \quad B_y = 6.00 \text{ kN}$$

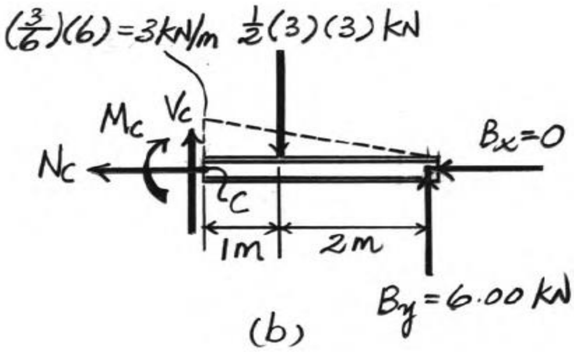
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0$$

نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .



$$\frac{6}{6} = \frac{x}{3}$$

x=3



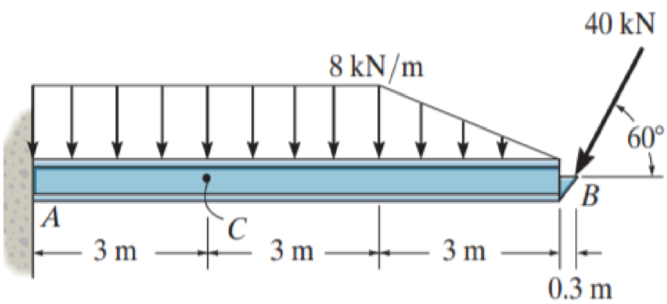
حساب القوى الداخلية

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$$

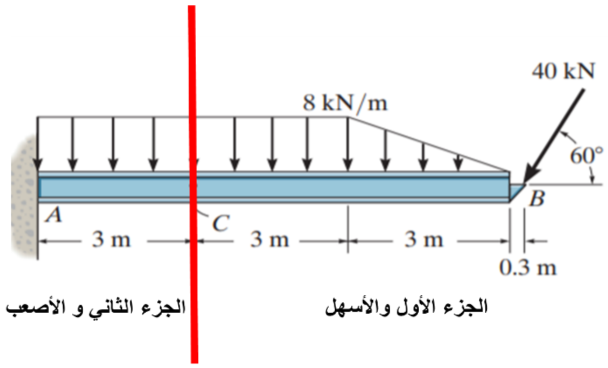
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad V_C + 6.00 - \frac{1}{2}(3)(3) = 0 \qquad V_C = -1.50\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_C = 0; \quad 6.00(3) - \frac{1}{2}(3)(3)(1) - M_C = 0 \quad M_C = 13.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$

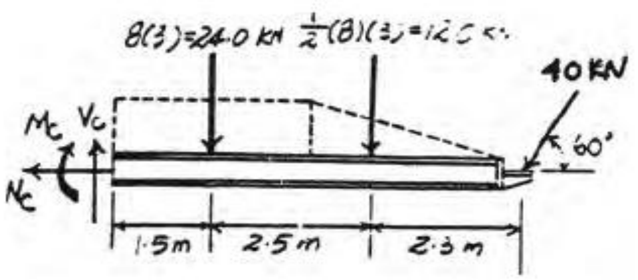
- ❑ **Prop7-26. Determine the internal normal force, shear force, and bending moment at <u>point C</u> ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> عليك أن تنظر إلى مكان النقطة المطلوبة وتعرف أي جزء تختار لكي تجد ردود الافعال ل الدعائم



<u>الخطوة الثانية :</u> نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان .



$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad -40\cos 60° - N_C = 0 \quad N_C = -20.0\text{ kN}$$

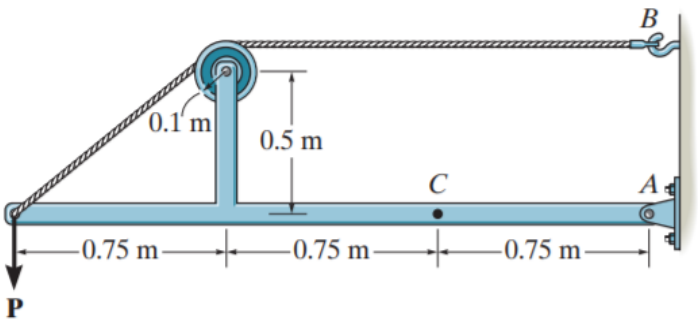
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad V_C - 24.0 - 12.0 - 40\sin 60° = 0$$

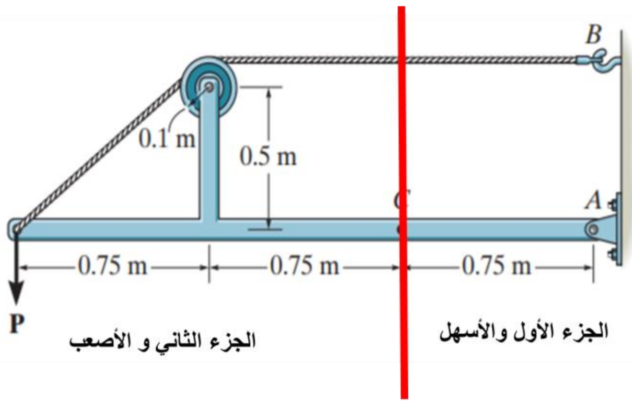
$$V_C = 70.6\text{ kN}$$

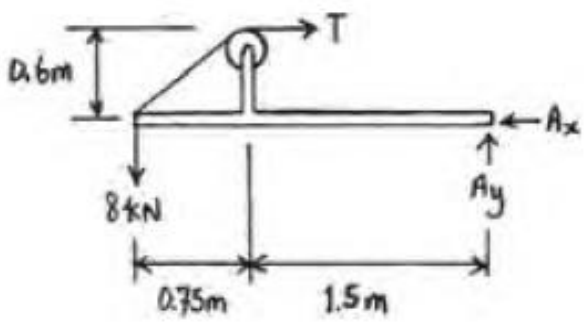
$$\circlearrowleft+\Sigma M_C = 0; \quad -24.0(1.5) - 12.0(4) - 40\sin 60°(6.3) - M_C = 0$$

$$M_C = -302\text{ kN}\cdot\text{m}$$

- ❑ **Prop7-9. Determine the normal force, shear force, and moment at a section passing through <u>point C</u>. Take P = 8 kN ?**





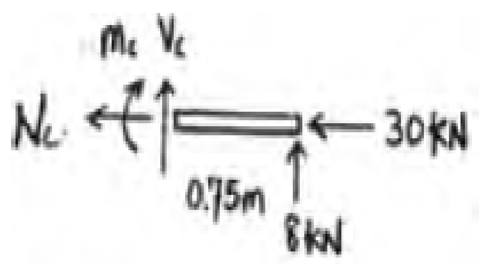


$$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0; \qquad -T(0.6) + 8(2.25) = 0$$

$$T = 30\text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad A_x = 30\text{ kN}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad A_y = 8\text{ kN}$$



$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -N_C - 30 = 0$

$N_C = \ -30 \text{ kN}$

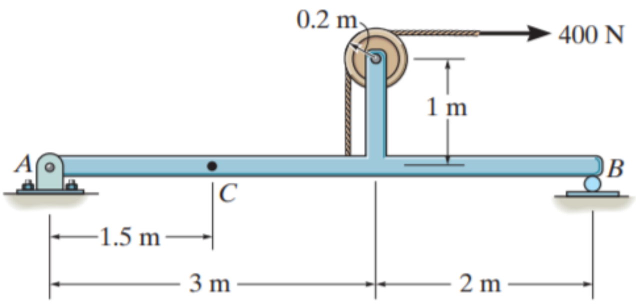
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_C + 8 = 0$

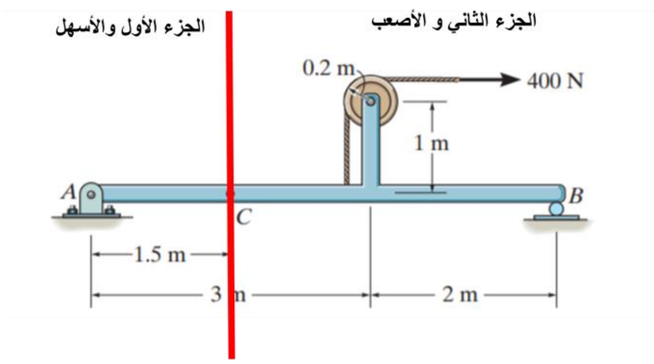
$V_C = \ -8 \text{ kN}$

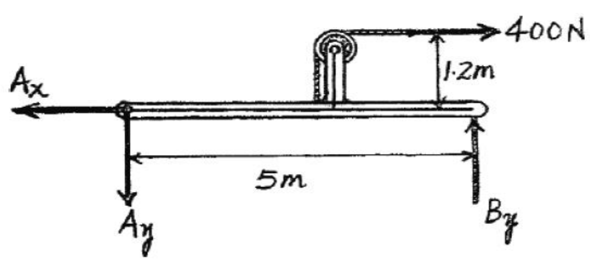
$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -M_C + 8(0.75) = 0$

$M_C = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- ❑ **Prop7-23. Determine the internal normal force, shear force, and moment at <u>point C</u> ?**







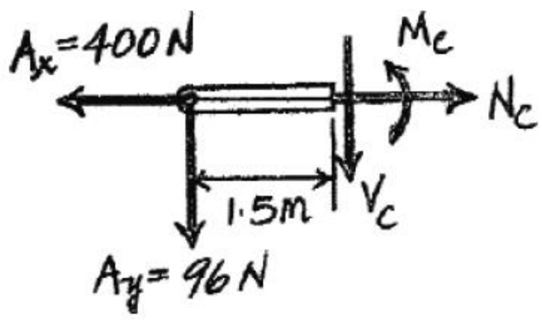
$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + 400 = 0$

$A_x = 400 \text{ N}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad A_y\,(5) - 400(1.2) = 0$

$A_y = 96 \text{ N}$

نأخذ الجزء المطلوب ونرسم القوى الداخلية الثلاثة عليه ونطبق قوانين الإتزان



Segment *AC*:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C - 400 = 0$

$N_C = 400 \text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -96 - V_C = 0$

$V_C = -96 \text{ N}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad M_C + 96\,(1.5) = 0$

$M_C = -144 \text{ N} \cdot \text{m}$

- ❖ **Beams are structural members designed to support loadings applied perpendicular to their axis.**

البيم هو عنصر إنشائي صمم لكي يتحمل الحمل المطبق عليه والذي يكون عامودي على المحور .

- ❖ **Simply supported beam is pinned at one end and roller supported at the other .**

- ❖ **Cantilevered beam is fixed at one end and free at the other .**

shear and moment diagrams

الشكل حفظ زي اسمك

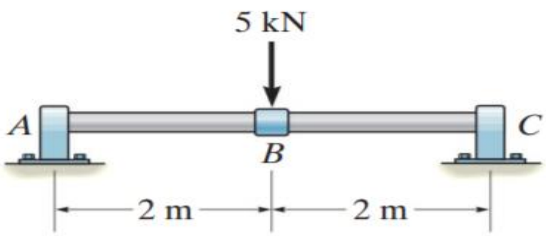
سيتم التوضيح مع الامثلة

Load	Slope for shear force	Slope for bending Moment
P	Constant	Linear
Uniformly distributed load	Linear	Parabolic
Uniformly varying load	Parabolic	Cubic

Figure-1 Slopes for various types of loads

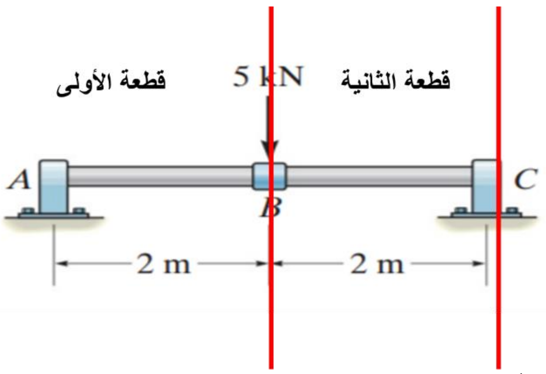
Load	0	0	Constant
Shear	Constant	Constant	Linear
Moment	Linear	Linear	Parabolic
Load	0	Constant	Linear
Shear	Constant	Linear	Parabolic
Moment	Linear	Parabolic	Cubic

- **Example. Draw the shear and moment diagrams for the shaft . The support at A is a thrust bearing and the support at C is a journal bearing ?**

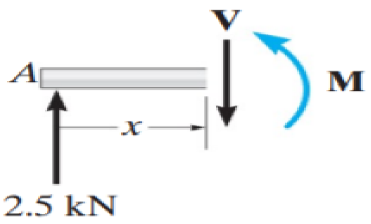


الخطوة الأولى : نجد ردود الأفعال وهنا ك **حالة إستثنائية** , القوة في المنتصف إذن الحمل سينقسم إلى النصف على كل دعيمة

الخطوة الثانية : نبدأ من البيم من أي نقطة نريد ونأخذ **قطعة قطعه, عندما يتغير الحمل أو يطرأ تغير نأخذ خط قطع وهكذا** ونحسب القوى الداخلية والأن سأوضح .



القطعة الأولى : مسافة الإكس هي لا نعلمها ولكن نعلم مجالها , من أين تبدأ ومن أين تنتهي والأهم عندما تريد حساب القوة الداخلية أن يكون خط القطع قبل 2

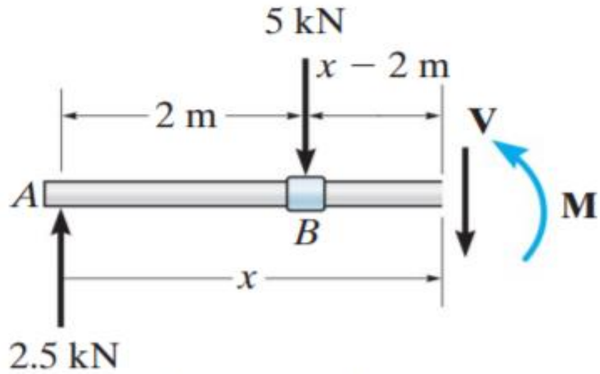


$0 \le x < 2\text{ m}$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V = 2.5\text{ kN}$

$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M = 2.5x\text{ kN}\cdot\text{m}$

القطعة الثانية: وهنا انتبه , نبدأ من البداية وصولا ل القطعة الثانية وأخذ خط قطع وحساب القوى الداخلية



$2\text{ m} < x \le 4\text{ m}$

(c)

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V = 2.5\text{ kN}$

$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M = 2.5x\text{ kN}\cdot\text{m}$

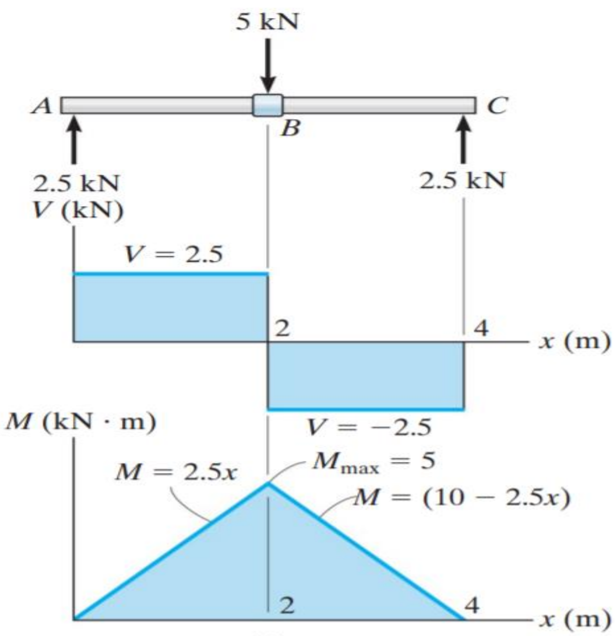
مشتقة المومنت تعطى الشير

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 2.5\text{ kN} - 5\text{ kN} - V = 0$

$V = -2.5\text{ kN}$

$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M + 5\text{ kN}(x - 2\text{ m}) - 2.5\text{ kN}(x) = 0$

$M = (10 - 2.5x)\text{ kN}\cdot\text{m}$



(d)

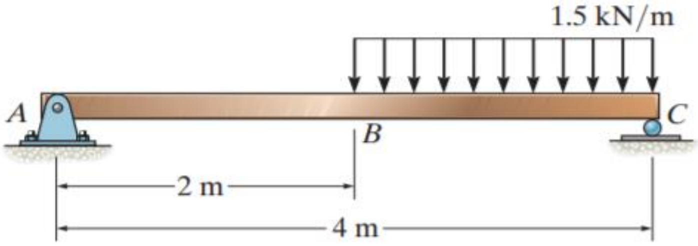
توضيحات

إذا كان شكل الحمل هكذا , يكون شكل الشير خط مستقيم ويكون شكل العزم خط مائل

إذا كانت القوة موجبة يكون الشير موجب والعزم كذلك

الشير والمومنت **يجب أن يغلقوا** وخلاف ذلك حلك خاطئ

- ❑ **Prop7-56. Draw the shear and moment diagrams for the beam ?**



- ❑ **الخطوة الأولى : نجد ردود الأفعال**

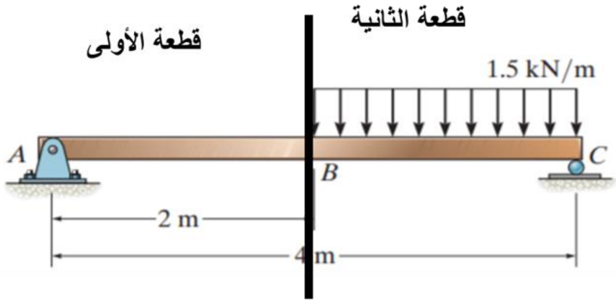
- ❑ $\Sigma MA = 4 * CY - 1.5 * 2 * 3 = 0$

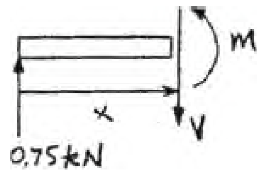
C_Y=2.25

- ❑ $\Sigma FY = AY - 1.5 * 2 + 2.25 = 0$

A_Y=0.75

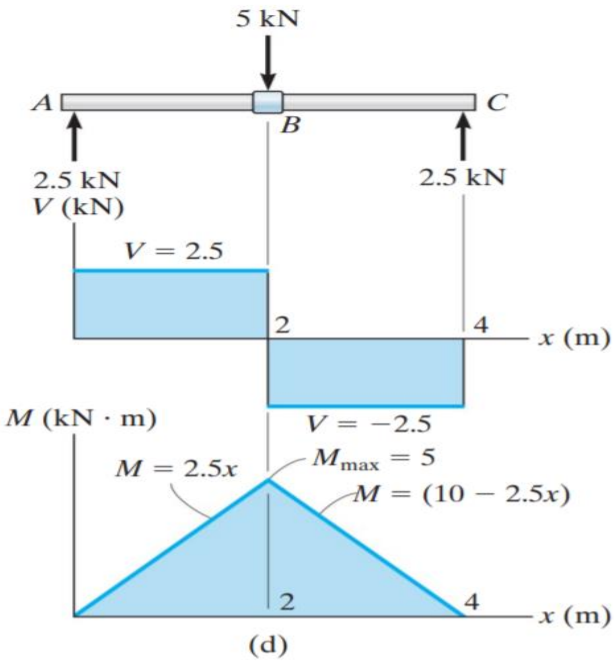
- ❑ **الخطوة الثانية :** نبدأ من البيم من أي نقطة نريد ونأخذ **قطعة قطعه ,عندما يتغير الحمل أو يطرأ تغير نأخذ خط قطع وهكذا** ونحسب القوى الداخلية والأن سأوضح .





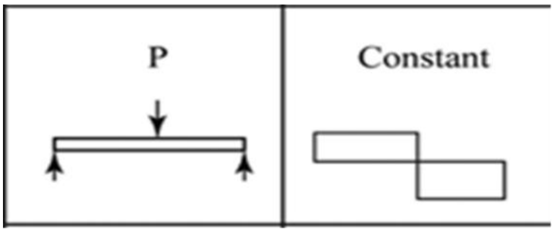
القطعة الأولى : مسافة الإكس هي لا نعلمها ولكن نعلم مجالها , من أين تبدأ ومن أين تنتهي والأهم عندما تريد حساب القوة الداخلية أن يكون خط القطع قبل 2

معادلة الشير والمومنت الخاصة بهذه القطعة



Shear :

نبدأ من اليسار دائما , يوجد قوة 2.5 فنطلع مسافة قدرها 2.5 بالتقدير , **ثم نسير بخط مستقيم لماذا** ؟ لأنه لا يوجد قوى تغير الشكل إلى أن نجد القوة مقدارها 5 ونحنا معنا 2.5 لكن ننتبه إلى أن 5 قيمتها سالبة فننزل من 2.5 إلى الأسفل بمقدار 5 فنصل إلى 2.5 بالسالب ويستمر الخط لماذا ؟ لأنه لا يوجد قوى داخلية تؤثر على الشكل إلى أن نجد قوة مقدارها 2.5 موجبة فترفع 2.5 بالسالب إلى الصفر ويقفل الشكل ويجب أن يقفل وخلاف ذلك يوجد خطأ



شكل الحمل **شكل قوى القص , خط مستقيم**

Moment :

نبدأ من اليسار دائما واجعل الرسمة دائما تكون هكذا , لوجد لكل قطعة معادلة مومنت خاصة بها ويوجد مسافات كانت تحدد بقيمة الإكس , فأول قطعة كانت معادلتها كما في الصورة والمسافة هي 2 فنضربهم ويظهر الناتج 5 والأن نبدأ بالقطعة الثانية ومعادلتها موجوده أيضا ونعوض المسافة 4 فيكون الجواب صفر إذن يغلق الشكل , ويجب أن يغلق وخلاف ذلك يوجد خطأ

Load	Slope for shear force	Slope for bending Moment
P	Constant	Linear
شكل الحمل	**شكل قوى القص**	**شكل العزم**

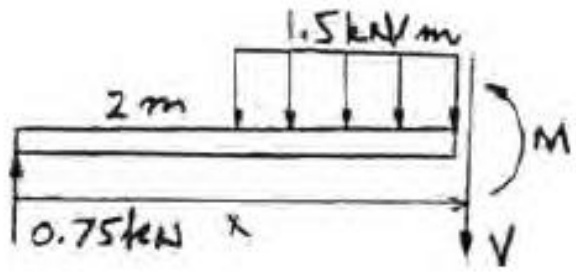
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 0.75 - V = 0$$

$$V = 0.75 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M - 0.75x = 0$$

$$M = 0.75\, x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

القطعة الثانية : وهنا انتبه , نبدأ من البداية وصولا للقطعة الثانية وأخذ خط قطع وحساب القوى الداخلية



معادلة الشير والمومنت الخاصة بهذه القطعة

$2 \text{ m} < x < 4 \text{ m}:$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 0.75 - 1.5\,(x-2) - V = 0$$

$$V = 3.75 - 1.5\, x \text{ kN}$$

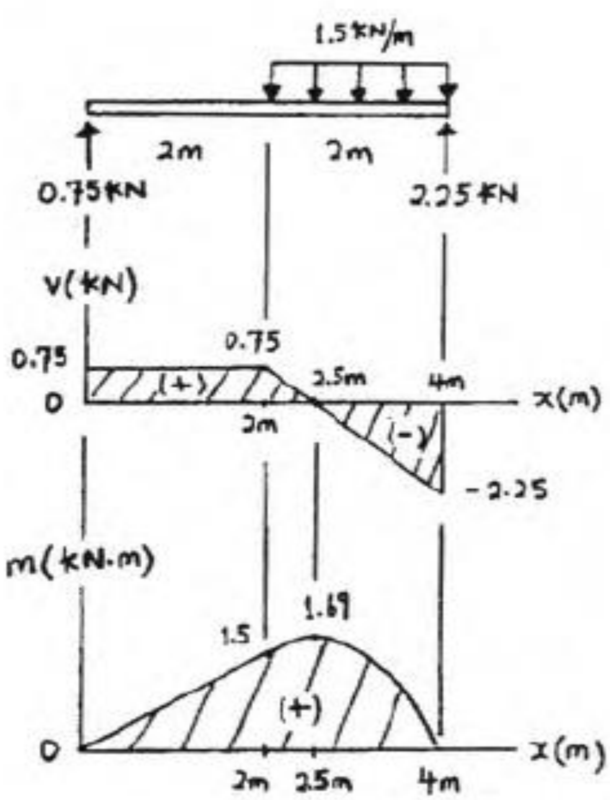
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + \frac{1.5}{2}(x-2)^2 - 0.75\, x = 0$$

$$M = -0.75\, x^2 + 3.75\, x - 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

نرسم المومنت والشير وأعيد الجدول حفظ بصم

Load	Slope for shear force	Slope for bending Moment
P	Constant	Linear
Uniformly distributed load	Linear	Parabolic

- **إذا كان شكل الحمل موزع** , يكون شكل الشير خط مائل ويكون شكل العزم خط قوسي
- إذا كان الحمل يتناقص بشكل ثابت فيكون الشير متناقص بخط مائل , والعزم يتناقص كذلك بخط قوسي



توضيحات :

<u>Shear :</u> نبدأ من اليسار دائما , يوجد قوة 0.75 فنطلع مسافة قدرها 0.75 بالتقدير , ثم نسير بخط مستقيم لماذا ؟ لأنه لا يوجد قوى تغير الشكل إلى أن نشاهد حمل على شكل مستطيل فهنا يجب حساب قيمته كما هو موضح ثم النزول بخط مستقيم وصولا ل - 2.25 ومن ثم نجد حمل ل الأعلى لكي يغلق الشكل .

0.75 – 1.5*2 = - 2.25

<u>Moment :</u> نبدأ من اليسار دائما , كان لدينا قطعتين ولكل قطعة معادلة مومنت خاصة بها ,

$$M = 0.75\, x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

when x = 2 M=1.5 (Part 1)

يوجد شئ إسمه **<u>الزيرو الشير والذي يكون عنده أقصى مومنت</u>** والذي نجده عن طريق معادلة الشير الموجودة في القطعة الثانية

$$V = 3.75 - 1.5\, x \text{ kN}$$

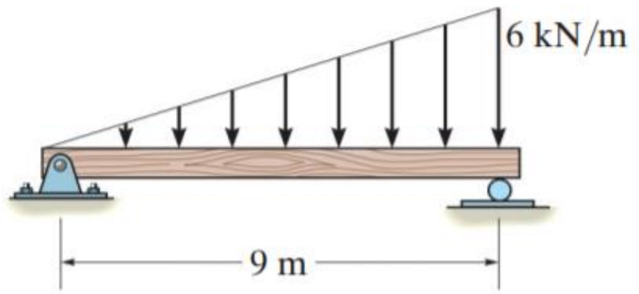
x=2.5

$$M = -0.75\, x^2 + 3.75\, x - 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

عوض **<u>المسافة</u>** في معادلة العزم

M=1.69

- **Example. Draw the shear and moment diagrams for the beam ?**



الخطوة الأولى : نجد ردود الأفعال

$$\Sigma MB=\frac{1}{2}*9*6*\frac{1}{3}*9-AY=0$$

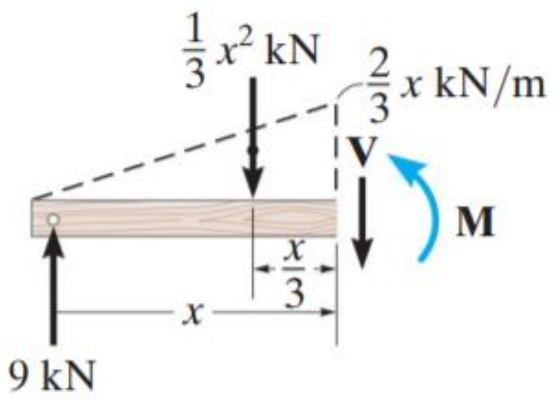
$$AY=9$$

$$\Sigma Fy=-\frac{1}{2}*9*6+9+BY=0$$

$$BY=18$$

الخطوة الثانية : عندما نتعامل مع الحمل ويكون موزع وعلى شكل مثلث , يطرأ بعض التغيرات والإختلافات وعليك الإنتباه .

إقطع الشكل من أي مكان تريد ولتكن مسافة لا نعلمها وقيمتها إكس



$$\frac{6}{9}=\frac{w}{x} \qquad w=\frac{2}{3}x$$

$$\text{FR}=\frac{1}{2}*x*\frac{2}{3}\text{x}=\frac{1}{3}x^2$$

الخطوة الثالثة: حساب القوى الداخلية

$$+\uparrow\Sigma F_y=0; \qquad 9-\frac{1}{3}x^2-V=0$$

$$V=\left(9-\frac{x^2}{3}\right)\text{kN}$$

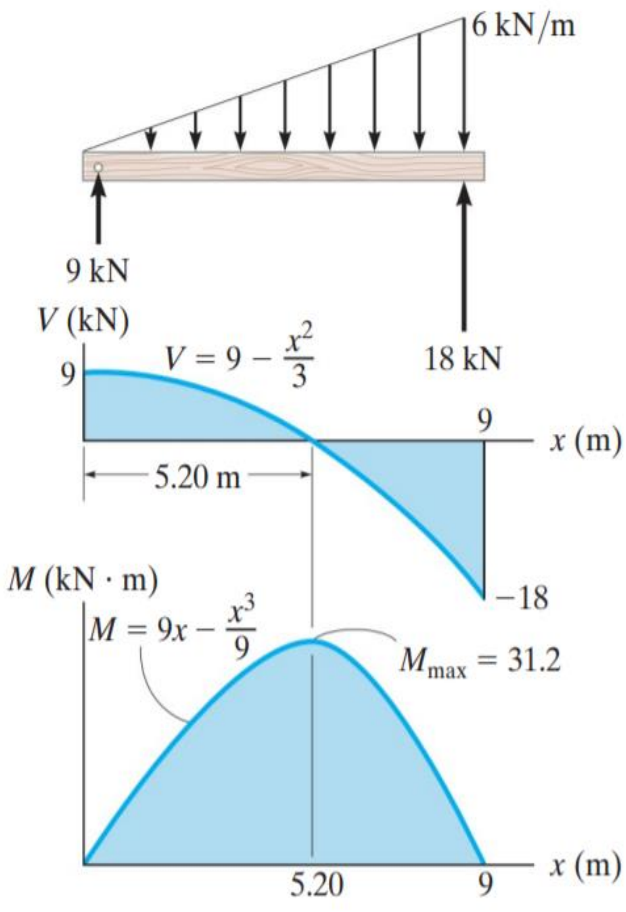
$$\circlearrowleft+\Sigma M=0; \qquad M+\frac{1}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right)-9x=0$$

$$M=\left(9x-\frac{x^3}{9}\right)\text{kN}\cdot\text{m}$$

دائما , عندما يكون **الشير صفر** يكون في **نفس النقطة أعلى قيمة ل العزم** ولكي نعرف متى يكون الشير صفر , علينا تعويض قيمة الشير صفر في معادلة الشير **ومعرفة أين تكون المسافة**

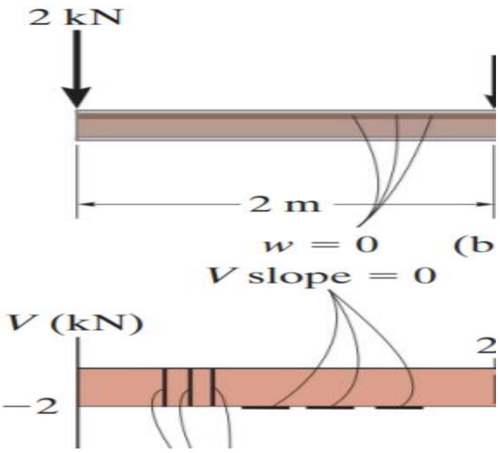
$$V=9-\frac{x^2}{3}=0$$

$$x=5.20\text{ m}$$

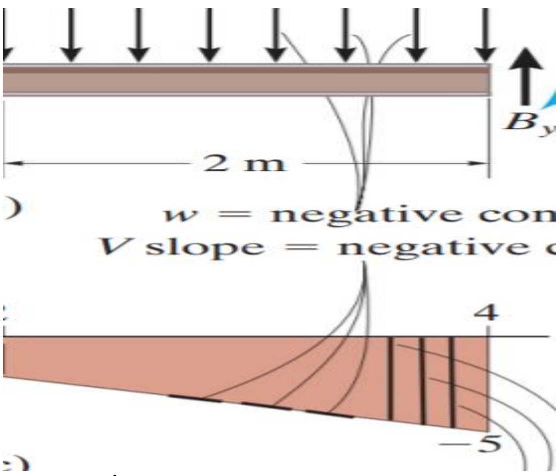


التوضيح في الصفحة التالية

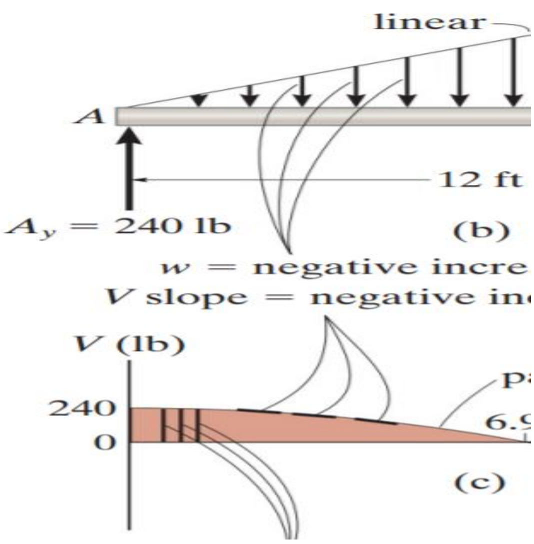
❖ إذا كان **يوجد منطقة في البيم ليس عليها حمل** فتكون رسمة الشير **خط مستقيم** كما هو موضح في الصورة



❖ إذا كان الحمل **موزع وثابت** ومتجه ل الأسفل , فيكون **الشير خط مائل خطي متجه ل الأسفل**



❖ إذا كان الحمل **موزع ومتغير** ومتجه ل الأسفل , فيكون **الشير خط قوسي متجه ل الأسفل**



Shear : نبدأ دائما من اليسار إلى مسافة مقدارها 9 ومن ثم ننزل بخط للأسفل و**لا يكون الخط مستقيم** وننزل إلى أن نصل إلى -18 والتي قمنا بحسابها في الأسفل ومن ثم نجد رد الفعل والذي قيمته 18 ثم يغلق الشكل .

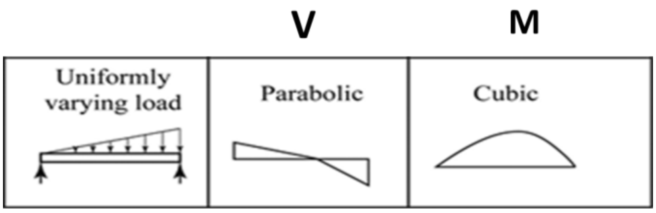
AY =9 **(قمنا بإيجادها في بداية السؤال)**

BY =18**(قمنا بإيجادهم في بداية السؤال)**

نعوض **5.2** في معادلة الشير لكي نصل إلى قيمة الزيرو شير ومن ثم نعوض **9** في معادلة الشير لكي نصل إلى -18

Moment : نبدأ من اليسارونعوض مسافة 5.20 في معادلة المومنت إلى أن نصل **إلى اقصى عزم** والذي هو نفسه الزيرو الشير ومن ثم نعوض مسافة 9 في معادلة المومنت لكي يكون الجواب صفر ويغلق الشكل .

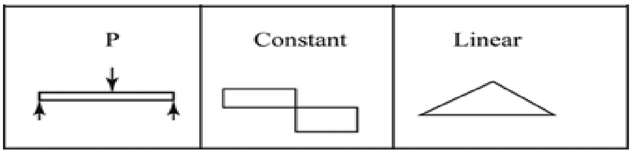
إذا كان شكل الحمل هكذا , يكون شكل الشير خط قوسي ويكون شكل العزم خط قوسي



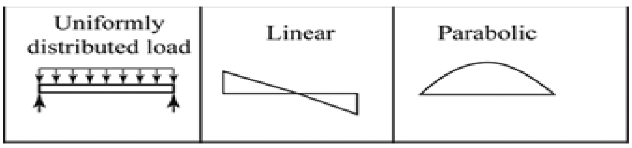
إذا كان الحمل يتزايد بشكل متغير بإتجاه السالب فيكون الشير متزايد بخط قوسي بإتجاه السالب

الخلاصة :

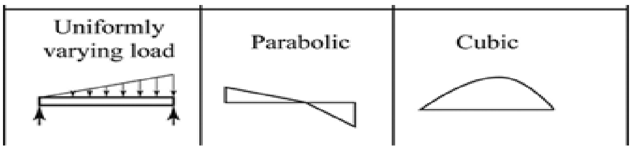
إذا كان الحمل قوة عادية أي غير موزع , يكون الشير خط ثابت ومستقيم والعزم خط مائل خطي



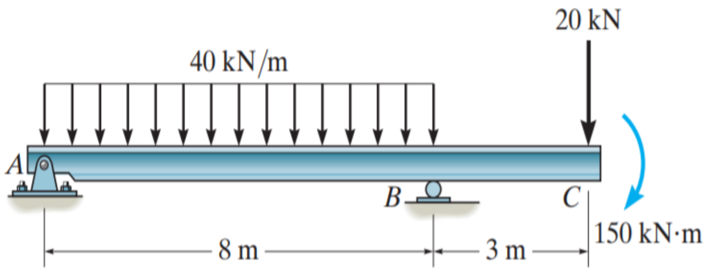
إذا كان الحمل قوة موزعة ثابتة أي يكون الشير خط خطي مائل ومستقيم والعزم خط قوسي .



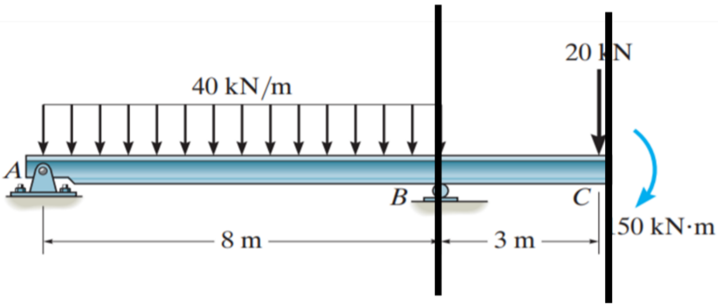
إذا كان الحمل قوة موزعة متغيره أي يكون الشير خط قوسي ومستقيم والعزم خط قوسي .



- **Prop7-55.** Draw the shear and moment diagrams for the beam ?



- **الخطوة الأولى : نجد ردود الأفعال**
- $\Sigma MA = -40 * 8 * 4 + BY * 8 - 20 * 11 - 150 = 0$
- $BY = 206.25$
- $\Sigma FY = 133.75 + AY - 20 - 40 * 8 = 0$
- $AY = 133.75$
- **الخطوة الثانية :** نبدأ من البيم من أي نقطة نريد ونأخذ **قطعة قطعه ,عندما يتغير الحمل أو يطرأ تغير نأخذ خط قطع وهكذا** ونحسب القوى الداخلية والأن سأوضح .



$0 \le x < 8$

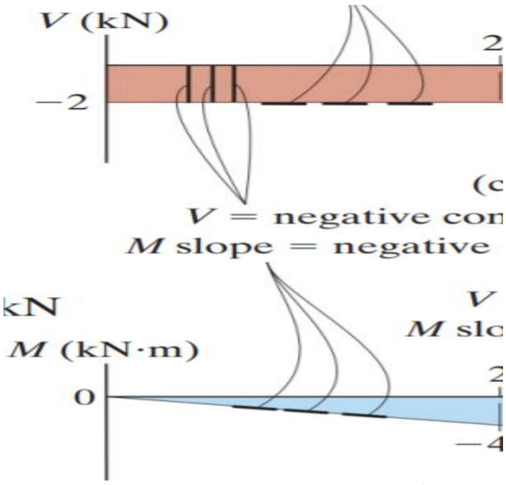
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 133.75 - 40x - V = 0$

$V = 133.75 - 40x$

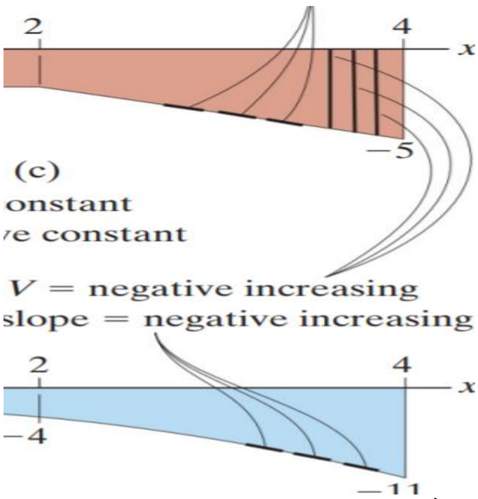
$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad M + 40x\left(\frac{x}{2}\right) - 133.75x = 0$

$M = 133.75x - 20x^2$

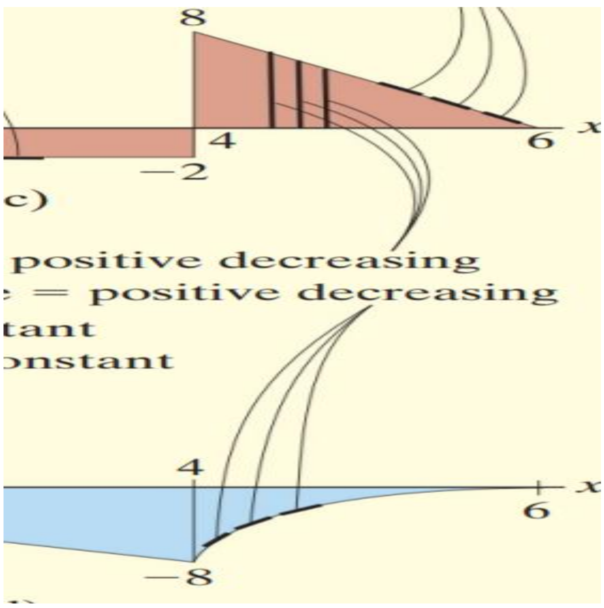
إذا كان **الشير متناقص بشكل ثابت وبالسالب** فيكون **العزم** متناقص وبالسالب وبشكل ثابت

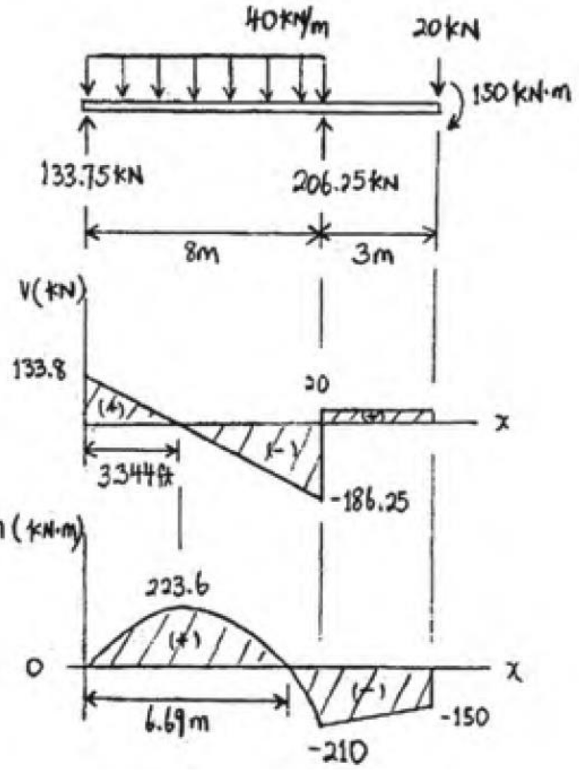


إذا كان الشير **متناقص بشكل متغير وبالسالب** فيكون **العزم** متناقص وبالسالب وبشكل متغير ويكون الخط بشكل قوسي



إذا كان الشير **متناقص بشكل متغير وبالموجب** فيكون **العزم** متناقص وبالموجب وبشكل متغير ويكون الخط بشكل قوسي





توضيحات :

Shear : نبدأ من اليسار دائما وتطلع بمقدار 133.75 بالتقدير ومن ثم ننزل بخط مستقيم إلى أن نصل -186.25 والتي قد وضحتها في الاسفل ومن ثم يطلع للأعلى بمقدار 206.25 إلى أن يصل ل 20 ومن ثم يسير بخط مستقيم ومن ثم ينزل إلى الصفر لوجود رد فعل إلى أن يغلق الشكل

$$V = 133.75 - 40x$$

When x =8 V= -186.25

Moment : نبدأ من اليسار دائما , وننزل إلى -210 والتي وضحتها في الأسفل ومن ثم نطبق معادلة المومنت الثانية الخاصة بالجزء الثاني ويكون الناتج -150 ومن ثم نجد **مومنت خارجي** يؤدي ل إغلاق الشكل

Zero Shear when V =0 And it's the Max Moment also .

$$V = 133.75 - 40x \qquad M = 133.75x - 20x^2$$

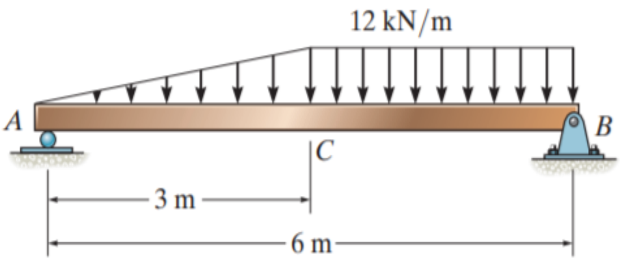
When x=3.34 M=223.6

When x=8 M=-210

$$M = 20x - 370$$

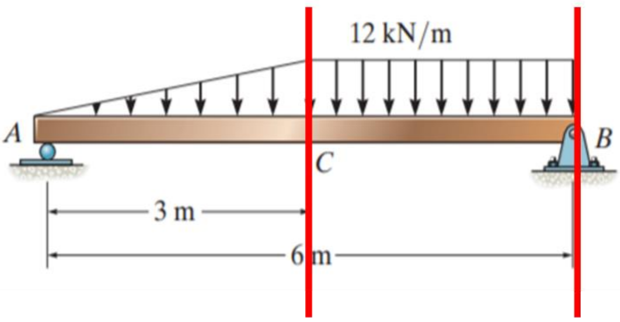
When x = 11 M= -150

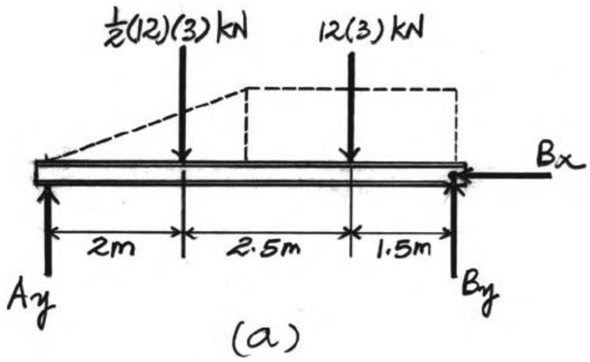
❑ **Prop7-65.** Draw the shear and moment diagrams for the beam ?

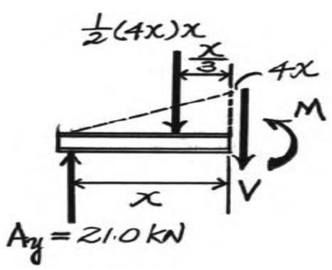


$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 12(3)(1.5) + \frac{1}{2}(12)(3)(4) - A_y(6) = 0 \quad A_y = 21.0\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(6) - \frac{1}{2}(12)(3)(2) - 12(3)(4.5) = 0 \quad B_y = 33.0\text{ kN}$$



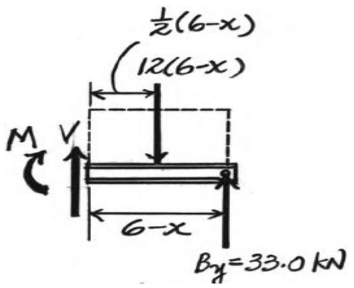




$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 21.0 - \frac{1}{2}(4x)(x) - V = 0 \quad V = \left\{21.0 - 2x^2\right\}\text{ kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0 \quad M + \left[\frac{1}{2}(4x)(x)\right]\left(\frac{x}{3}\right) - 21.0x = 0$$

$$M = \left\{21.0x - \frac{2}{3}x^3\right\}\text{ kN}\cdot\text{m}$$

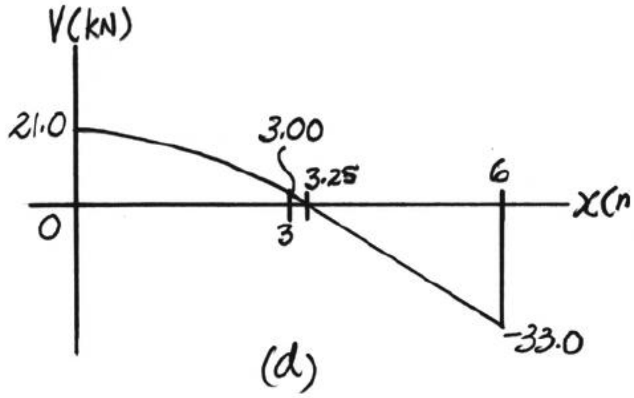


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 33.0 - 12(6-x) = 0 \quad V = \{39.0 - 12x\}\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0 \quad 33.0(6-x) - [12(6-x)]\left[\frac{1}{2}(6-x)\right] - M = 0$$

$$M = \left\{-6x^2 + 39x - 18\right\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Shear : نبدأ من اليسار دائما , نطلع للأعلى بمقدار 21 ومن ثم ننزل إلى 3 عن طريق تطبيق معادلة الشير وتعويض مسافة 3 في الجزء الأول ومن ثم نعوض 6 في معادلة الشير الثانية لكي نصل إلى 33 بالسالب ومن ثم نجد قوة لكي تغلق الشكل



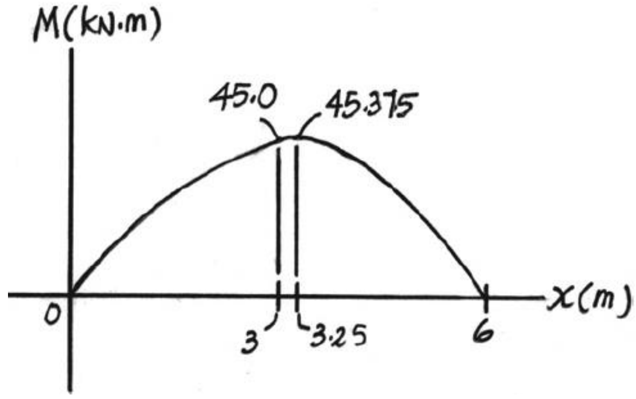
$$V = \left\{21.0 - 2x^2\right\}\ \text{kN}$$

when x=3 then V= 3

$$V = \{39.0 - 12x\}\ \text{kN}$$

when x=6 then V= -33

Zero Shear when V =0 And it's the Max Moment also .



$$V = \left\{21.0 - 2x^2\right\}\ \text{kN}$$

x=3.25

$$M = \left\{21.0x - \frac{2}{3}x^3\right\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

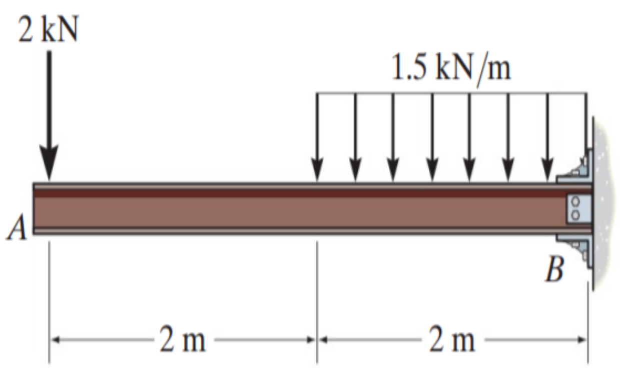
when x=3 then M= 45

when x=3.25 then M= 45.37

$$M = \left\{-6x^2 + 39x - 18\right\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

when x=3 then M= 3

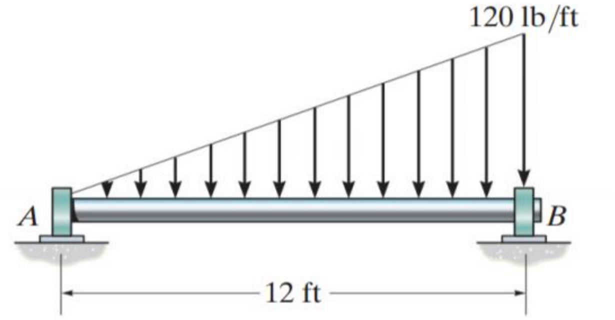
- **Example7.8.** Draw the shear and moment diagrams for the cantilever beam ?



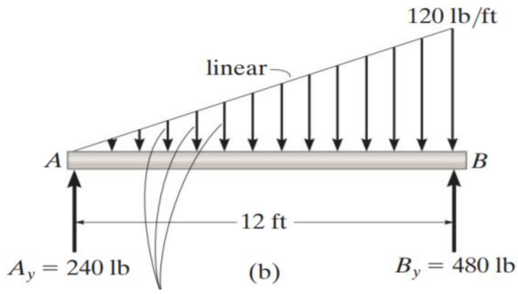
الخطوة الأولى: جد ردود الفعل

الخطوة الثانية : نرسم الشير, دائما إبدء من اليسار , يوجد قوة للأسفل وبمقدار 2 إذن ننزل بمقدار 2 ومن ثم **نسير بشكل خطي لأنه لا يوجد أي قوة تغير الشكل** ثم نجد حمل على شكل مستطيل , نرى كم شدته ونضربها ب عرض المستطيل فيظهر الرقم الذي

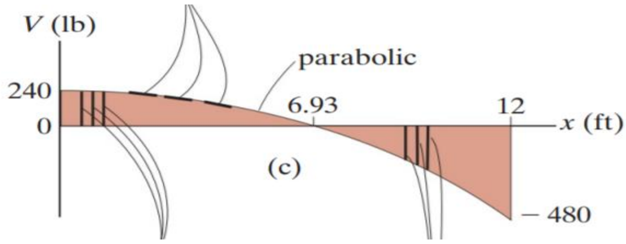
- **Example7.10. The shaft is supported by a thrust bearing at A and a journal bearing at B. Draw the shear and moment diagrams ?**

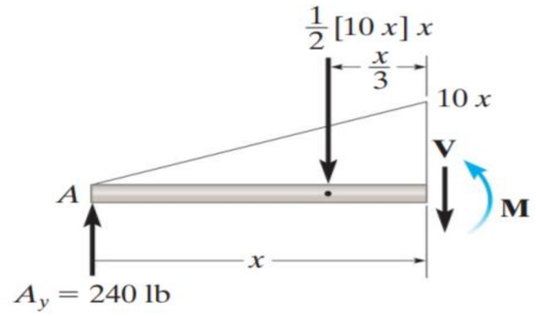


<u>الخطوة الأولى</u> : جد ردود الفعل



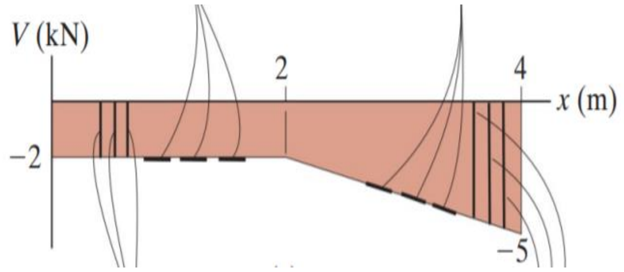
الخطوة الثانية : نرسم الشير, نطلع ل الأعلى بمقدار 240 لوجود رد الفعل , ثم نجد حمل على شكل مثلث , حمل يتزايد ومتجه ل الإسفل لذلك نرسم خط الشير متجه ل الأسفل **<u>ولا يكون خط مستقيم</u>** , إلى أن يصل إلى -480 ومن ثم نجد رد فعل يغلق الشكل ونحن نرسم وجدنا الزيرو شير وكيف نجده سأوضحه الان .





نستخدم تشابه المثلثات

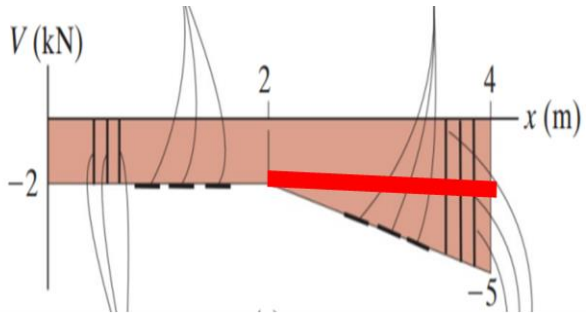
سوف ننزل إليه لأن **<u>الحمل متجه للأسفل</u>** , ومن ثم نجد حمل بنفس المقدار إلى الأعلى ومن ثم يغلق الشكل

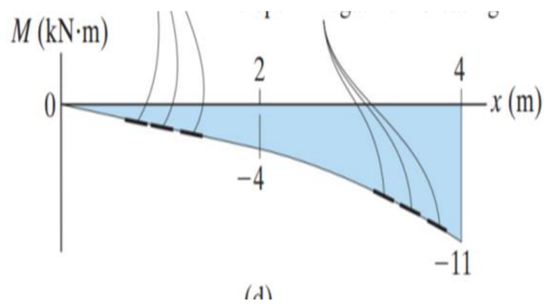


للتذكير هذا الجدول بصم

Load	Slope for shear force	Slope for bending Moment
P	Constant	Linear
Uniformly distributed load	Linear	Parabolic
Uniformly varying load	Parabolic	Cubic

<u>الخطوة الثالثة :</u> نرسم العزم , بإختصار العزم هو **<u>مساحة الشير</u>** لذلك قلت لكم إرسموا الرسمات هكذا أن يكونوا أسفل بعضهم البعض , مساحة المستطيل فيكون الناتج -4 ويكون الخط مائل بهذه الطريقة وسأوضح لكم ذلك , ثم يوجد مساحة مثلث + مساحة مستطيل فيكون الناتج -11 ثم يوجد **عزم خارجي** فيغلق الشكل





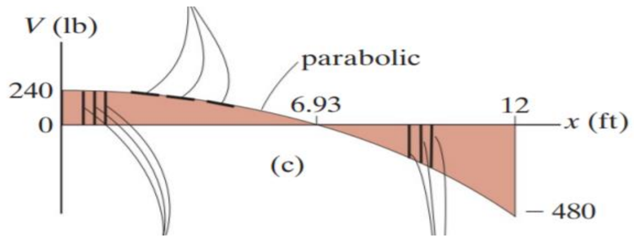
$$\frac{120}{12} = \frac{w}{x}$$

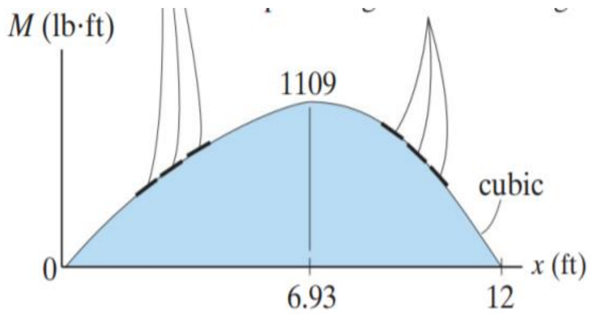
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$M_{\max} + \frac{1}{2}[(10)(6.93)]\, 6.93\left(\frac{1}{3}(6.93)\right) - 240(6.93) = 0$$

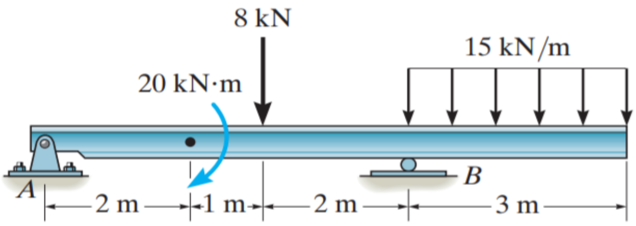
$$M_{\max} = 1109 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نرسم العزم , واتفقنا أنه هو مساحة الشير ونريد أن نشير إلى أن الزيرو شير هو نفسه أقصى عزم

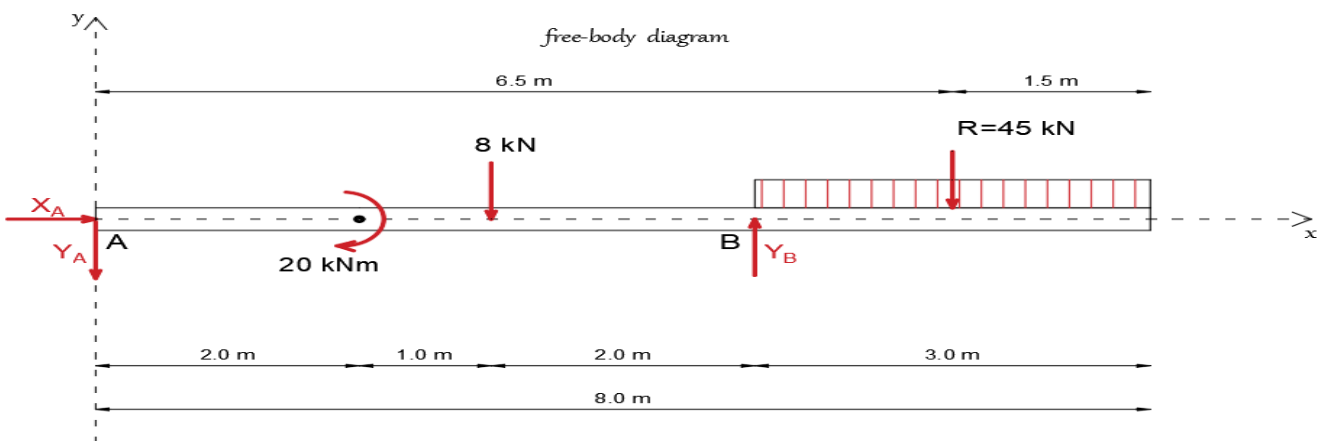




❑ **Prop7-78. Draw the shear and moment diagrams for the beam ?**



<u>**الخطوة الأولى**</u>: جد ردود الفعل



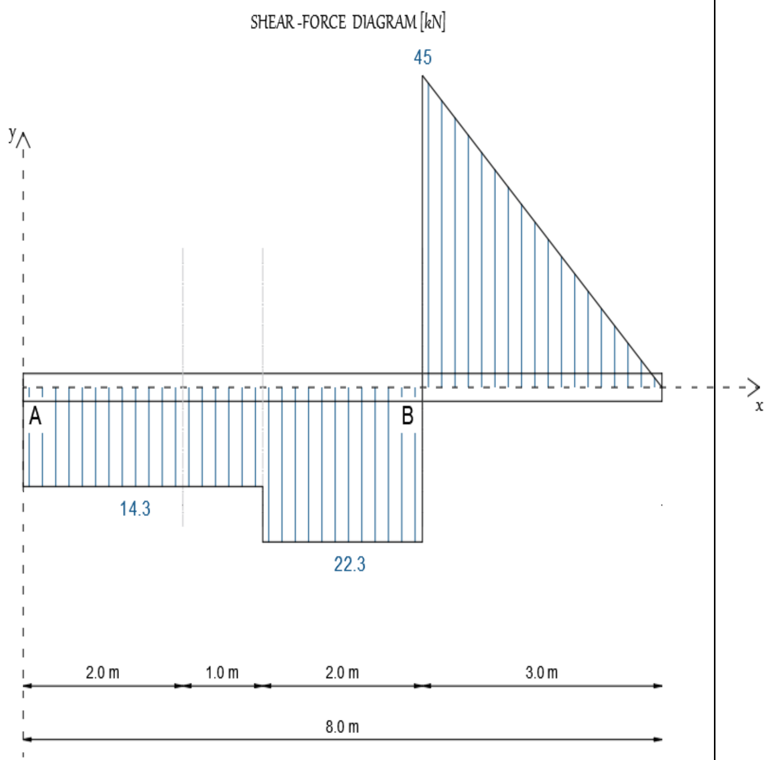
$$\sum M_A = 0$$

$$20 + 8 \cdot 3 - 5Y_B + 45 \cdot 6.5 = 0$$
$$336.5 - 5Y_B = 0$$
$$Y_B = 67.3 \text{ kN}$$

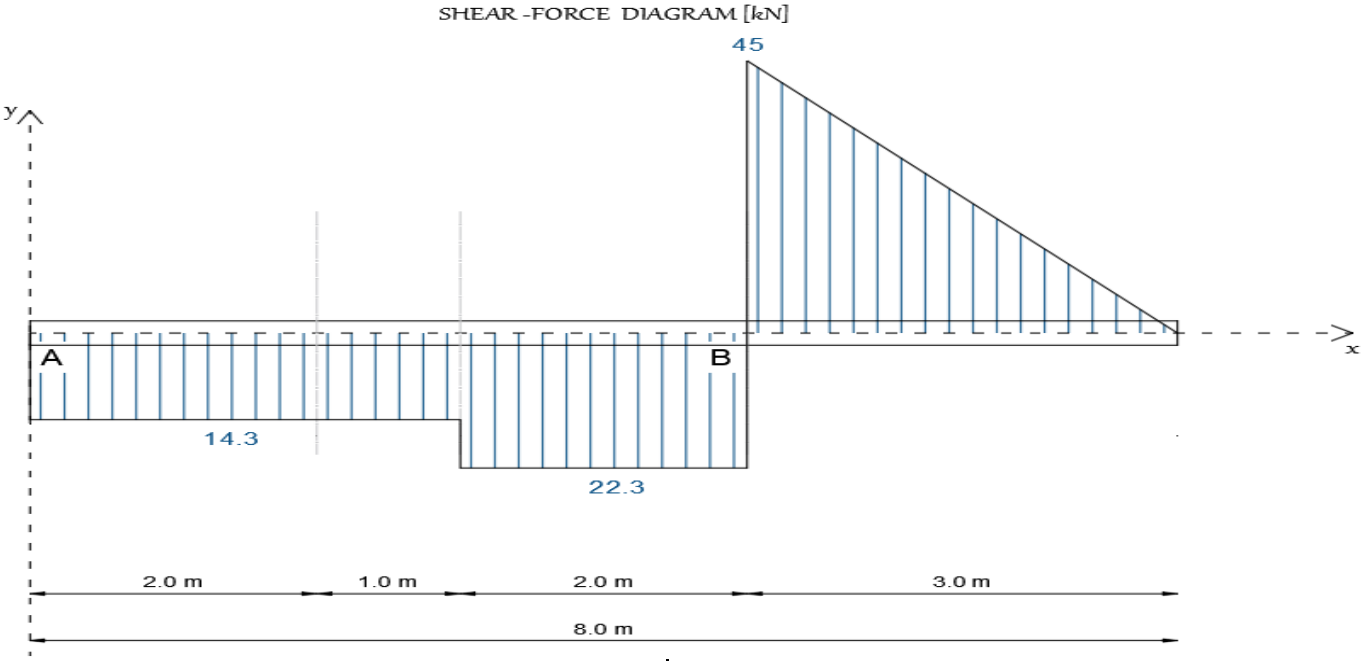
$$\sum F_y = 0$$

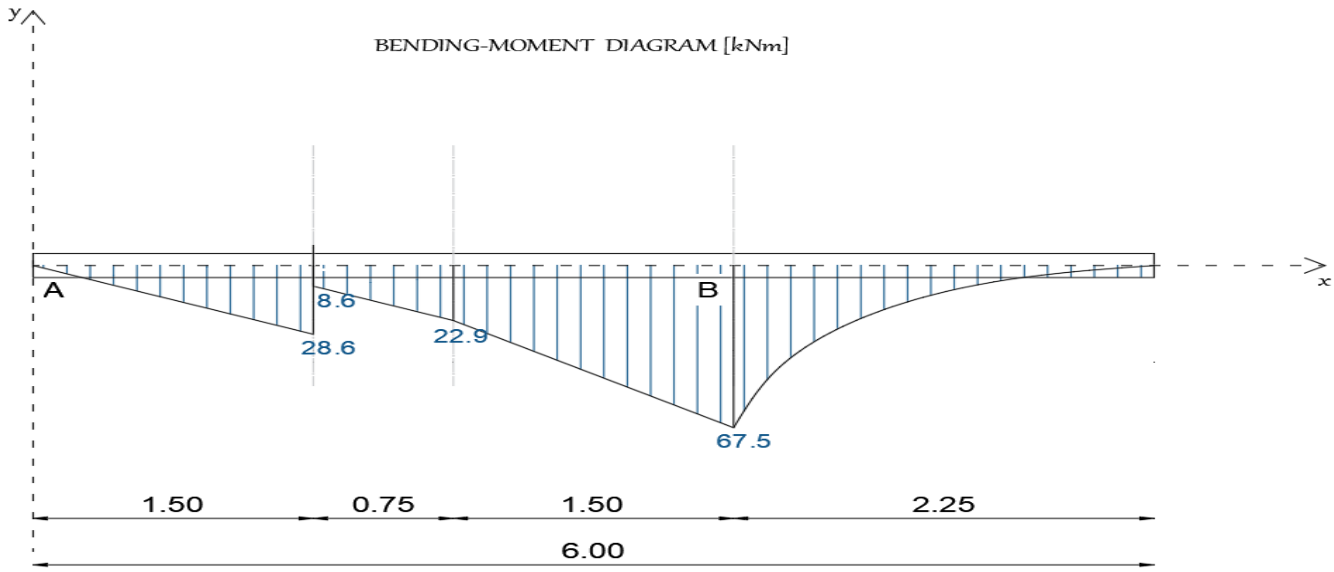
$$-Y_A - 8 - 45 + Y_B = 0$$
$$-Y_A - 53 + 67.3 = 0$$
$$Y_A = 14.3 \text{ kN}$$

الخطوة الثانية : ننزل بمقدار 14.3 لسبب وجود رد الفعل ونسير بخط مستقيم إلى أن نجد حمل مقداره 8 و للأسفل ونكمل بشكل خطي إلى أن نجد رد فعل من الدعائم ومقداره 67.3 ف نطلع ل الأعلى وصولا ل 45 ومن ثم نجد حمل متجه ل الأسفل على شكل مستطيل ونحسب محصلة القوة وننزل بشكل خطي كما قلنا سابقا إلى أن يغلق الشكل .



الخطوة الثالثة : قلنا سابقا أن المومنت هو مساحة الشير , نحسب مساحة جزء جزء .





مساحة المستطيل الأول

14.3 * 2 = - 28.6

وجود العزم الخارجي يؤثر على الرسمة ولأنه مع عقارب الساعه فنطلع ل الأعلى بمقدار 20 وصولا ل 8.6-

-14.3 * 1 = -14.3

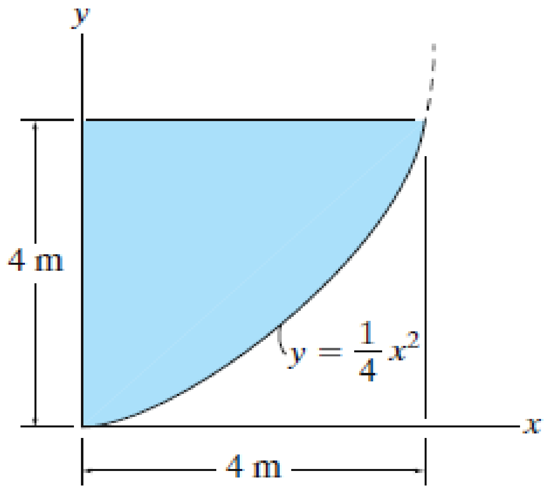
- 8.6 - 14.3= -22.9

- 22.9- (22.3*2) = - 67.5

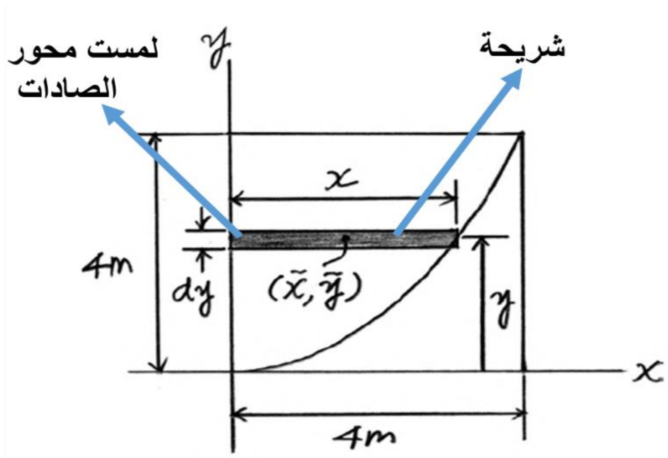
- 67.5 - (0.5*45*3) = 0

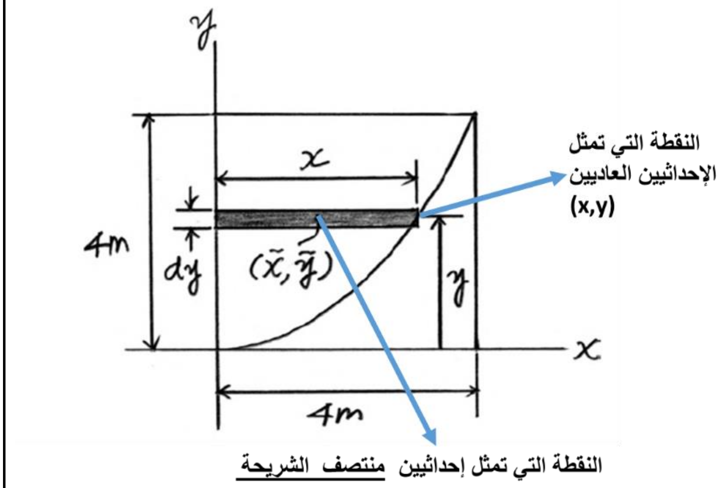
9 Center of Gravity and Centroid 465

- **Prop9-9.** Locate the **centroid $\bar{x}$** of the shaded area ?



الخطوة الأولى : خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة **نهايتها تلمس أحد المحاور** من باب السهولة وسنوضح الأن





الخطوة الثانية : نجد مساحة هذه الشريحه وهي مستطيل

$$dA = x\,dy$$

dy: تفيدنا في تحديد حدود التكامل (لاحقا)

الخطوة الثالثة : نجد إحداثي السيني لمنتصف القطعة فقط لأنه هو المطلوب في السؤال

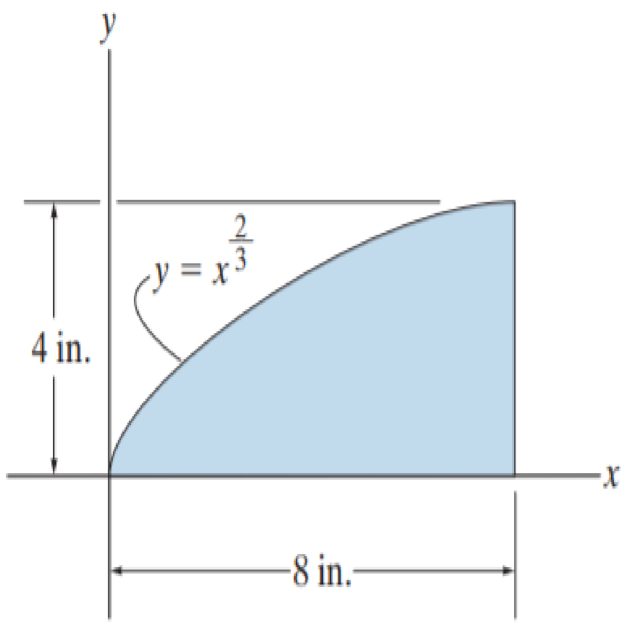
$$\tilde{x} = \frac{1}{2}x$$

الخطوة الرابعه : إجعل الإحداثي المطلوب وهو السيني هو موضوع القانون

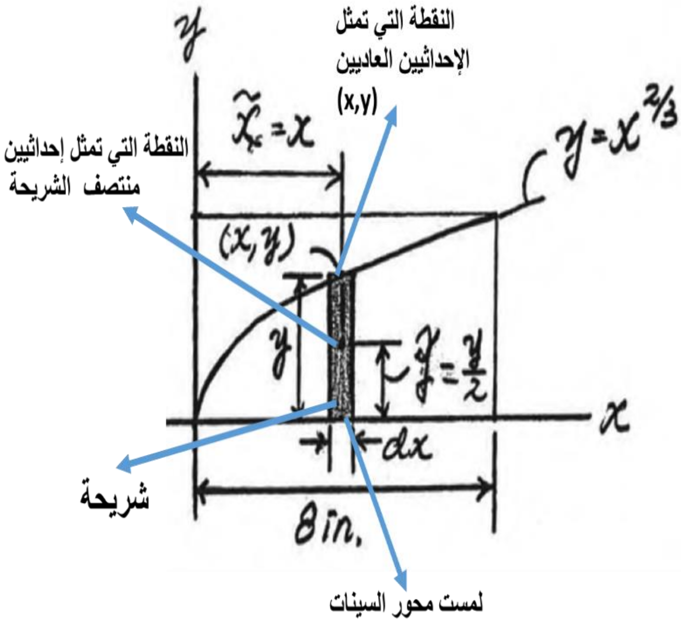
$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$x = 2y^{1/2}$$

❑ **Prop9-7. Locate the centroid $\bar{y}$ of the area ?**



الخطوة الأولى : خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة نهايتها تلمس أحد المحاور من باب السهولة وسنوضح الأن



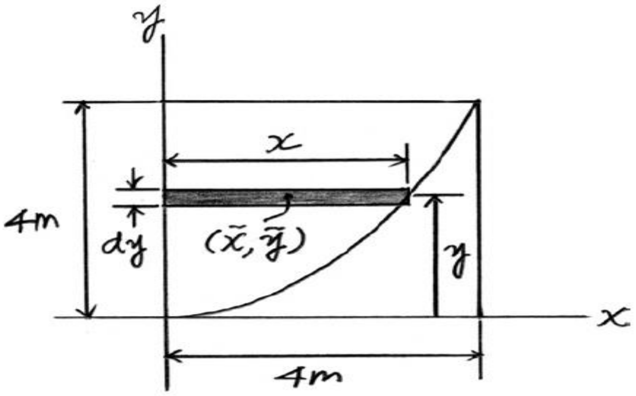
الخطوة الثانية : نجد مساحة هذه الشريحه وهي مستطيل

$$dA = x^{\frac{2}{3}} * dx$$

الخطوة الثالثة : نجد إحداثي الصادي فقط لأنه هو المطلوب في السؤال

الخطوة الخامسه : نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA}$$



$$\tilde{x} = \frac{1}{2}x \qquad dA = x\,dy$$

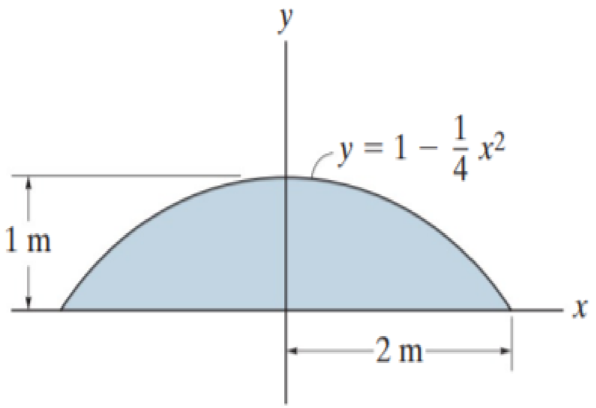
$$x = 2y^{1/2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{4\text{ m}} \frac{1}{2}\left(2y^{1/2}\right)\left(2y^{1/2}\,dy\right)}{\int_0^{4\text{ m}} 2y^{1/2}\,dy}$$

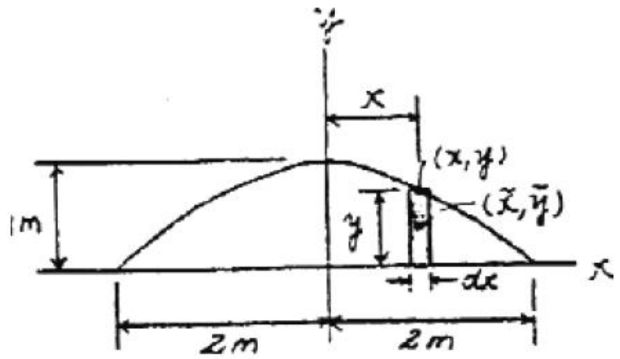
$$= \frac{3}{2}\text{ m}$$

حدود التكامل هي من نقطة الأصل إلى نهاية الرسمة في **الإحداث الصادي**

❑ **Prop9-6. Locate the centroid $\bar{y}$ of the area ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة نهايتها تلمس أحد المحاور



<u>الخطوة الثانية :</u> نجد مساحة هذه الشريحه

$$dA = y\,dx = \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد إحداثي الصادي فقط

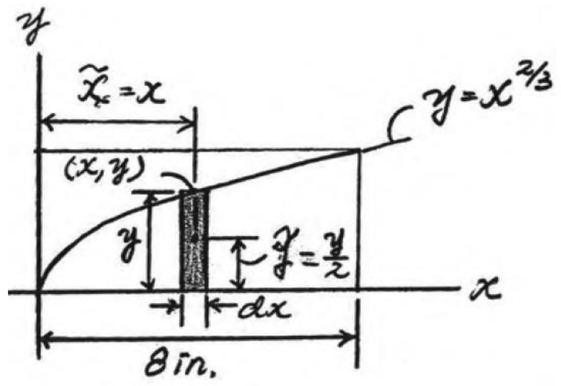
$$\tilde{y} = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right).$$

من باب العلم الإحداث السيني يساوي صفر بسبب **<u>التماثل</u>**

$$\bar{x} = 0$$

<u>الخطوة الرابعة :</u> إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون و هنا لا نطبق القانون لأنه هو **<u>بالأصل</u>** موضوع القانون

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}}$$



$$\tilde{y} = \frac{1}{2}y$$

<u>الخطوة الرابعه :</u> إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون **<u>وهنا لا نطبق</u>** القانون لأنه هو **بالأصل موضوع القانون**

<u>الخطوة الخامسه :</u> نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}}$$

$$dA = x^{\frac{2}{3}} * dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^{8\text{in.}} x^{2/3}\,dx = \left[\frac{3}{5}x^{5/3}\right]\Bigg|_0^{8\text{in.}} = 19.2\text{ in.}^2$$

<u>حدود التكامل</u> هي من نقطة الأصل إلى نهاية الرسمة في الإحداث السيني

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}y$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{8\text{in.}} \frac{1}{2}x^{2/3}\left(x^{2/3}\right)dx}{19.2} = \frac{\int_0^{8\text{in.}} \frac{1}{2}x^{4/3}dx}{19.2}$$

$$= \frac{\left[\frac{3}{14}x^{7/3}\right]\Big|_0^{8\text{ in.}}}{19.2} = 1.43\text{ in.}$$

$$dA = ydx = \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx$$

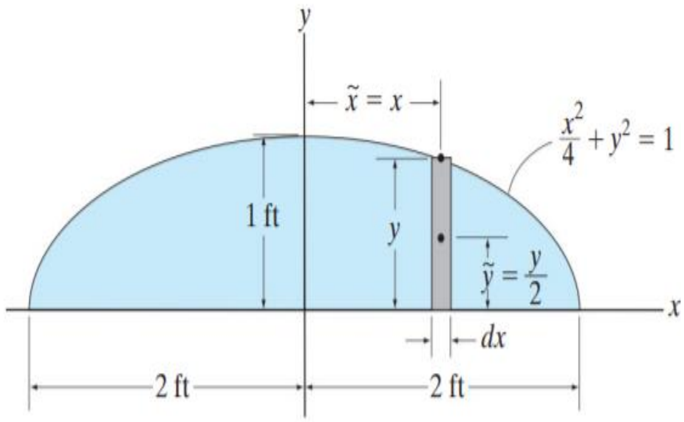
$$\tilde{y} = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right).$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-2\text{m}}^{2\text{m}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx}{\int_{-2\text{m}}^{2\text{m}}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{160}\right)\Big|_{-2\text{m}}^{2\text{m}}}{\left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2\text{m}}^{2\text{m}}} = \frac{2}{5}\text{m}$$

__حدود التكامل__ هي من نقطة بداية المنحنى إلى نهاية المنحنى بالنسبة ل **__الإحداث السيني__**

❑ **Example.** Locate the **__centroid__** of the semi-elliptical area ?



__الخطوة الأولى :__ خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة نهايتها تلمس أحد المحاور

__الخطوة الثانية :__ نجد **__مساحة__** هذه الشريحه

$$dA = ydx$$

__الخطوة الثالثة :__ نجد إحداثي المركز الصادي والسيني

$$\tilde{x} = x \qquad \tilde{y} = y/2.$$

__الخطوة الرابعه :__ إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

__الخطوة الخامسه :__ **نطبق القانون الموجود في الأسفل**

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{x} = 0$$

الإحداث السيني يساوي صفر بسبب **__التماثل__**

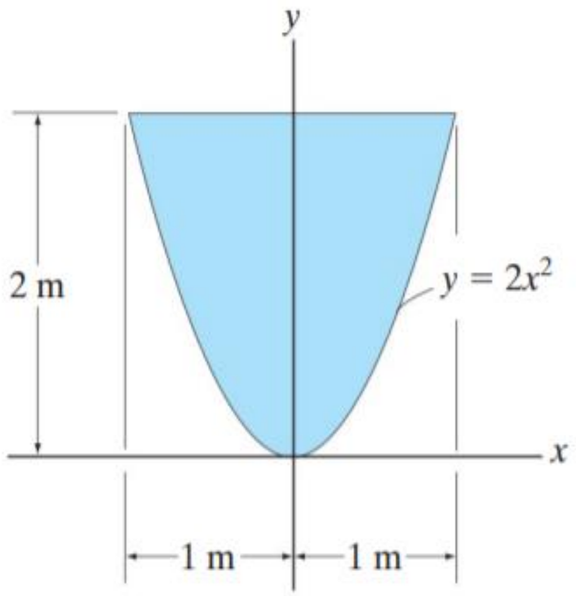
$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \qquad dA = ydx$$

$$\tilde{y} = y/2.$$

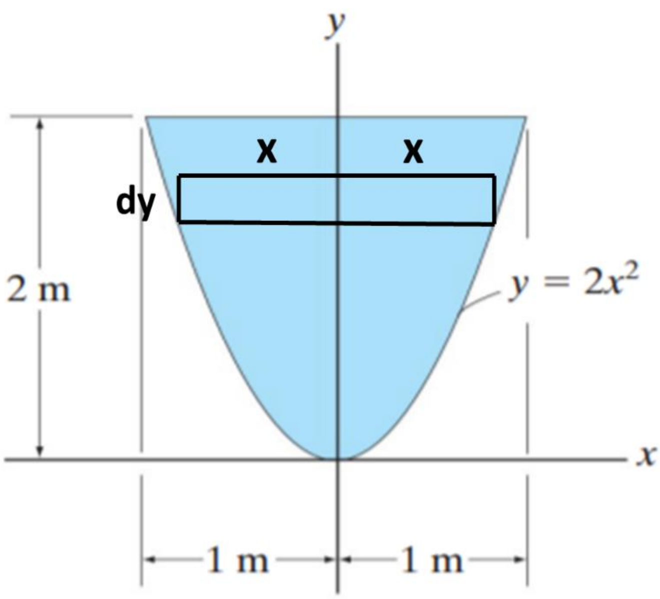
$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-2\,\text{ft}}^{2\,\text{ft}} \frac{y}{2}(y\,dx)}{\int_{-2\,\text{ft}}^{2\,\text{ft}} y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-2\,\text{ft}}^{2\,\text{ft}}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx}{\int_{-2\,\text{ft}}^{2\,\text{ft}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx} = \frac{4/3}{\pi} = 0.424\text{ ft}$$

__حدود التكامل__ هي من نقطة بداية المنحنى إلى نهاية المنحنى بالنسبة ل **__الإحداث السيني__**

❑ F9-3. Determine the centroid $\bar{y}$ of the shaded area ?



❑ الخطوة الأولى : خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة نهايتها تلمس أحد المحاور من باب السهولة وسنوضح الأن



❑ الخطوة الثانية : نجد مساحة هذه الشريحه

❑ dA=2x*dy

❑ الخطوة الثالثة : نجد إحداثي المركز الصادي

❑ $\tilde{y} = y$

❑ الخطوة الرابعه : إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون وهو موضوع القانون أي لا حاجة لتلك الخطوة

الخطوة الخامسه : نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{x} = 0$$

dA=2x*dy

$$\tilde{y} = y = 2x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{y}{2}}$$

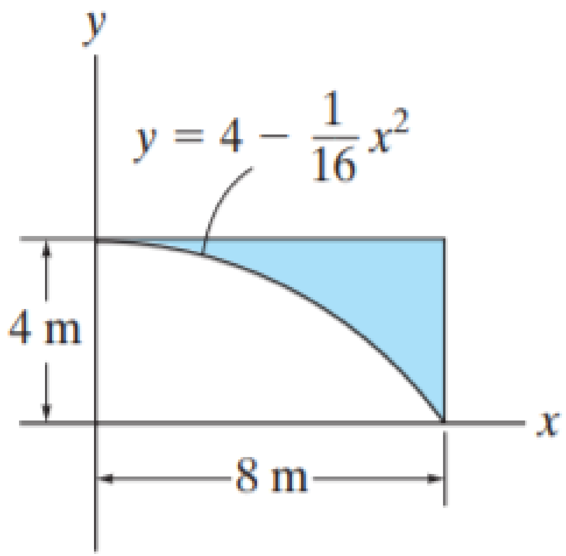
$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 y(2(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}))dy}{\int_0^2 (2(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}))dy}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)_0^2}{\cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^2} =$$

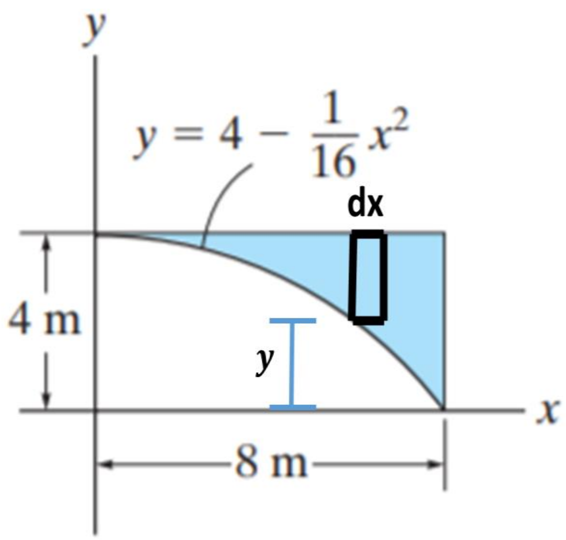
$$\frac{2.263}{1.886} = 1.20m$$

حدود التكامل هي من نقطة الاصل إلى نهاية المنحنى بالنسبة ل الإحداث الصادي

- **Prop9-14.** Locate the **centroid** $\bar{y}$ of the area ?



الخطوة الأولى : خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى ويفضل أن القطعة نهايتها تلمس أحد المحاور من باب السهولة وسنوضح الأن



الخطوة الثانية : نجد مساحة هذه الشريحه

$$dA = (4 - y)dx = \left(\frac{1}{16}x^2\right)dx$$

الخطوة الثالثة : نجد إحداثي المركز **الصادي**

$$\tilde{y} = \frac{4-y}{2} + \frac{2y}{2} = \frac{4+y}{2}$$

الخطوة الرابعه : إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون وهو موضوع القانون أي لا حاجة لتلك الخطوة

الخطوة الخامسه : نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

$$dA = (4 - y)dx = \left(\frac{1}{16}x^2\right)dx$$

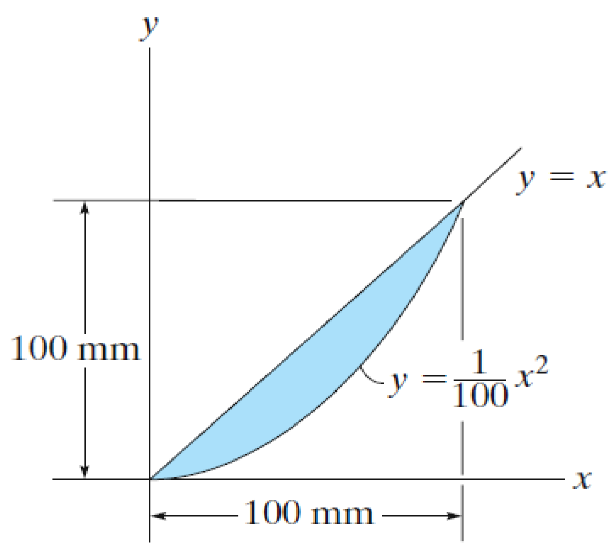
$$\tilde{y} = \frac{4+y}{2}$$

$$y = 4 - \frac{1}{16}x^2$$

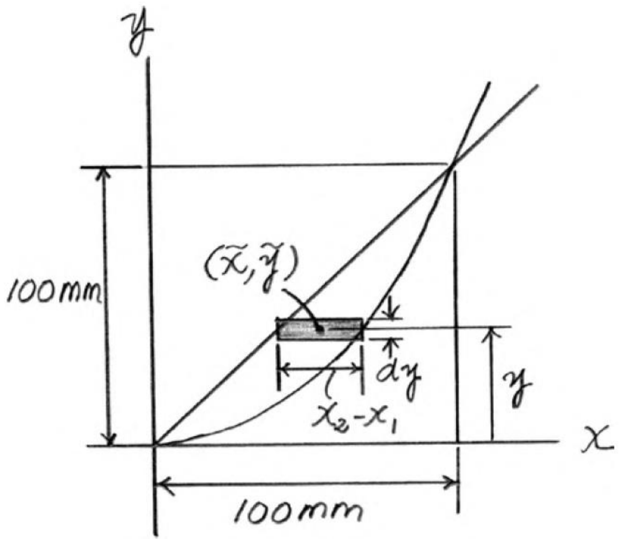
$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^8 \left(8 - \frac{x^2}{16}\right)\left(\frac{x^2}{16}\right)dx}{\int_0^8 \left(\frac{1}{16}x^2\right)dx}$$

$$\bar{y} = 2.8 \text{ m}$$

- **Prop9-29. Locate the centroid $\tilde{y}$ of the shaded area ?**



الخطوة الأولى : خذ شريحة (قطعة صغيرة) من الرسمة أو المنحنى وهنا تكون القطعة محصورة بين المنحنيين



الخطوة الثانية : نجد مساحة هذه الشريحه

$$x_2 = 10y^{1/2} \text{ and } x_1 = y.$$

$$dA = (x_2 - x_1)\,dy = \left(10y^{1/2} - y\right)dy$$

الخطوة الثالثة : نجد إحداثي الصادي **فقط** لأنه هو المطلوب في السؤال

$$\tilde{y} = y.$$

الخطوة الرابعة : إجعل الإحداثي المطلوب هو موضوع القانون و هنا لا نطبق القانون لأنه هو بالأصل موضوع القانون

الخطوة الخامسه : نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA}$$

$$dA = (x_2 - x_1)\,dy = \left(10y^{1/2} - y\right)dy$$

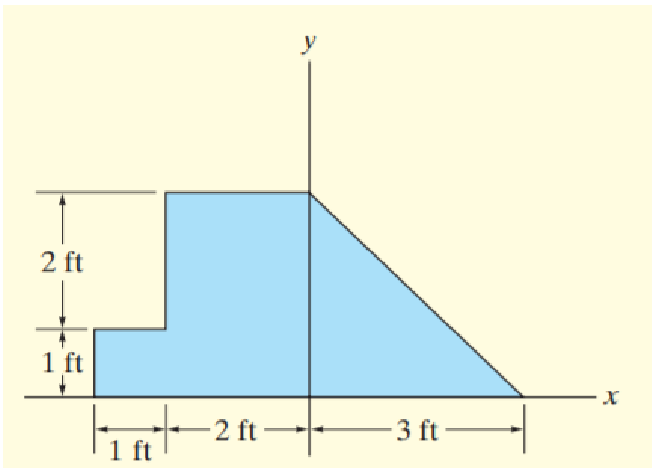
$$\tilde{y} = y.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{100\text{ mm}} y\left(10y^{1/2} - y\right)dy}{\int_0^{100\text{ mm}} \left(10y^{1/2} - y\right)dy}$$

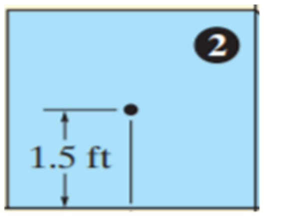
$$= \frac{\left(4y^{5/2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{100\text{ mm}}}{\left(\frac{20}{3}y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{100\text{ mm}}}$$

40.0 mm

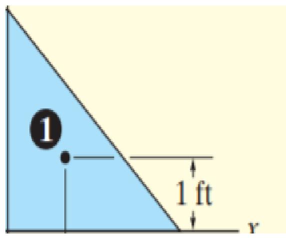
❑ **Example9-10.** Locate the **centroid** of the plate area ?

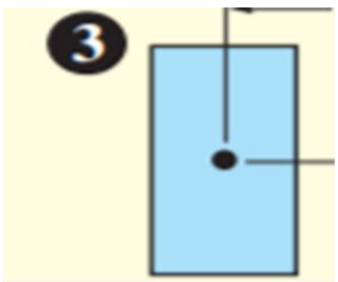


الخطوة الأولى : **نقسم الشكل** إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



أكملنا الجسم(إضافة) وكانه مربع كامل



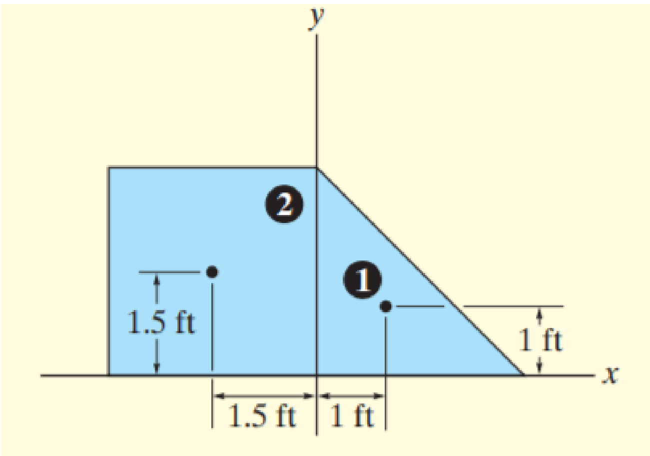


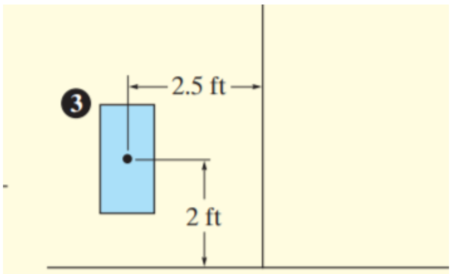
الجزء الذي قمنا بإضافته

الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

Segment	A (ft^2)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$
2	$(3)(3) = 9$
3	$-(2)(1) = -2$
	$\Sigma A = 11.5$

الخطوة الثالثة : نجد **إحداثي المركز** لكل جزء مع الإنتباه للإشارة





Segment	$\tilde{x}$ (ft)	$\tilde{y}$ (ft)
1	1	1
2	−1.5	1.5
3	−2.5	2

نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور $x^{\sim}$ الصادي

نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور $y^{\sim}$ السيني

الخطوة الرابعه : نضرب المساحه ب الإحداثي

Segment	$\tilde{x}A$ (ft^3)	$\tilde{y}A$ (ft^3)
1	4.5	4.5
2	−13.5	13.5
3	5	−4
	$\Sigma\tilde{x}A = -4$	$\Sigma\tilde{y}A = 14$

الصورة النهائية ما قبل تطبيق القانون **ويفضل** الحل هكذا في الإمتحان وفي دراستك لكي يكون كل شئ **مرتب**

Segment	A (ft^2)	$\tilde{x}$ (ft)	$\tilde{y}$ (ft)	$\tilde{x}A$ (ft^3)	$\tilde{y}A$ (ft^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	−1.5	1.5	−13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	−2.5	2	5	−4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma\tilde{x}A = -4$	$\Sigma\tilde{y}A = 14$

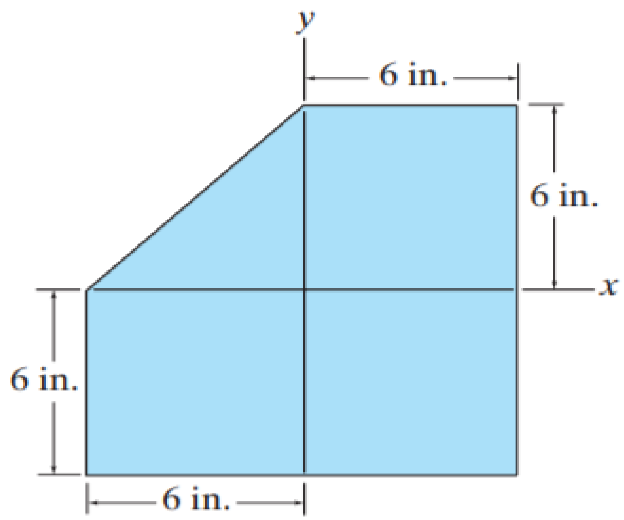
الخطوة الخامسه : نطبق القانون الموجود في الأسفل

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}W}{\Sigma W}$$

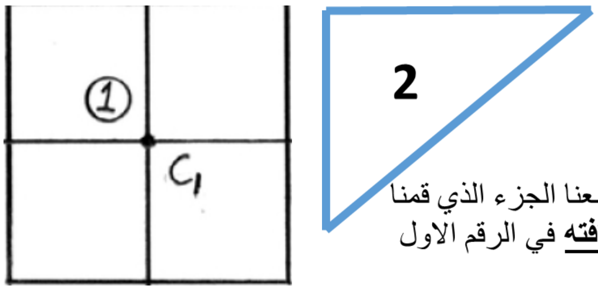
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ ft}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ ft}$$

❑ **Prop9-59.** Locate the **centroid** (x^{-}, y^{-}) of the shaded area ?



الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



وضعنا الجزء الذي قمنا **بإضافته** في الرقم الاول

ملاحظة : يمكنك تقسيم الشكل **بالطريقة التي تريد** والطريقة التي تعجبك وهذه ليست طريقة واحدة فقط بل واحدة من **إحدى الطرق**

الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

Segment	$A(\text{in.}^2)$
1	12(12)

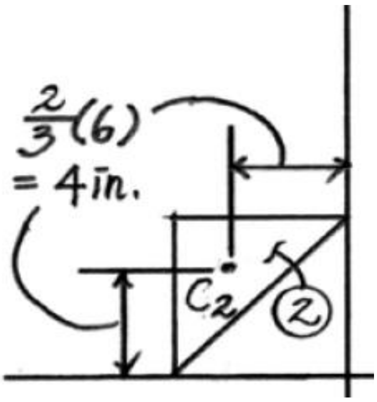
$x^{\sim}$

نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور الصادي

$y^{\sim}$

نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور السيني

الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة



Segment	$A(\text{in.}^2)$
2	$-\frac{1}{2}(6)(6)$

$x^{\sim}$ نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور الصادي

$y^{\sim}$ نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور السيني

إذا ذهبنا بإتجاه الزاوية الصغيره نضرب ثلثين وخلاف ذلك ب ثلث

الخطوة الثالثة : نجد **إحداثي المركز** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

Segment	$\tilde{x}$ (in.)	$\tilde{y}$ (in.)
1	0	0
2	−4	4

الخطوة الرابعة : نضرب المساحه ب الإحداثي

Segment	$\tilde{x}A(\text{in.}^3)$	$\tilde{y}A(\text{in.}^3)$
1	0	0
2	72.0	−72.0

الصورة النهائية ما قبل تطبيق القانون **ويفضل** الحل هكذا في الإمتحان وفي دراستك لكي يكون كل شئ **مرتب**

Segment	$A(\text{in.}^2)$	$\tilde{x}(\text{in.})$	$\tilde{y}(\text{in.})$	$\tilde{x}A(\text{in.}^3)$	$\tilde{y}A(\text{in.}^3)$
1	12(12)	0	0	0	0
2	$-\frac{1}{2}(6)(6)$	−4	4	72.0	−72.0
Σ	126			72.0	−72.0

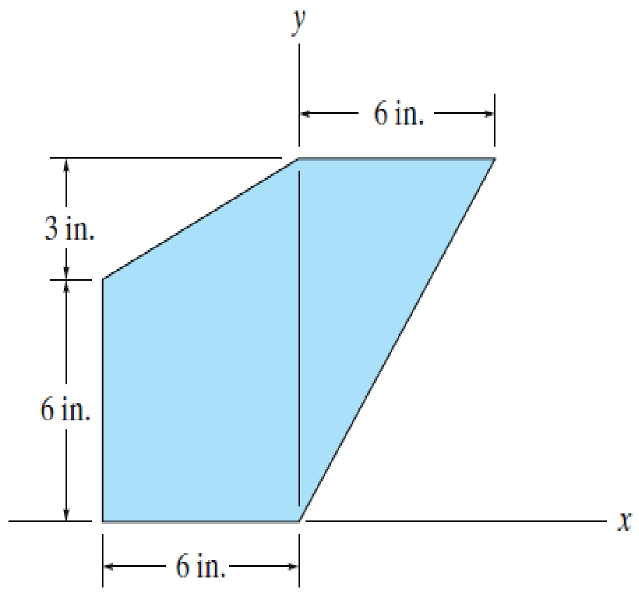
الخطوة الخامسه : نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W}$$

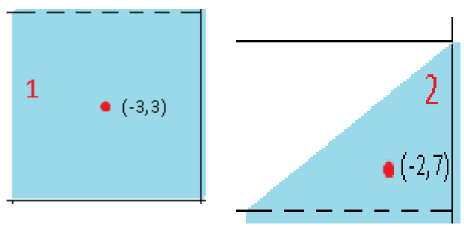
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{72.0 \text{ in.}^3}{126 \text{ in.}^2} = 0.5714 \text{ in.} = 0.571 \text{ in.}$$

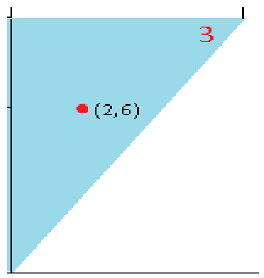
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{-72.0 \text{ in.}^3}{126 \text{ in.}^2} = -0.5714 \text{ in.} = -0.571 \text{ in.}$$

❑ **Prop9-62. Locate the centroid (x^-, y^-) of the shaded area ?**



الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



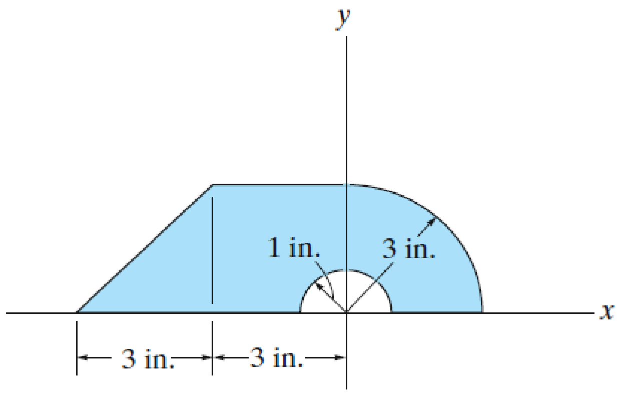


الخطوة الثانية : نجد مساحة كل شكل ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

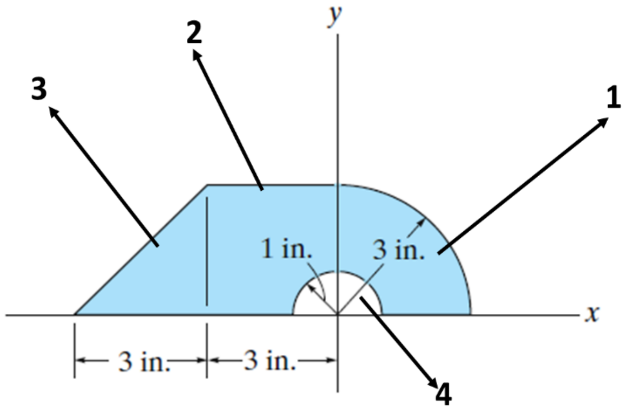
	$A/\text{in.}^2$
1	36
2	9
3	27

❑ **Prop9-64.** Locate the **centroid** (x^-, y^-) of the shaded area ?

❑ بعد **أخر خطوة في حل السؤال , يوجد رسمة توضيحية**



الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة و الإنتباه ل إشارة

Segment	A (in.²)
1	$\frac{\pi}{4}(3^2)$
2	$3(3)$
3	$\frac{1}{2}(3)(3)$
4	$-\frac{\pi}{2}(1^2)$

الجزء الرابع هو **تجويف** داخلي أي سنقوم بحذفه

الخطوة الثالثة : نجد **إحداثي المركز** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

بلنسبة للمثلث : **إذا ذهبنا بإتجاه الزاوية الصغيره نضرب ثلثين وخلاف ذلك ب ثلث**

$\tilde{x}$/in.	$\tilde{y}$/in.
-3	3
-2	7
2	6

الخطوة الرابعه : نضرب المساحه ب الإحداثي

$\tilde{x}A$/in.^{3}	$\tilde{y}A$/in.^{3}
-108	108
-18	63
54	162
-72	333

الخطوة الخامسه : نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} A}{\sum A} = \frac{-72\,\text{in.}^3}{72\,\text{in.}^2} = -1\,\text{in.}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} = \frac{333\,\text{in.}^3}{72\,\text{in.}^2} = 4.625\,\text{in.}$$

الخطوة الثالثة : نجد **إحداثي المركز** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

$\tilde{x}$ (in.)	$\tilde{y}$ (in.)
$\frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$
-1.5	1.5
-4	1
0	$\frac{4}{3\pi}$

الخطوة الرابعه : نضرب المساحه ب الإحداثي

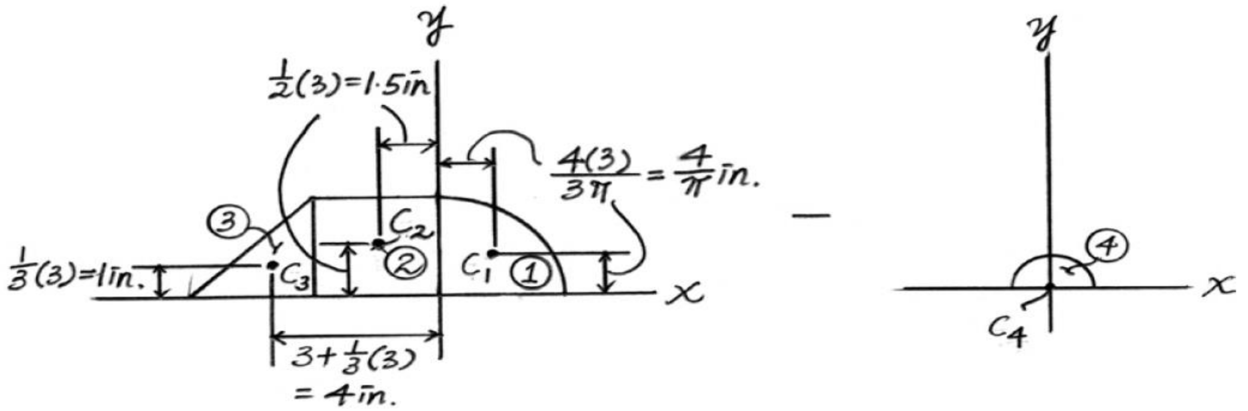
$\tilde{x}A$ (in.^{3})	$\tilde{y}A$ (in.^{3})
9.00	9.00
−13.50	13.50
−18.00	4.50
0	−0.67

الخطوة الخامسه : نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

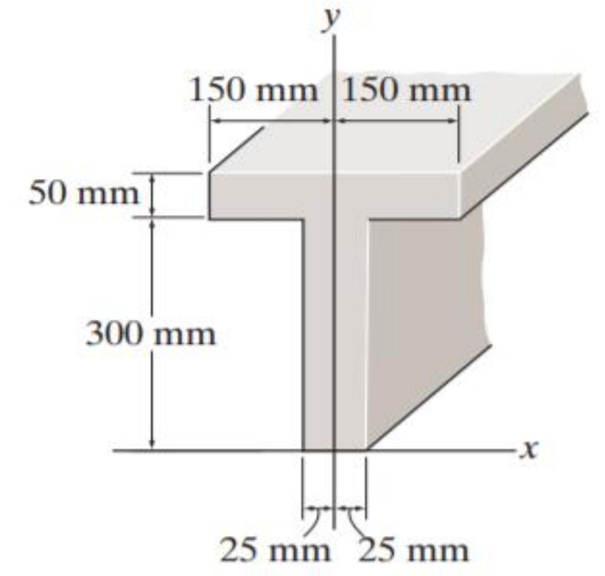
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-22.50 \text{ in.}^3}{18.9978 \text{ in.}^2} = -1.1843 \text{ in.} = -1.18 \text{ in.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{26.33 \text{ in.}^3}{18.9978 \text{ in.}^2} = 1.3861 \text{ in.} = 1.39 \text{ in.}$$

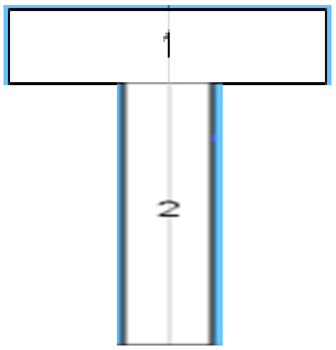
توضيح لما قمنا به .



- **F9–8.** Locate the **centroid $\bar{y}$** of the beam's cross-sectional area ?



الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

#	Area
1	$300*50=15000$
2	$300*50=15000$

الخطوة الثالثة : نجد **إحداثي المركز** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

#	$\bar{y}$
1	$\frac{50}{2}+300=325$
2	$\frac{300}{2}=150$

$\tilde{y}$

نذهب إلى جزء جزء – **من منتصفه** إلى المحور السيني

الخطوة الرابعه : نضرب المساحه ب الإحداثي

#	$\bar{y}*A$
1	325*15000=4875000
2	150*15000=2250000

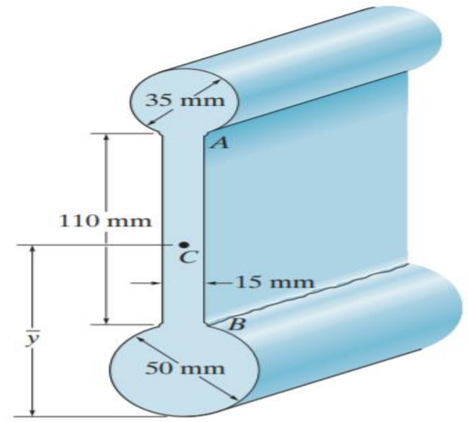
الخطوة الخامسه : نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

$$\bar{y}=\frac{\Sigma\tilde{y}W}{\Sigma W}$$

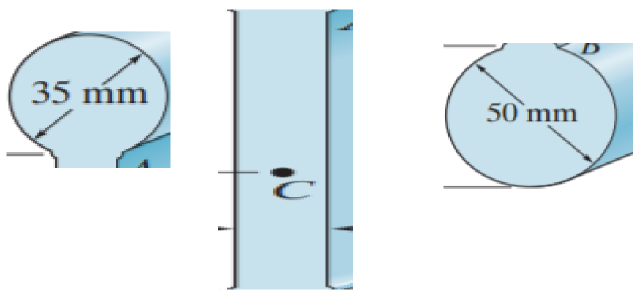
$$\bar{y}=\frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A}=\frac{4875000+2250000}{15000+15000}$$

$$\bar{y}=237.5$$

- **Prop9–63. Determine the location $\bar{y}$ of the centroid of the beam's cross-sectional area. Neglect the size of the corner welds at A and B for the calculation ?**

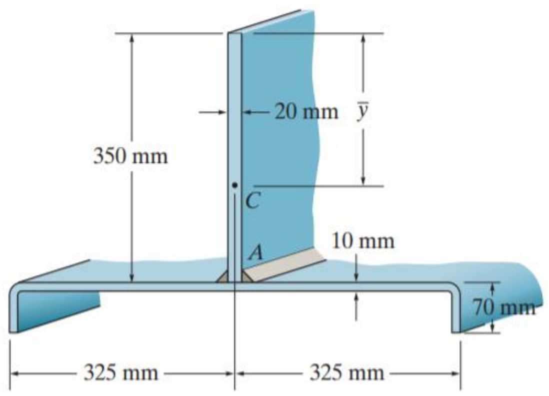


الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة

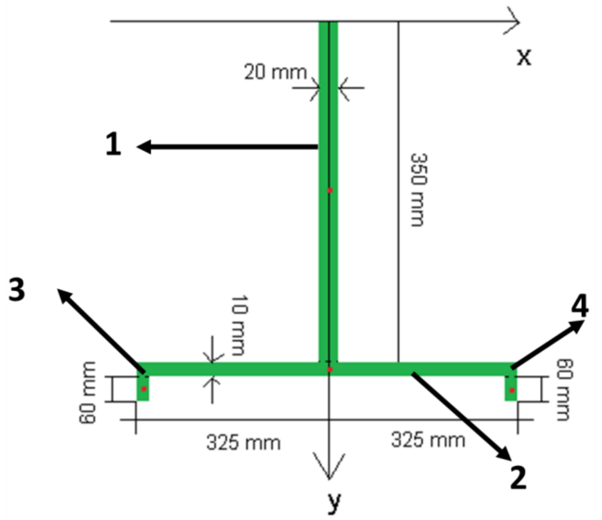


الخطوة الثانية : نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

❑ **Prop9–67. Locate the centroid y^{-} of the cross-sectional area of the beam constructed from a channel and a plate. <u>Assume all corners are square</u> and neglect the size of the weld at A ?**



<u>**الخطوة الأولى :**</u> **نقسم الشكل** إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



<u>**الخطوة الثانية :**</u> نجد **مساحة كل شكل** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

#	Area
1	$350 * 20 = 7000$
2	$650 * 10 = 6500$
3	$60 * 10 = 600$
4	$60 * 10 = 600$

#	Area
1	$\frac{\pi}{4} * 35^2 = 961.625$
2	$110 * 15 = 1650$
3	$\frac{\pi}{4} * 50^2 = 1962.5$

<u>**الخطوة الثالثة :**</u> نجد <u>**إحداثي المركز**</u> ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

#	y^{-}
1	$\frac{35}{2} + 110 + 50 = 177.5$
2	$\frac{110}{2} + 50 = 105$
3	$\frac{50}{2} = 25$

<u>**الخطوة الرابعة :**</u> نضرب المساحه ب الإحداثي

#	$y^{-} * A$
1	177.5 * 961.625=170688.43
2	1650*105=173250
3	1962.5*25=49062.5

<u>**الخطوة الخامسة :**</u> نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

$$y^{-} = \frac{\Sigma y^{\sim} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{170688.43 + 173250 + 49062.5}{961.625 + 1650 + 1962.5}$$

$$y^{-} = 85.9$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد **<u>إحداثي المركز</u>** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

#	y^{-}
1	$\frac{350}{2} = 175$
2	$5 + 350 = 355$
3	$30 + 10 + 350 = 390$
4	$30 + 10 + 350 = 390$

هنا أخذ المرجع ل <u>الأعلى</u> <u>ويجوز</u> لك أن تأخذه في الأسفل

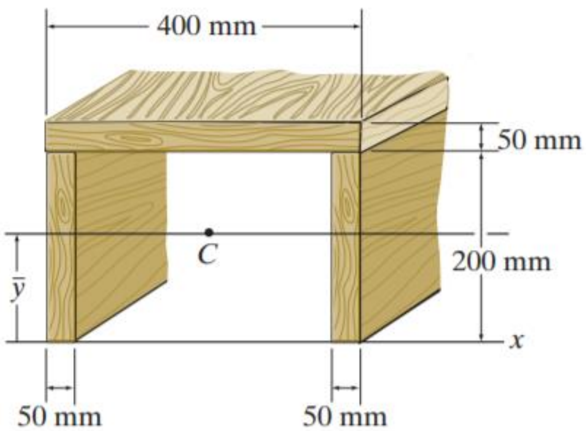
<u>الخطوة الرابعة :</u> نضرب المساحه ب الإحداثي

#	$y^{-} * A$
1	$7000 * 175 = 1225000$
2	$6500 * 355 = 2307500$
3	$600 * 390 = 234000$
4	$600 * 390 = 234000$

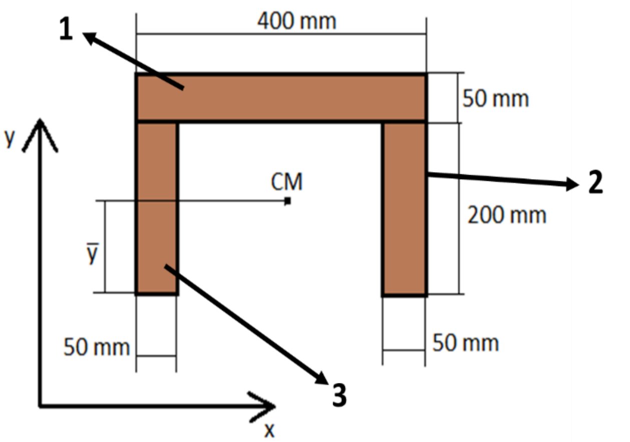
<u>الخطوة الخامسة :</u> نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} = \frac{4000500\,\text{mm}^3}{14700\,\text{mm}^2} = 272\,\text{mm}$$

- **F9-6. Locate the centroid y^{-} of the beam's cross-sectional area ?**



<u>الخطوة الأولى :</u> نقسم الشكل إلى أشكال يمكننا التعامل معها ببساطة



<u>الخطوة الثانية :</u> نجد **<u>مساحة كل شكل</u>** ومن ثم نجد مجموع المساحة والإنتباه ل إشارة

#	Area
1	$400 * 50 = 20000$
2	$200 * 50 = 10000$
3	$200 * 50 = 10000$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نجد **<u>إحداثي المركز</u>** ل كل جزء مع الإنتباه ل الإشارة

#	y^{-}
1	$\frac{50}{2} + 200 = 225$
2	$\frac{200}{2} = 100$
3	$\frac{200}{2} = 100$

<u>الخطوة الرابعة :</u> نضرب المساحه ب الإحداثي

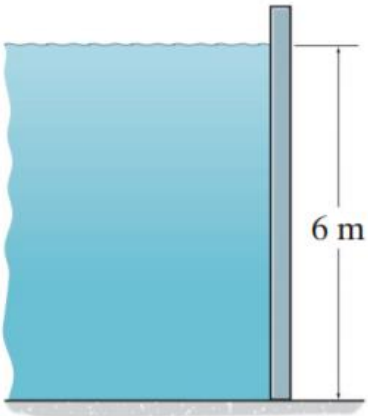
#	$y^{-} * A$
1	4500000
2	10000000
3	10000000

<u>الخطوة الخامسة :</u> نطبق **القانون الموجود** في الأسفل

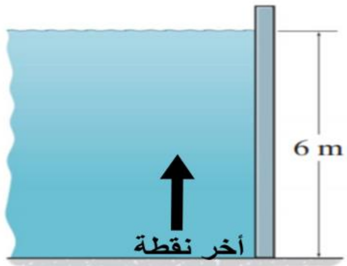
$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} = \frac{2450000}{40000} = 61.25\ \text{mm}$$

- **F9–17**. Determine the magnitude of the hydrostatic force **acting per meter length of the wall.** Water has a density of

$$\rho = 1\,\frac{Mg}{m^3}\ ?$$



الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب **وفي حال لم يعطها** نعتبر النقطة المطلوبة هي أخر نقطة (أسفل نقطة)



الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

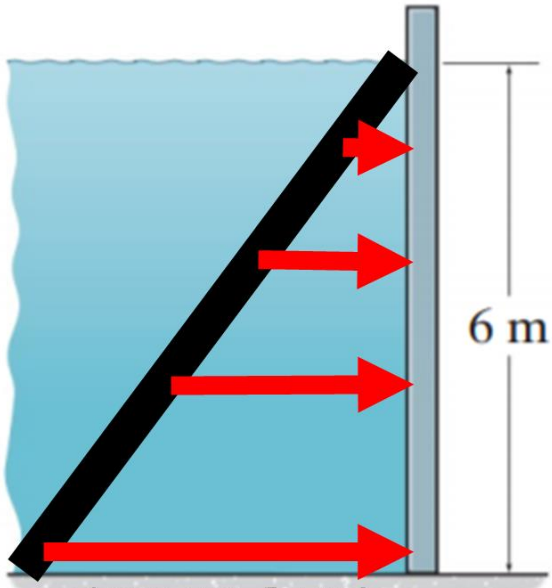
$$\boxed{p = \gamma z = \rho g z}$$

$$\boldsymbol{p = 1000 * 9.81 * 6 = 58860kPa}$$

الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب عرض البوابة وهنا **لم يعطينا** عرض البوابة **لذلك نعتبره** 1

$$\boldsymbol{w = 58860 * 1 = 58860\ kN/m}$$

الخطوة الرابعة : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

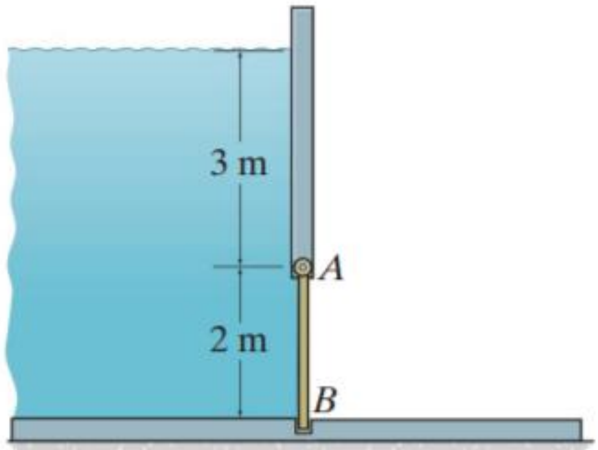


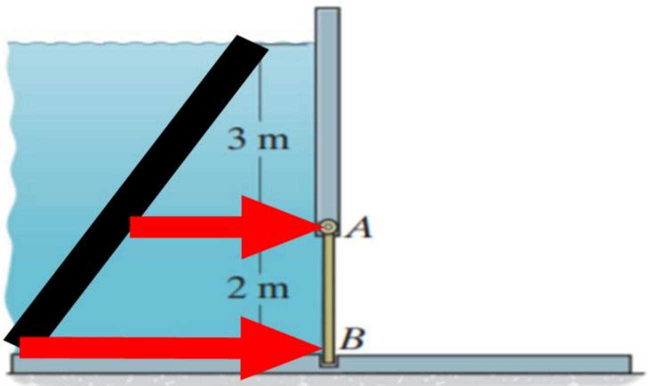
$$\boldsymbol{58860\ kN/m}$$

مساحة المثلث

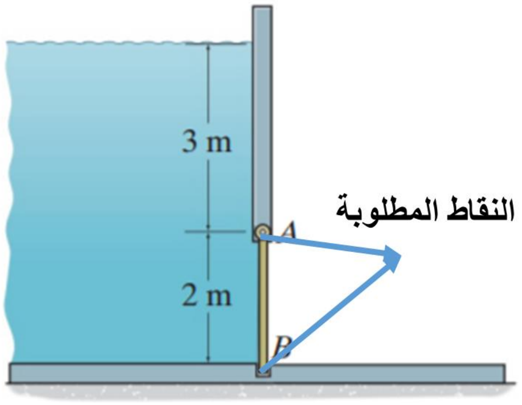
$$\boldsymbol{FR = \frac{1}{2} * 58860 * 6 = 176580\ kN}$$

- **F9–20.** Determine the magnitude of the hydrostatic force acting on **gate AB**, which has a **width of 2 m**. Water has a density of $\rho = 1\,\frac{Mg}{m^3}$?





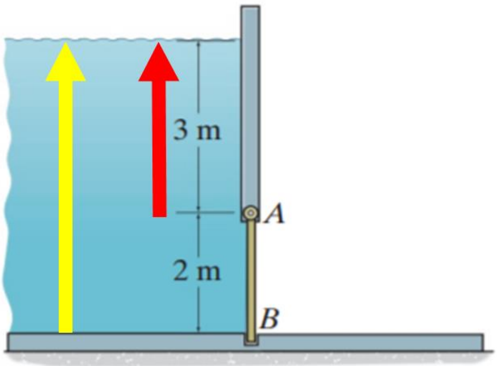
<u>الخطوة الأولى :</u> نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



والضغط عندهما مختلف لأن العمق يختلف

<u>الخطوة الثانية :</u> نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

$$\boxed{p = \gamma z = \rho g z}$$



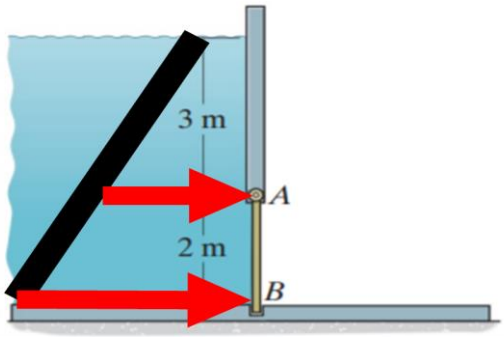
$$pA = 1000 * 9.81 * 3 = 29.430kPa$$

$$pB = 1000 * 9.81 * 5 = 49.050kPa$$

<u>الخطوة الثالثة :</u> نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **<u>عرض البوابة</u>**

$$wA = 29430 * 2 = 58.860\ kN/m$$

$$wB = 49050 * 2 = 98.100\ kN/m$$

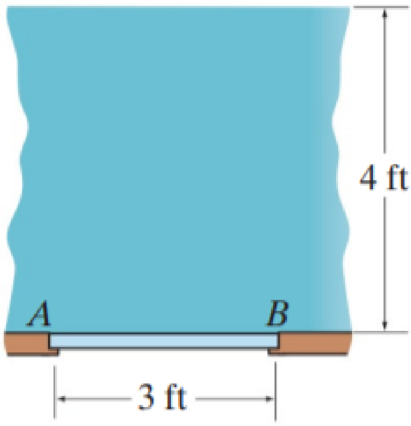


<u>الخطوة الرابعه :</u> نحسب القوة الناتجة عن الضغط

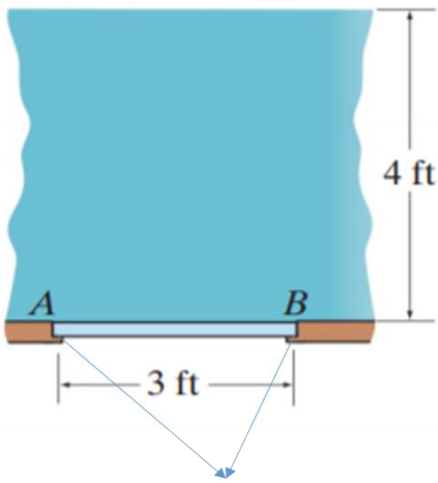
مساحة الشكل الناتج

$$FR = \frac{1}{2} * (58.860 + 98.100) * 2 = 175\ kN$$

- ❑ **F9–18.** Determine the magnitude of the hydrostatic force acting on **gate AB**, which has a **<u>width of 4 ft</u>**. The specific weight of water is γ **= 62.4** $\frac{lb}{ft^3}$?



<u>الخطوة الأولى :</u> نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



النقاط المطلوبة وهي على <u>نفس العمق</u>

<u>الخطوة الثانية :</u> نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

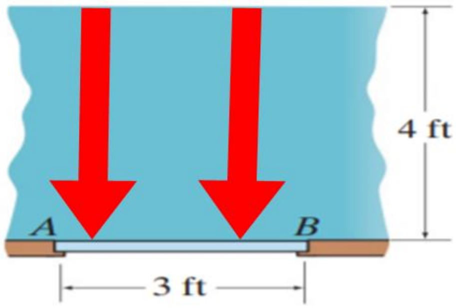
<u>الخطوة الثالثة :</u> نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **<u>عرض البوابة</u>**

$$\boxed{p = \gamma z = \rho g z}$$

$$w_A = wB = 62.4 * 4 * 4 = 998.4\ \frac{Ib}{ft}$$

العمق   عرض البوابة

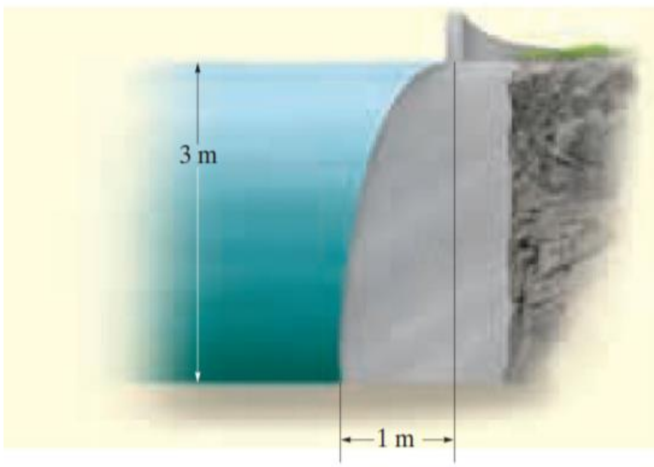
الخطوة الرابعة : نحسب القوة الناتجة عن الضغط



$$FR = 998.4 * 3 = 2995.2\ Ib$$

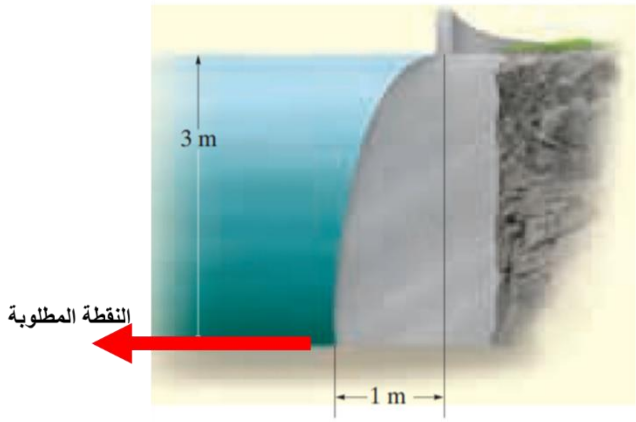
- ❑ **Example2.15 .** Determine the magnitude of the hydrostatic force acting on the surface of a seawall shaped in the form of a parabola ?

- ❑ The wall **is 5 m long** $\rho = 1020\ \frac{kg}{m^3}$.



الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب **وفي حال لم يعطها** نعتبر النقطة المطلوبة هي أخر نقطة (أسفل نقطة)

الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**



$$\boxed{p = \gamma z = \rho g z}$$

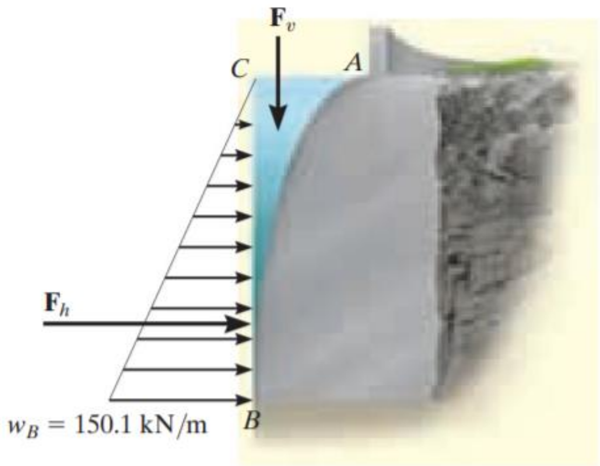
$$(1020\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(3\ \text{m}) = 30.02\ \text{kPa}$$

الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **عرض البوابة**

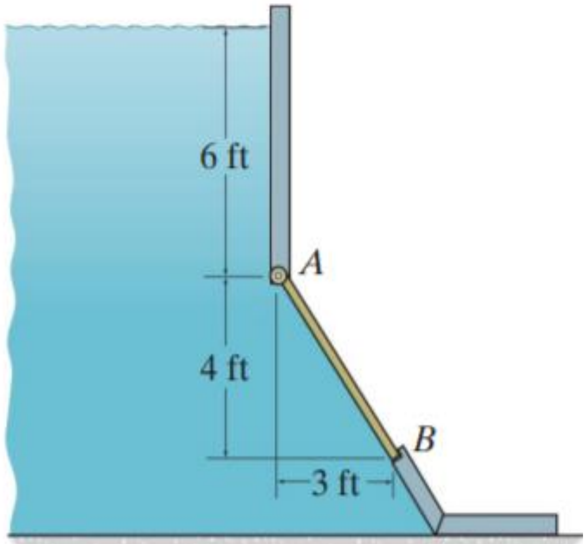
$$5\ \text{m}(30.02\ \text{kPa}) = 150.1\ \text{kN/m}$$

الخطوة الرابعة : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

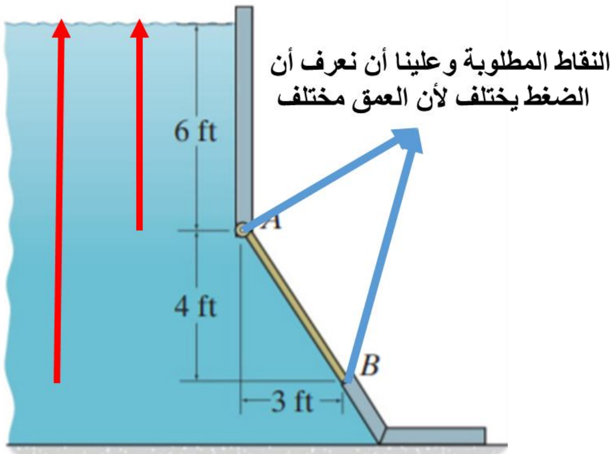
$$F_h = \tfrac{1}{2}(3\ \text{m})(150.1\ \text{kN/m}) = 225.1\ \text{kN}$$



- **F9–21.** Determine the magnitude of the hydrostatic force acting on **gate AB**, which has a **width of 2 ft**. The specific weight of water is $\boldsymbol{\gamma = 62.4\ \frac{Ib}{ft^3}}$



الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

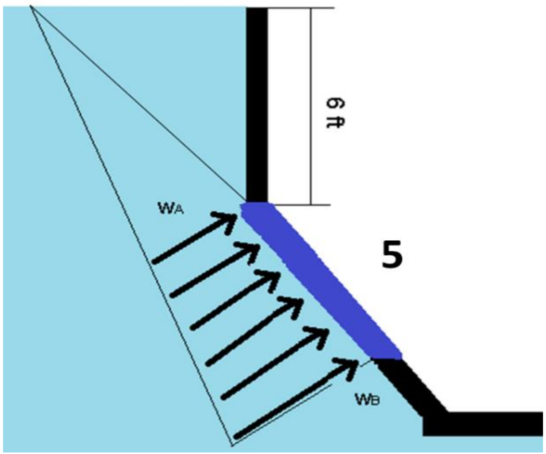
الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **عرض البوابة**

$$w_A = \gamma_w \cdot b \cdot h$$
$$= 62.4\,\mathrm{lb/ft^3} \cdot 2\,\mathrm{ft} \cdot 6\,\mathrm{ft}$$
$$= 748.8\,\mathrm{lb/ft}$$

$$w_B = \gamma_w \cdot b \cdot h$$
$$= 62.4\,\mathrm{lb/ft^3} \cdot 2\,\mathrm{ft} \cdot 10\,\mathrm{ft}$$
$$= 1248\,\mathrm{lb/ft}$$

الخطوة الرابعه : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

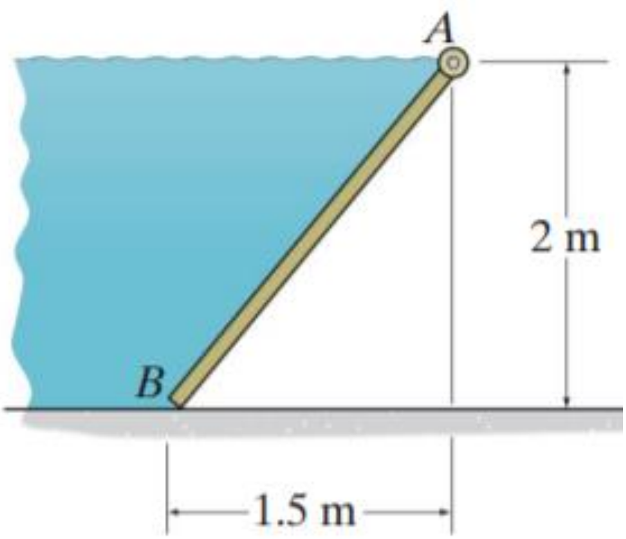
$$F = \frac{1}{2}h(w_A + w_B)$$



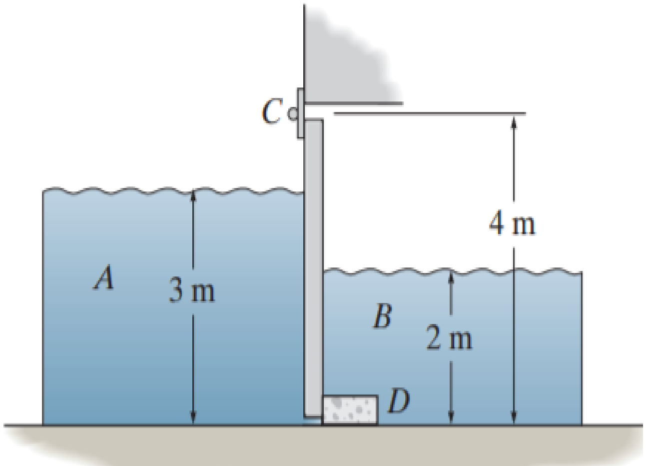
$$h = \sqrt{4^2 + 3^2}\,\mathrm{ft}$$
$$= 5\,\mathrm{ft}$$

$$F = \frac{1}{2}5\,\mathrm{ft}(748.8\,\mathrm{lb/ft} + 1248\,\mathrm{lb/ft})$$
$$= 4992\,\mathrm{lb}$$

- **F9–19.** Determine the magnitude of the hydrostatic force acting on **gate AB**, which has a width of 1.5 m. Water has a density of $\rho = 1\ \frac{Mg}{m^3}$

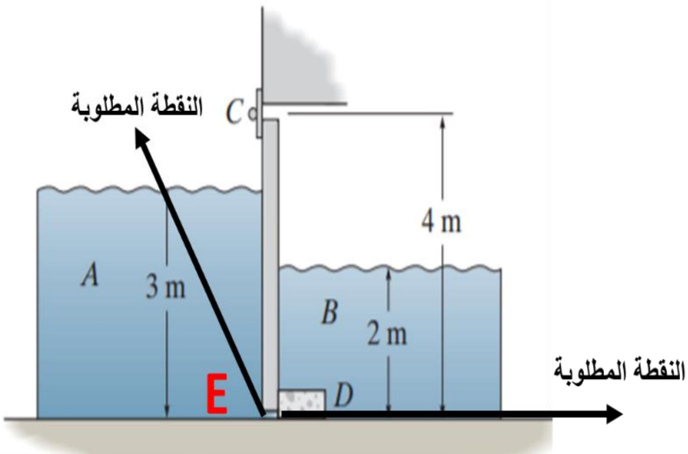


❑ **Prop. 9–120.** Determine the horizontal reactions developed at the **hinge C** and **stop block D**. The **length** of the gate is 6 m and its **height is 4 m**. $\rho = 1\ \frac{Mg}{m^3}$.



فكرة السؤال : وجود المياه من جهتين أي يعني البوابة تحجز الماء من جهتين .

الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



لا بد من إيجاد ردود الأفعال لكن **يجب علينا أولا** إيجاد ضغط المياه ونجده في النقاط الأخيرة

الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

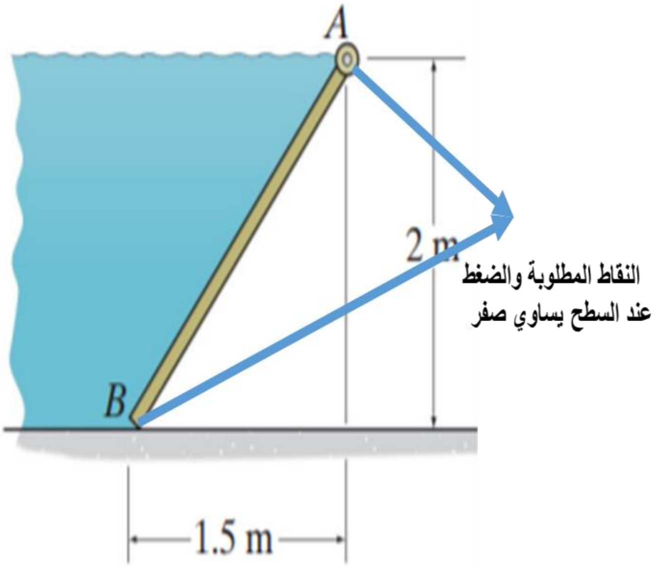
$$p_D = 1.0(10^3)(9.81)(2) = 19\,620\ \text{N/m}^2 = 19.62\ \text{kN/m}^2$$

$$p_E = 1.0(10^3)(9.81)(3) = 29\,430\ \text{N/m}^2 = 29.43\ \text{kN/m}^2$$

العمق لحيث وجود الماء

الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **عرض البوابة**

الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



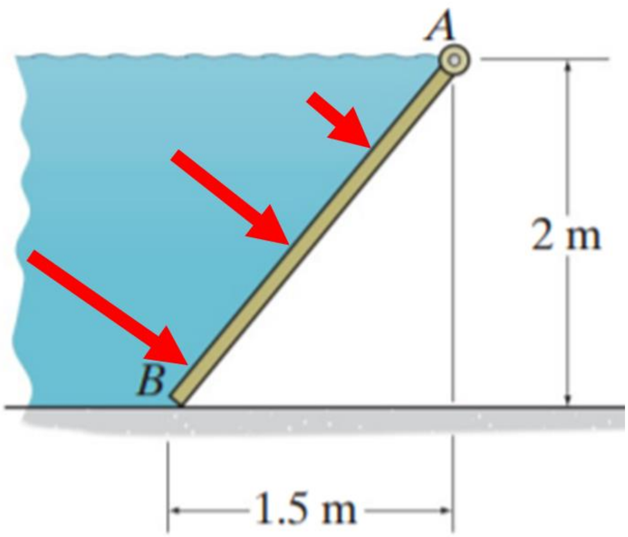
الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **عرض البوابة**

$$w_b = \rho_w g h_B b = 1000(9.81)(2)(1.5)$$
$$= 29.43\ \text{kN/m}$$

الخطوة الرابعه : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

$$F_R = \tfrac{1}{2}(29.43)\left(\sqrt{(1.5)^2 + (2)^2}\right)$$
$$= 36.8\ \text{kN}$$



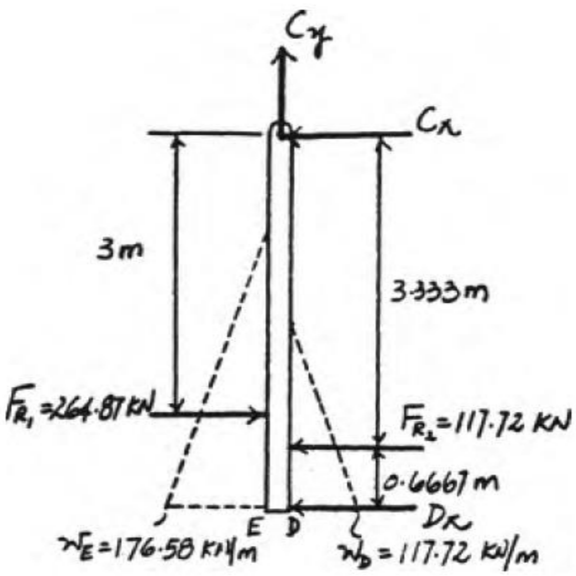
$$w_D = 19.62(6) = 117.72 \text{ kN/m}$$

$$w_E = 29.43(6) = 176.58 \text{ kN/m}$$

الخطوة الرابعه : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

$$F_{R_1} = \frac{1}{2}(176.58)(3) = 264.87 \text{ kN}$$

$$F_{R_2} = \frac{1}{2}(117.72)(2) = 117.72 \text{ kN}$$



وأخيرا إيجاد ردود الأفعال

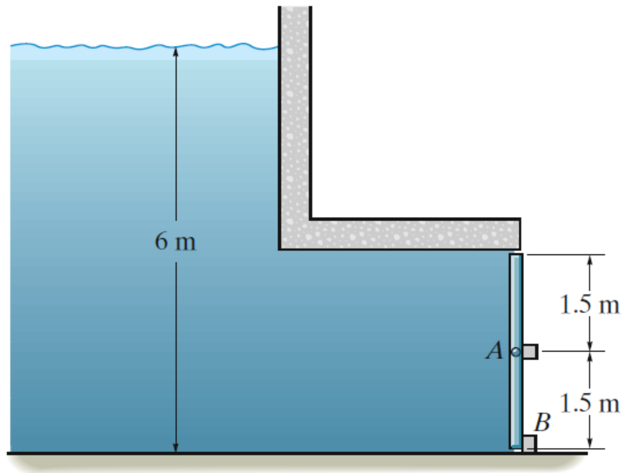
$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0; \qquad 264.87(3) - 117.72(3.333) - D_x(4) = 0$$

$$D_x = 100.55 \text{ kN} = 101 \text{ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 264.87 - 117.72 - 100.55 - C_x = 0$$

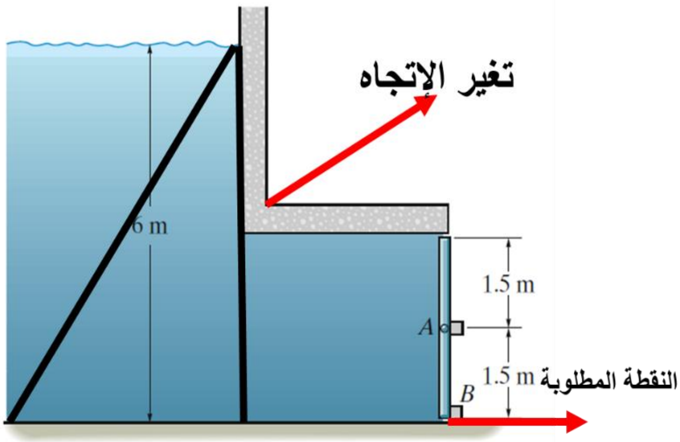
$$C_x = 46.6 \text{ kN}$$

- ❑ **Prop9-127.** The **2-m-wide** rectangular gate is **pinned** at its center *A* and is prevented from rotating by the **block at *B***. Determine the reactions at these supports due to hydrostatic pressure ? $\rho = 1 \frac{Mg}{m^3}$.



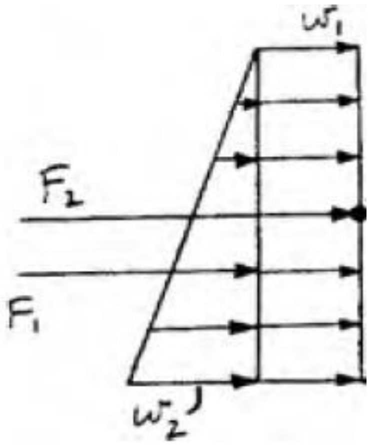
الفكرة هنا : إختلاف شكل الحمل بسبب إختلاف إتجاه حاجز المياه

الخطوة الأولى : نريد معرفة أين النقطة المطلوب عندها الحساب



الخطوة الثانية : نحسب الضغط عند **النقطة المطلوبة** ونرى من عند النقطة المطلوبة **إرتفاع الماء**

الخطوة الثالثة : نحسب شدة الحمل عن طريق ضرب الضغط ب **عرض البوابة**



$$w_1 = 1000(9.81)(3)(2) = 58\,860 \text{ N/m}$$

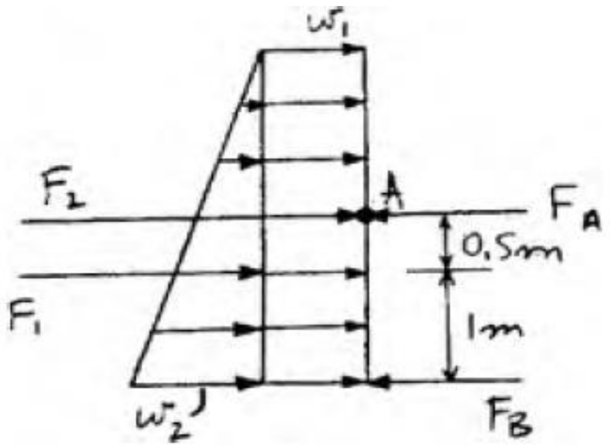
$$w_2 = 1000(9.81)(3)(2) = 58\,860 \text{ N/m}$$

الخطوة الرابعه : نحسب القوة الناتجة عن الضغط

$$F_1 = \frac{1}{2}(3)(58\,860) = 88\,290$$

$$F_2 = (58\,860)(3) = 176\,580$$

إيجاد **ردود الأفعال**



$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad 88\,290(0.5) - F_B(1.5) = 0$$

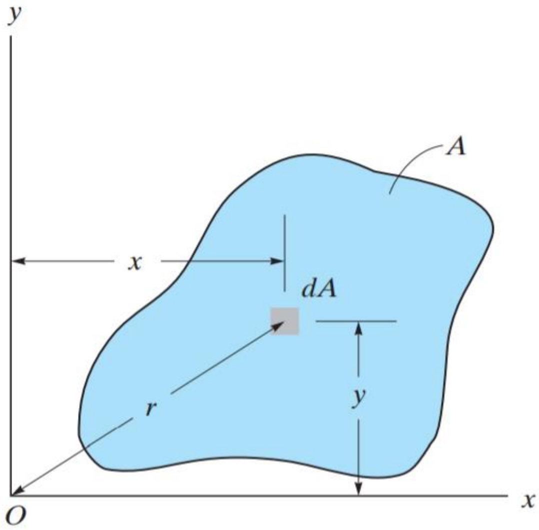
$$F_B = 29\,430 \text{ N} = 29.4 \text{ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 88\,290 + 176\,580 - 29\,430 - F_A = 0$$

$$F_A = 235\,440 \text{N} = 235 \text{ kN}$$

- **Moment of Inertia :** The moment of inertia is a geometric property of an area that is used to determine the <u>**strength of a structural member**</u> .

- **عزم القصور الذاتي** هي خاصية هندسية تستخدم لتحديدة <u>**قوة عنصر إنشائي .**</u>



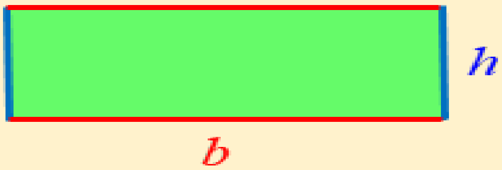
$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$

10
Moments of Inertia 529

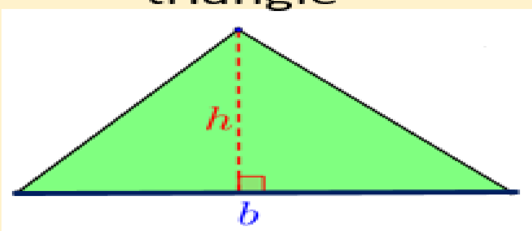
<u>**مراجعة بسيطة**</u> لبعض الأمور التي سوف تحتاجونها

rectangle

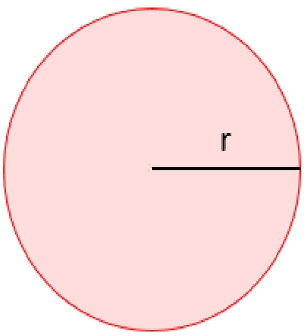


$$A = bh$$

triangle



$$A = \frac{1}{2} bh$$



Area of circle

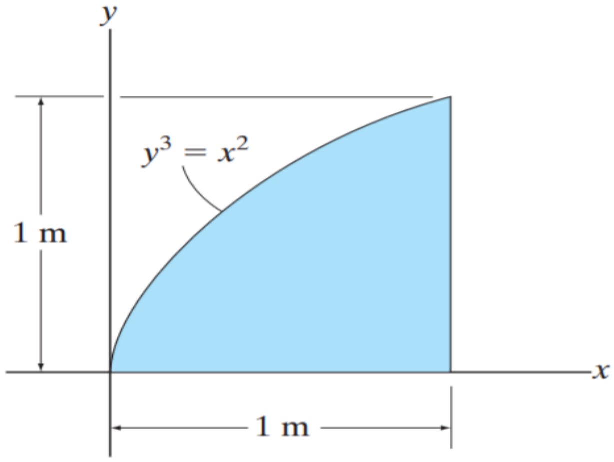
$$A = \pi r^2$$

$$\int_0^1 x^2(x^{\frac{2}{3}})dx = \int_0^1 (x^{\frac{8}{3}})dx$$

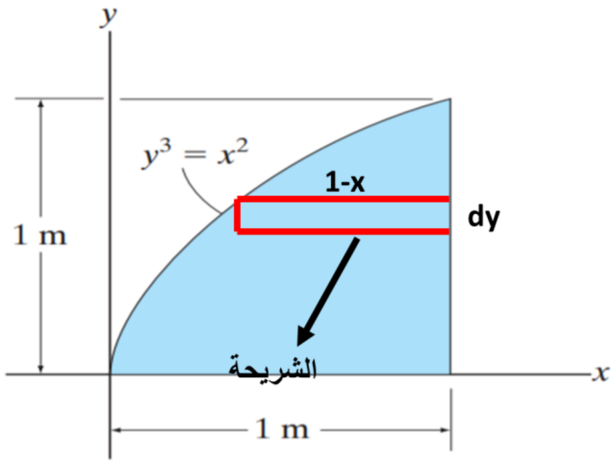
$$= \left(\frac{3x^{\frac{11}{3}}}{11}\right)_0^1 = \frac{3}{11}$$

$$= 0.273m^4$$

- **F10–1.** Determine the **<u>moment of inertia</u>** of the shaded area about the **<u>x axis</u>** ?



<u>الخطوة الأولى :</u> نأخذ شريحة موازية ل **<u>المحور المطلوب</u>** ونجد **<u>مساحتها</u>**

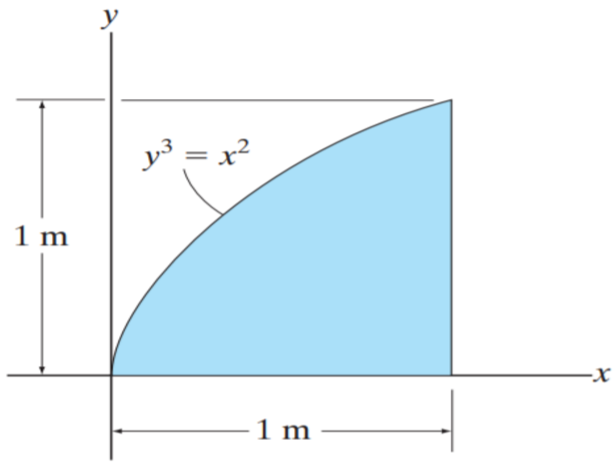


$$dA = dA = (1-x)dy = (1-y^{\frac{3}{2}})dy$$

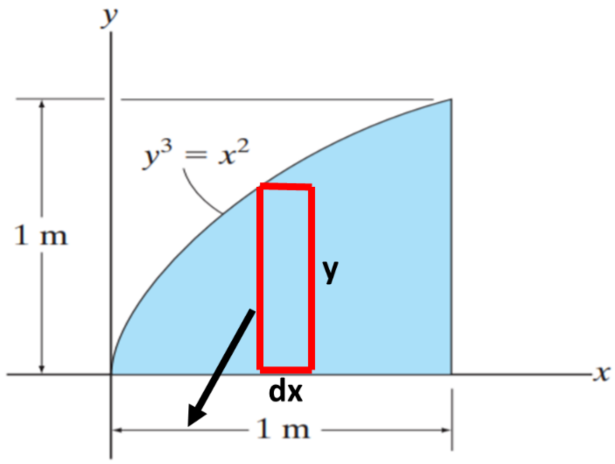
<u>الخطوة الثانية :</u> تطبيق القانون الخاص بالمحور

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

- **F10–3.** Determine the **moment of inertia** of the shaded area about **<u>the y axis</u>** ?



<u>الخطوة الأولى :</u> نأخذ شريحة موازية ل **<u>المحور المطلوب</u>** ونجد **<u>مساحتها</u>**



$$y^3 = x^2 \longrightarrow y = x^{\frac{2}{3}}$$

$$dA = ydx = x^{\frac{2}{3}}dx$$

يجب علينا جعل المتغير الصادي إلى متغير سيني من خلال معادلة المنحى

<u>الخطوة الثانية :</u> تطبيق القانون الخاص بالمحور

$$I_y = \int_A x^2\, dA$$

التكامل هنا بواسطة ألة الحاسبة ولا يوجد داعي ل حسابه يدويا

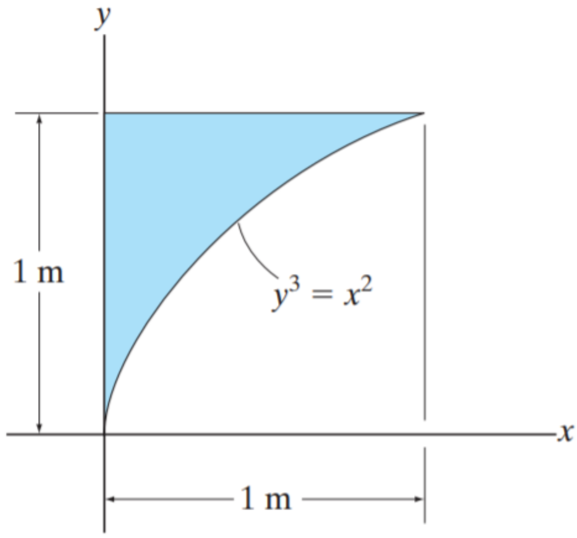
$$I_y = \int_A x^2\, dA$$

$$\int_0^1 x^2[(1 - x^{\frac{2}{3}})dx] = \int_0^1[(x^2 - x^{\frac{8}{3}})dx]$$

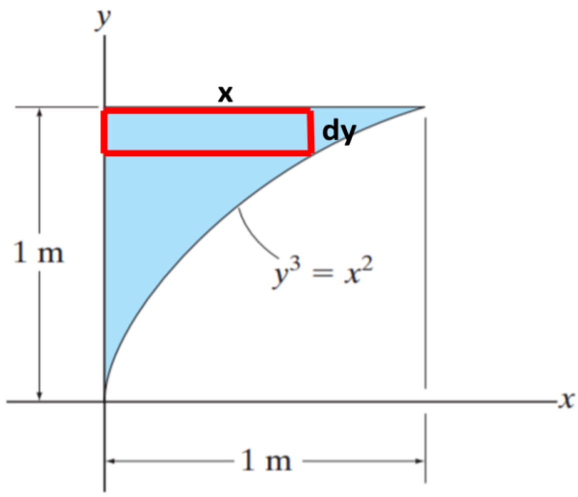
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^{\frac{11}{3}}}{11}\right)_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right)$$

$$= 0.061 m^4$$

- **F10–2**. Determine the **moment of inertia** of the shaded area about the **<u>x axis</u>** ?



<u>الخطوة الأولى :</u> نأخذ شريحة موازية ل **<u>المحور المطلوب</u>** ونجد **<u>مساحتها</u>**



$$dA = x dy = y^{\frac{3}{2}} dy$$

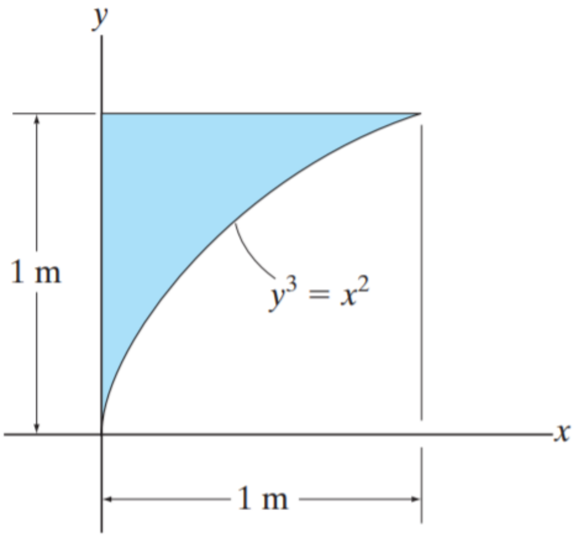
$$y^3 = x^2 \longrightarrow y^{\frac{3}{2}} = x$$

$$\int_0^1 y^2[(1 - y^{\frac{3}{2}})dy] = \int_0^1[(y^2 - y^{\frac{7}{2}})dy]$$

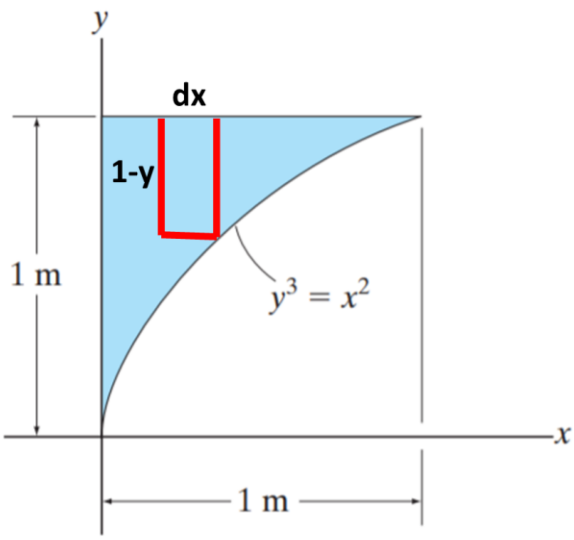
$$= \left(\frac{y^3}{3} - \frac{2y^{\frac{9}{2}}}{9}\right)_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)$$

$$= 0.111 m^4$$

- **F10–4**. Determine the **<u>moment of inertia</u>** of the shaded area about the **<u>y axis</u>** ?

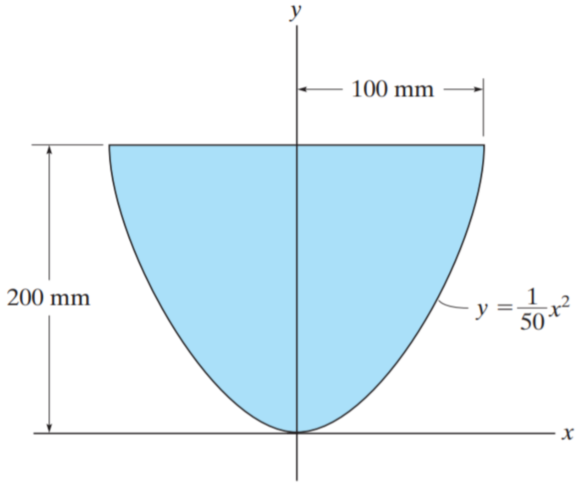


<u>الخطوة الأولى :</u> نأخذ شريحة موازية ل **<u>المحور المطلوب</u>** ونجد **<u>مساحتها</u>**

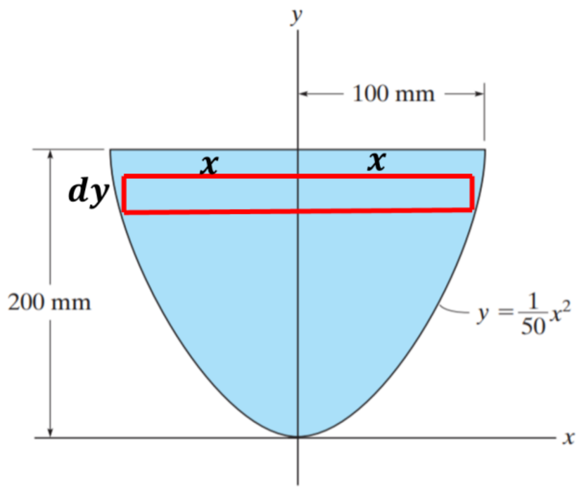


$$dA = dA = (1 - y)dx = (1 - x^{\frac{2}{3}})dx$$

- Prop10–3. Determine the moment of inertia for the shaded area about the x axis ? فكرة التماثل



الخطوة الأولى : نأخذ شريحة موازية ل المحور المطلوب ونجد مساحتها



$$dA = 2x * dy$$

$$y = \frac{x^2}{50}$$

$$x = \sqrt{50y}$$

$$dA = 2\sqrt{50y} * dy$$

الخطوة الثانية : تطبيق القانون الخاص بالمحور

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

$$Ix = \int_0^{200} 2 * \sqrt{50} * \sqrt{y} * y^2 * dy$$

$$= 457.14 * 10^6$$

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

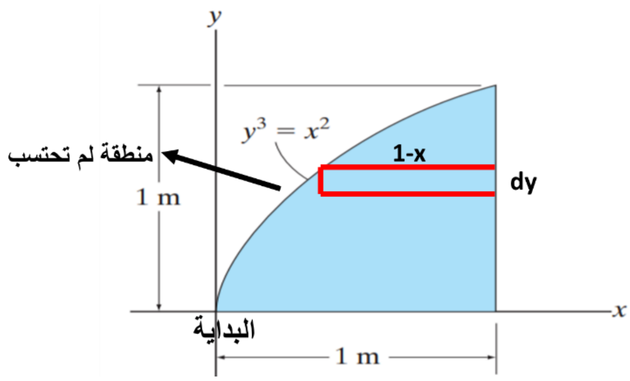
$$\int_0^1 y^2 (y^{\frac{3}{2}}) dy = \int_0^1 (y^{\frac{7}{2}}) dy$$

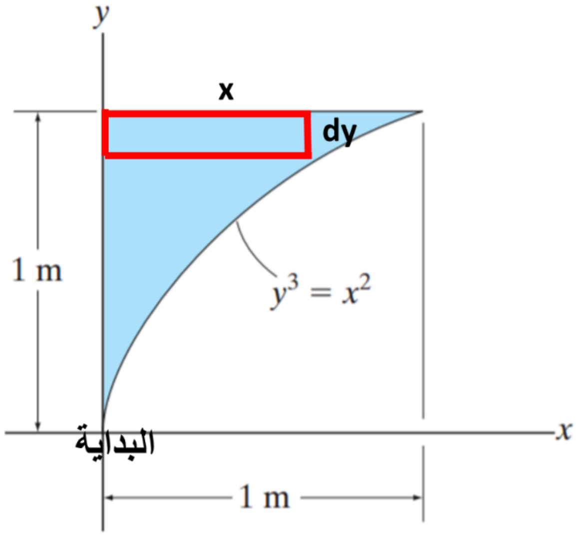
$$= \left(\frac{2y^{\frac{9}{2}}}{9}\right)_0^1 = \frac{2}{9}$$

$$= 0.222 m^4$$

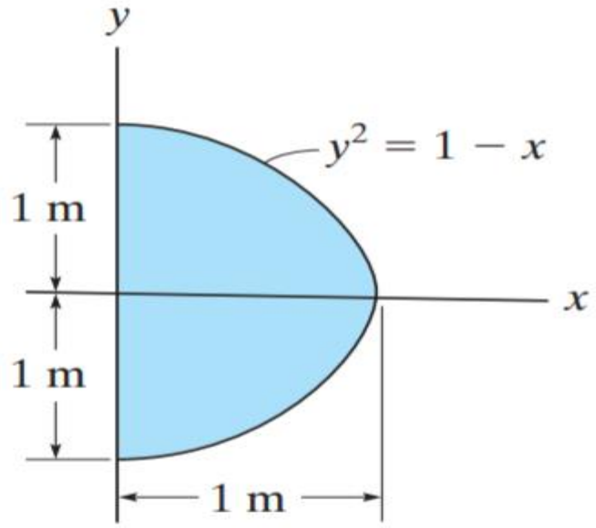
مهم جدا الإنتباه لهذه التفاصيل لأن الحل معتمد عليها

إنتبه هنا ولاحظ الفرق على المنطقة المظللة

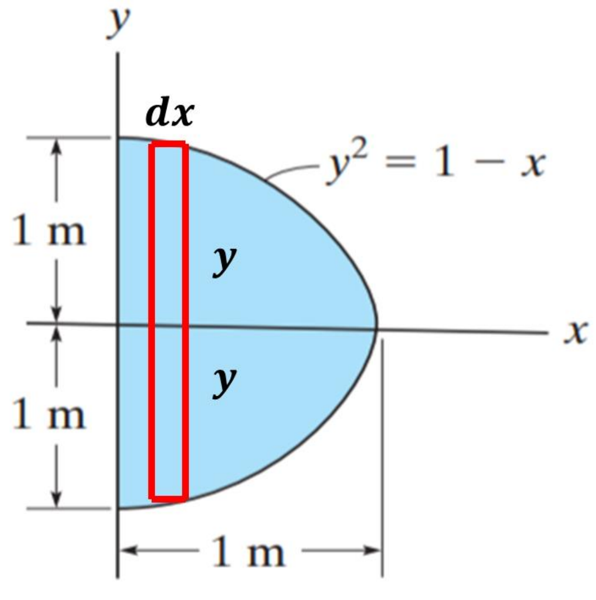




- Prop10–20. Determine the moment of inertia for the shaded area about the y axis ? فكرة التماثل



الخطوة الأولى : نأخذ شريحة موازية ل المحور المطلوب ونجد مساحتها



$$dA = 2y * dx$$

$$y^2 = 1 - x$$

$$y = \sqrt{1 - x}$$

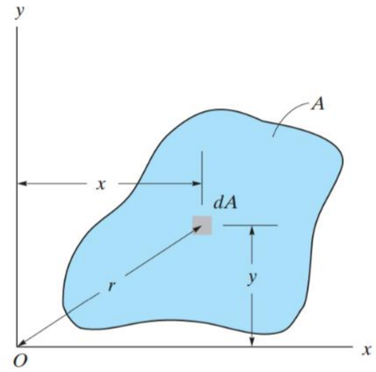
$$dA = 2 * \sqrt{1 - x} * dx$$

الخطوة الثانية : تطبيق القانون الخاص بالمحور

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$

$$Iy = \int_0^1 2 * \sqrt{1 - x} * dx * x^2 = 0.304$$

- Polar moment of inertia



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_A r^2 \, dA = I_x + I_y$$

- Radius of gyration

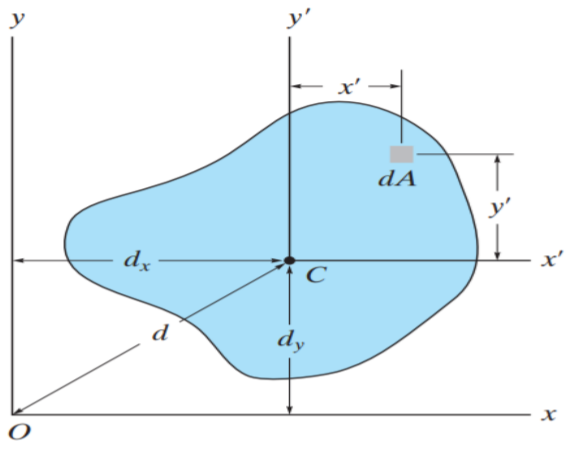
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

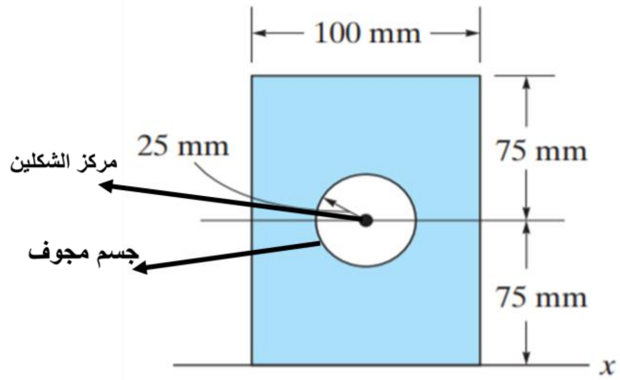
- Parallel-Axis Theorem : Find the moment of inertia of an area about any axis that is parallel to an axis passing through the centroid and about which the moment of inertia is known .

- بإختصار نستخدم هذه القاعدة عندما يطلب منك حساب العزم ل محور لا يمر ب مركز الشكل وسنوضح ذلك لاحقا



$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \qquad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

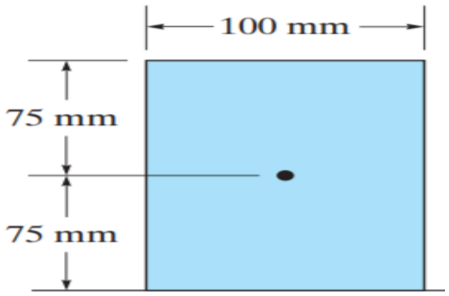
- **Example10.4. Determine the <u>moment of inertia</u> of the area shown in about the <u>x axis</u> ?**

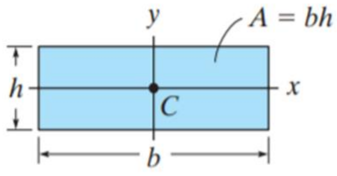


ما قبل البدء , نلاحظ أن المحور السيني لا يمر ب مركز الأجسام الثلاثة لذلك <u>نستخدم نظرية المحور الموازي ل المحور السيني</u>

الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها

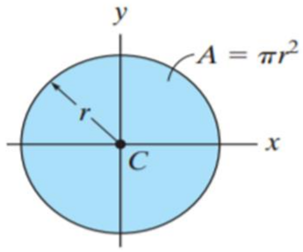
<u>أشكال يسهل التعامل معها</u> مثل مربع و مستطيل ومثلث ونقول ونكرر <u>هذا الحل ليس إجباري</u> أي يمكنك أن تقسم غير هذا التقسيم , المهم هو أن يكون <u>نفس الإجابة</u>.





Rectangular area

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \qquad I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

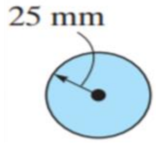


Circular area

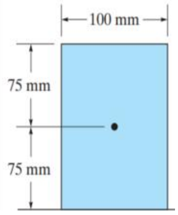
$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4 \qquad I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

الخطوة الثانية : نحسب <u>مساحة</u> كل شكل

Circle $\pi(25)^2$



Rectangle $(100)(150)$



الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

Circle

المسافة ما بين مركز الجسم <u>وصولا ل</u> المحور السيني

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

Rectangle

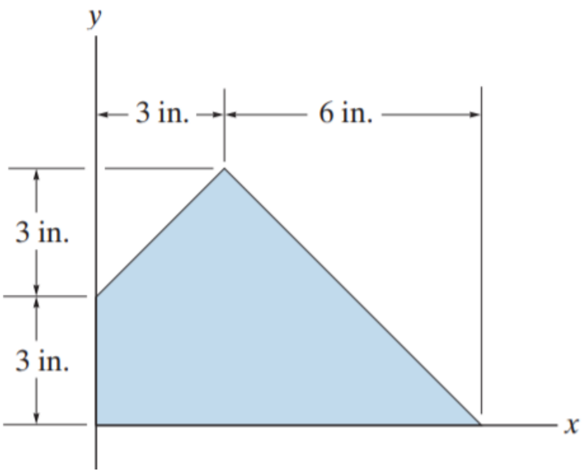
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$

الرقم الخاص ب الدائرة وهو **سالب** لأنه مجوف
أي يعني لا يدخل في الحساب

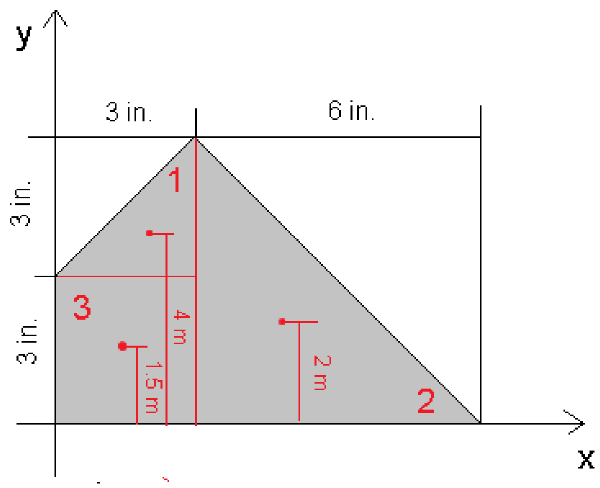
- **Prop10–25. Determine the moment of inertia of the composite area about the <u>x axis</u> ?**

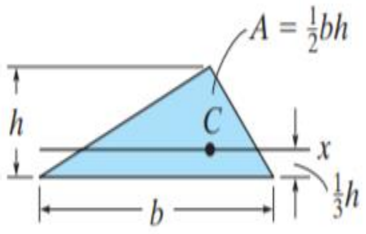


ما قبل البدء <u>,</u> نلاحظ أن المحور السيني لا يمر ب مركز الأجسام الثلاثة لذلك نستخدم <u>نظرية المحور الموازي ل المحور السيني</u>

الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها

<u>أشكال يسهل التعامل معها</u> مثل مربع و مستطيل ومثلث, ونقول ونكرر هذا الحل ليس إجباري أي يمكنك أن تقسم غير هذا التقسيم , المهم هو أن يكون نفس الإجابة .





Triangular area

$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$

الخطوة الثانية : نحسب <u>مساحة</u> كل شكل

$$A_1 = \frac{1}{2}hb = \frac{1}{2}3\text{ in.}3\text{ in.} = 4.5\text{ in.}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}hb = \frac{1}{2}6\text{ in.}6\text{ in.} = 18\text{ in.}^2$$

$$A_3 = hb = 3\text{ in.}3\text{ in.} = 9\text{ in.}^2$$

الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

المسافة ما بين مركز كل جسم إلى أن نصل المحور السيني : dy

$$I = \sum(\bar{I} + Ad_y^2) \qquad \bar{I} = \frac{bh^3}{36}$$

$$[\frac{3\cdot 3^3}{36} + 4.5\cdot 4^2] \longrightarrow \text{الجزء الأول}$$

$$\frac{1}{3} * 3 + 3 = 4$$

$$[\frac{6\cdot 6^3}{36} + 18\cdot 2^2] \longrightarrow \text{الجزء الثاني}$$

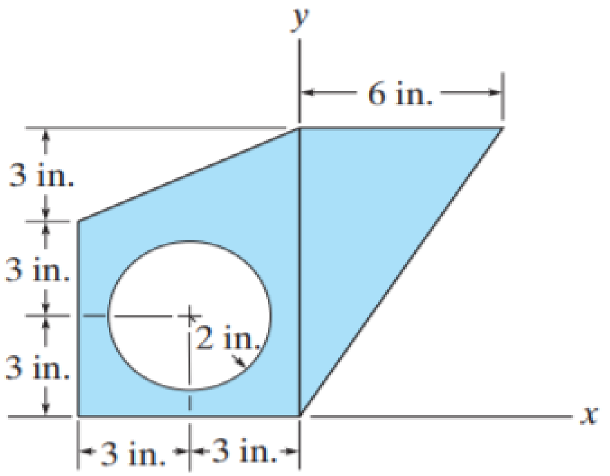
$$\frac{1}{3} * 6 = 2$$

$$[\frac{3\cdot 3^3}{12} + 9\cdot 1.5^2][\text{in.}^4] \longrightarrow \text{الجزء الثالث}$$

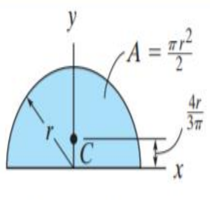
$$\frac{3}{2} = 1.5$$

$$I = \sum(\bar{I} + Ad_y^2)$$
$$= [\frac{3\cdot 3^3}{36} + 4.5\cdot 4^2] + [\frac{6\cdot 6^3}{36} + 18\cdot 2^2] + [\frac{3\cdot 3^3}{12} + 9\cdot 1.5^2][\text{in.}^4]$$
$$= 209.25\text{in.}^4$$

- Prop10–47. Determine the moment of inertia for the shaded area about the y axis ?



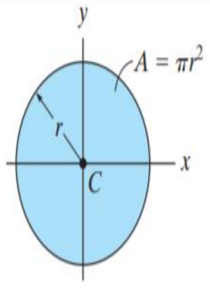
من باب التأكيد والتذكير لكم



Semicircular area

$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$

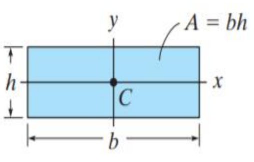
$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$



Circular area

$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$

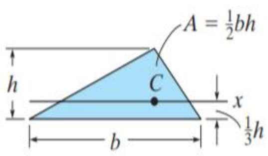
$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$



Rectangular area

$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

$I_y = \frac{1}{12}hb^3$

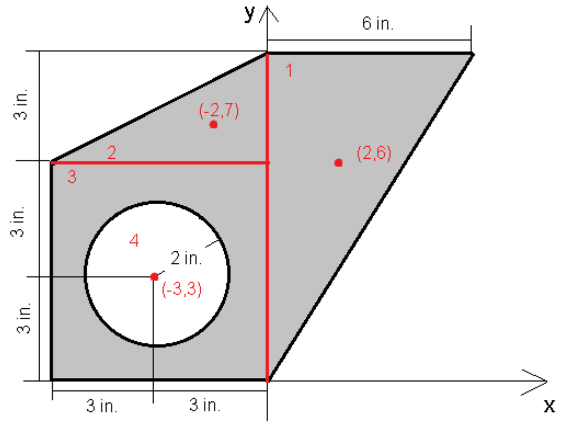


Triangular area

$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

ما قبل البدء , نلاحظ أن المحور الصادي لا يمر ب مركز الأجسام الثلاثة لذلك نستخدم نظرية المحور الموازي ل المحور الصادي

الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها



نحسب الدائرة لوحدها , أي نعتبر أن المربع كامل ونقوم بحساب الدائرة لحالها ومن ثم نقوم بطرحها في الحساب النهائي لأنها مجوفة أي لا تدخل في الحساب

dx: المسافة ما بين مركز كل جسم إلى أن نصل المحور الصادي

الخطوة الثانية : نحسب مساحة كل شكل

الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

$$I_y = \sum(\bar{I} + Ad_x^2)$$

$$= \frac{9\text{ in.}\cdot 6^3\text{ in.}^3}{36} + \frac{9\text{ in.}\cdot 6\text{ in.}}{2}(2\text{ in.})^2$$

المثلث الأول

$$\frac{1}{3} * 6 = 2$$

المثلث الثاني

$$\frac{3\text{ in.}\cdot 6^3\text{ in.}^3}{36} + \frac{3\text{ in.}\cdot 6\text{ in.}}{2}(2\text{ in.})^2$$

$$\frac{1}{3} * 6 = 2$$

$$\frac{6\text{ in.}\cdot 6^3\text{ in.}^3}{12} + 6\text{ in.}\cdot 6\text{ in.}(3\text{ in.})^2$$

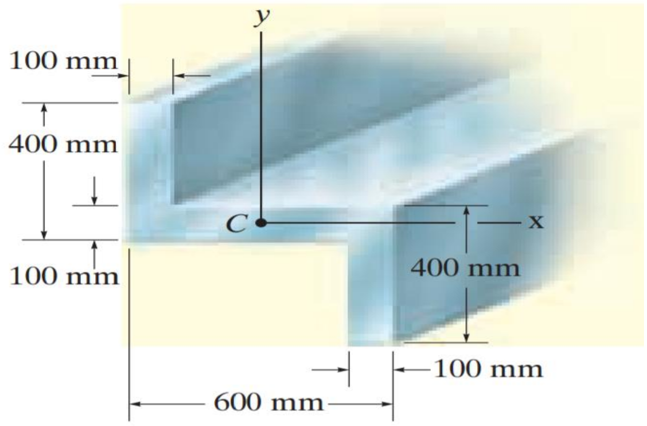
المربع

$$\frac{6}{2} = 3$$

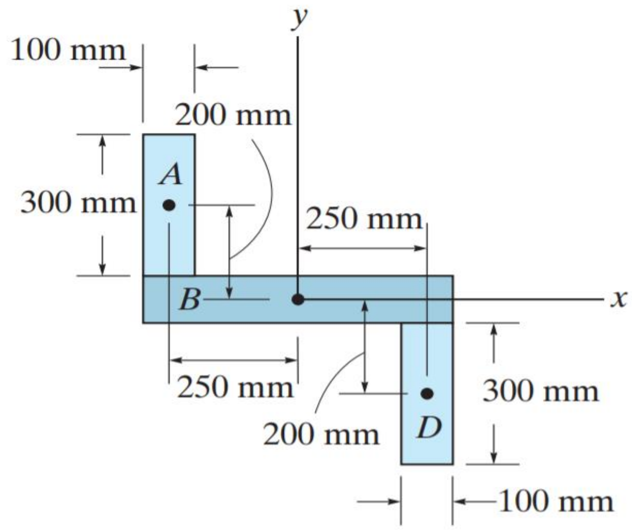
$1 + 2$

$$\left(\frac{\pi \cdot 2^4 \text{ in.}^4}{4} + 2^2 \text{ in.}^2 \pi (3 \text{ in.})^2\right)$$ الدائرة المجوفة

- **Example. Determine the moments of inertia for the cross-sectional area of the member about the <u>x and y centroid axis</u> ?**



- الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها
- **<u>أشكال يسهل التعامل معها</u> مثل مربع و مستطيل ومثلث ونقول ونكرر هذا الحل ليس إجباري أي يمكنك أن تقسم غير هذا التقسيم , المهم هو أن يكون نفس الإجابة .**



الخطوة الثانية : نحسب <u>مساحة</u> كل شكل

Rectangles A and D $(100)(300)$

Rectangle B $(600)(100)$

الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

Rectangles A and D

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$

$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$

الحساب هنا ل مستطيل واحد وفي الناتج النهائي سنضرب ب 2

Rectangle B

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\text{ mm}^4$$

المحور السيني يمر في المركز لذلك **الحد الثاني** لا نقوم بحسابه

$$dy = 0$$

الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

Rectangles A and D

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$

$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

Rectangle B

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\text{ mm}^4$$

المحور الصادي يمر في المركز لذلك الحد **الثاني** لا نقوم بحسابه

$$dx = 0$$

حسبنا ل واحد وقمنا بضرب اثنين لأنه يوجد تماثل

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$

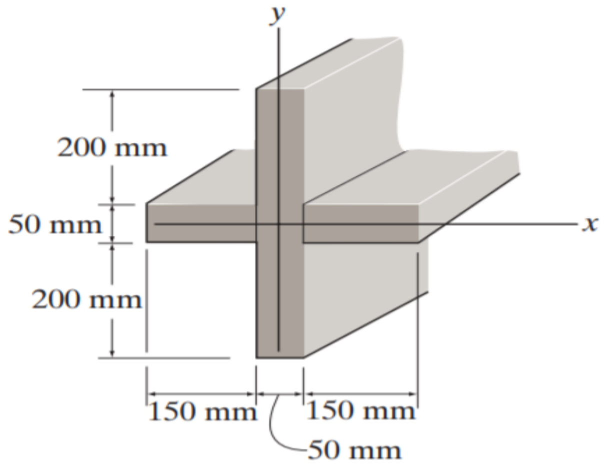
$$= 2.90(10^9)\text{ mm}^4$$

حسبنا ل واحد وقمنا بضرب اثنين لأنه يوجد تماثل

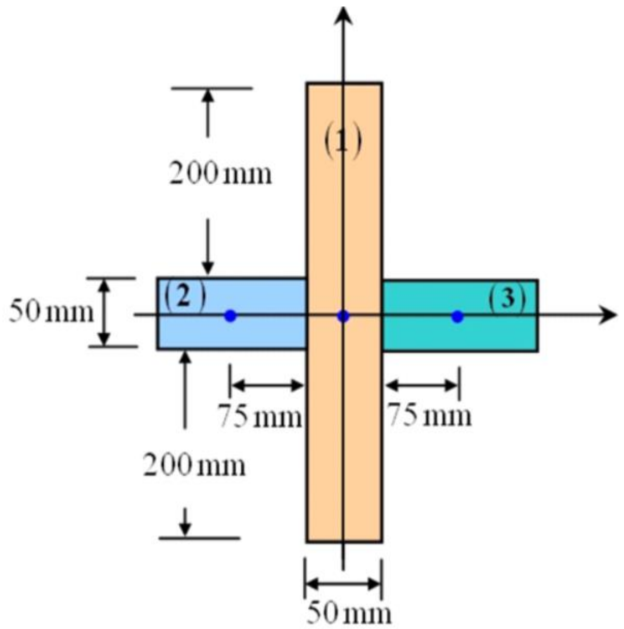
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

$$= 5.60(10^9)\text{ mm}^4$$

- F10–5. Determine the <u>moment of inertia</u> of the beam's cross-sectional area about the <u>centroid x</u>?



الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها



الخطوة الثانية : نحسب <u>مساحة</u> كل شكل

Segment	A (mm^2)
1	$50\times450=22500$
2	$50\times150=7500$
3	$50\times150=7500$
	$\sum A=37500$

الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

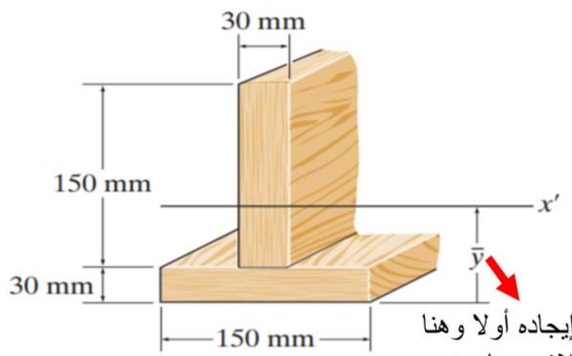
$\bar{I}_{x'}$ (mm^4)	d_y (mm)	Ad_y^2 (mm^4)
$\left(\dfrac{50\times450^3}{12}\right)=379.6875\times10^6$	0	0
$\left(\dfrac{150\times50^3}{12}\right)=1.5625\times10^6$	0	0
$\left(\dfrac{150\times50^3}{12}\right)=1.5625\times10^6$	0	0

$$I_x=\sum\left(\bar{I}_{x'}+Ad_y^2\right)=\sum\bar{I}_{x'}+\sum Ad_y^2$$

$$I_x=382.8125\times10^6+0$$

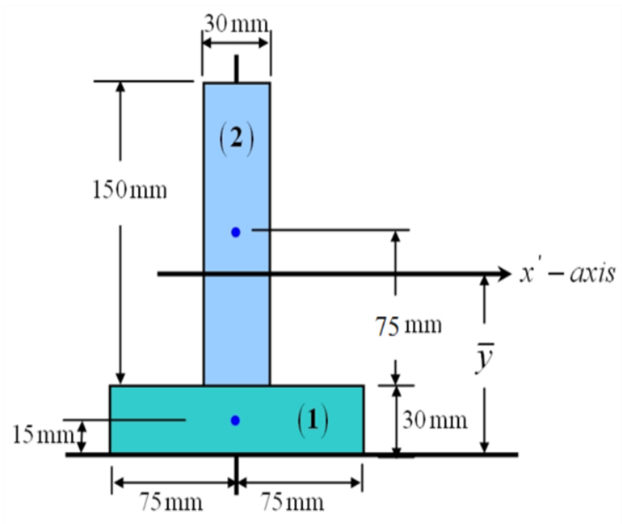
$$=382.8125\times10^6\ mm^4$$

- F10–8. Determine the <u>moment of inertia</u> of the cross sectional area of the T-beam with respect to the <u>$x`$ axis</u> passing through the centroid of the cross section ?



علينا إيجاده أولا وهنا
الإختلاف عما مضى
من الأسئلة السابقة

الخطوة الأولى : نقسم الشكل إلى أشكال يسهل التعامل معها



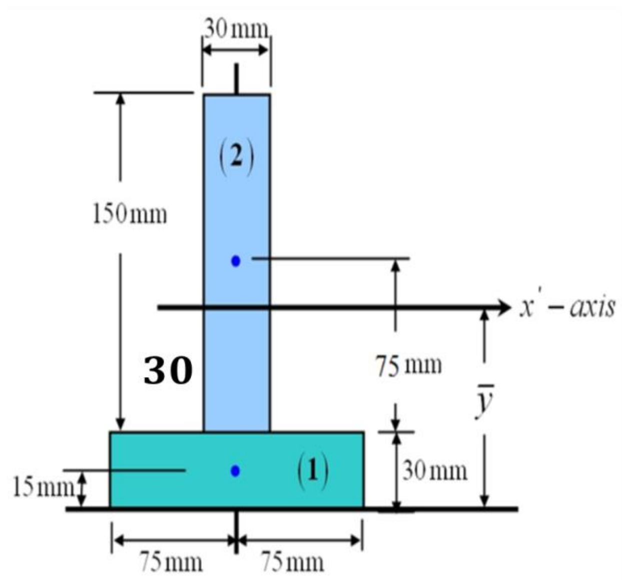
الخطوة الثانية : نحسب مساحة كل شكل

Section	A (mm^2)	y (mm)	Ay (mm^3)
1	$30\times150=4500$	$\frac{1}{2}\times30=15$	67500
2	$150\times30=4500$	$30+\frac{1}{2}\times150=105$	472500

$$\bar{y}=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{4500\times15+4500\times105}{4500+4500}$$

$$=60\ \ mm$$



الخطوة الثالثة : نجد عزم القصور الذاتي لكل شكل

$$I_1=\frac{150*30^3}{12}+4500*45^2$$

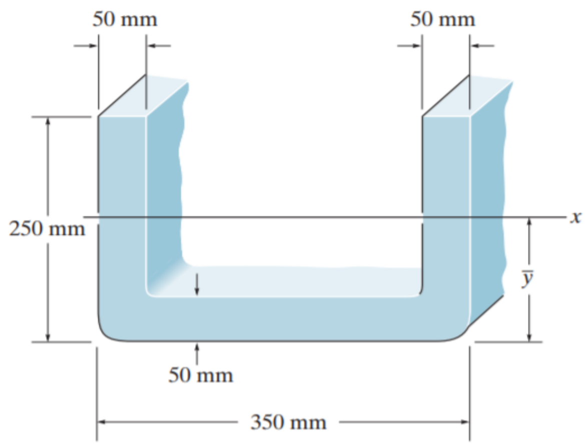
$$60-15$$

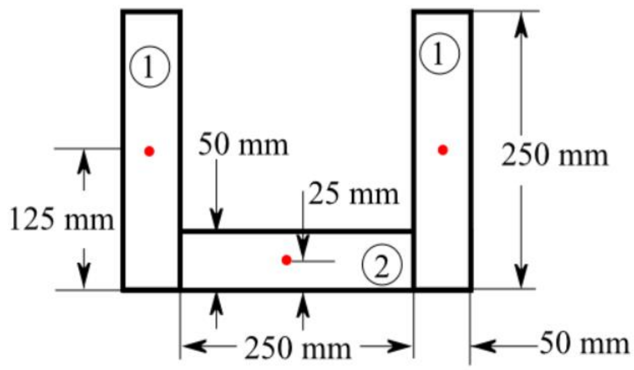
$$I_2=\frac{30*150^3}{12}+4500*45^2$$

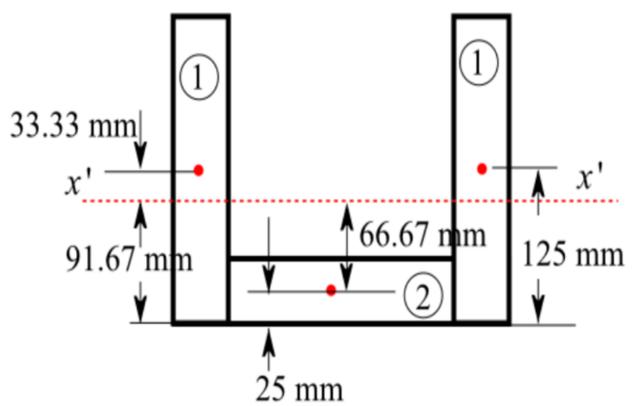
$$75-30$$

$$I_1+I_2=27*10^{-6}$$

- ☐ **Prop10–28. Calculate the <u>moment of inertia</u> of the area <u>about this axis</u> ?**







Segment	Area $(A\ \text{m}^2)$	Centroid $(\bar{y}\ \text{mm})$	$(\bar{y}A)\ \text{mm}^3$
1 (2 NO.'s)	$2\times(250\times50)$ $=25000$	$\left(\frac{250}{2}\right)=125$	3.125×10^6
2	(250×50) $=12500$	$\left(\frac{50}{2}\right)=25$	0.3125×10^6
$\sum$	37500		3.4375×10^6

$$\bar{y}=\frac{\sum\bar{y}A}{\sum A}$$

$$\bar{y}=\frac{3.4375\times10^6\ \text{mm}^3}{37500\ \text{mm}^2}=91.67\ \text{mm}$$

$$(I_{x'})_1=\left[2\times\left(\frac{50\times250^3}{12}\right)+25000\times33.33^2\right]=157.99\times10^6\ \text{mm}^4$$

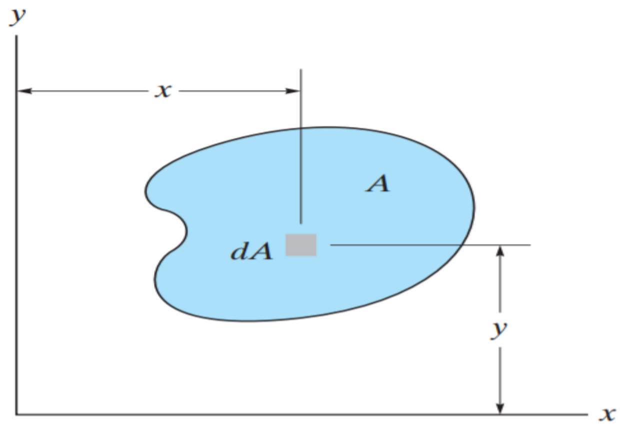
$$\frac{250}{2}-91.67$$

$$(I_{x'})_2=\left[\left(\frac{250\times50^3}{12}\right)+12500\times66.67^2\right]=58.16\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$91.67-25$$

$$I_{x'}=157.99\times10^6+58.16\times10^6=216.15\times10^6\ \text{mm}^4$$

- **<u>Product Of Inertia</u> is required in order to determine the maximum and minimum moments of inertia for the area.**
- **These maximum and minimum values are important properties <u>needed</u> for <u>designing structural and mechanical members</u> such as beams, columns, and shafts.**



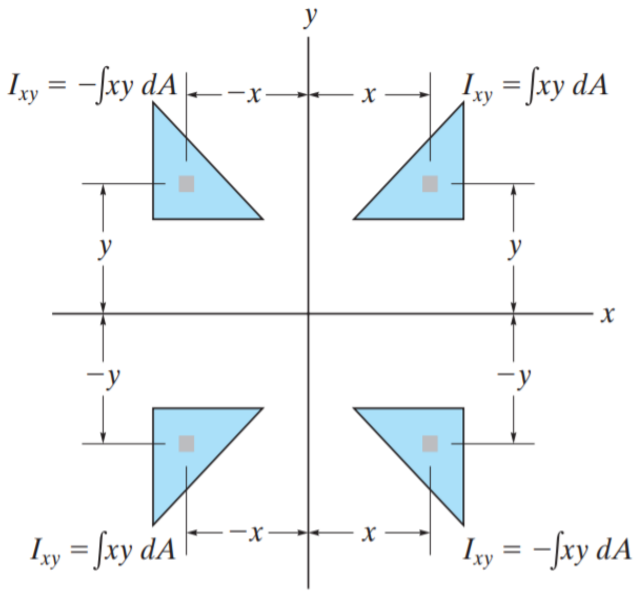
$$I_{xy}=\int_A xy\ dA$$

$$I_{xy}=\bar{I}_{x'y'}+A\,d_x d_y$$

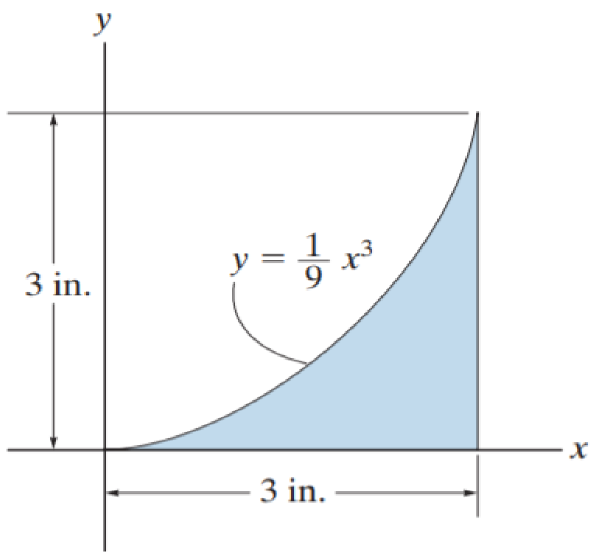
يكون صفر <u>غالبا</u> بسبب التماثل

حالة المحور المطلوب لا يمر في مركز الشكل المعطى وقد ناقشنا هذه المعلومة مسبقا

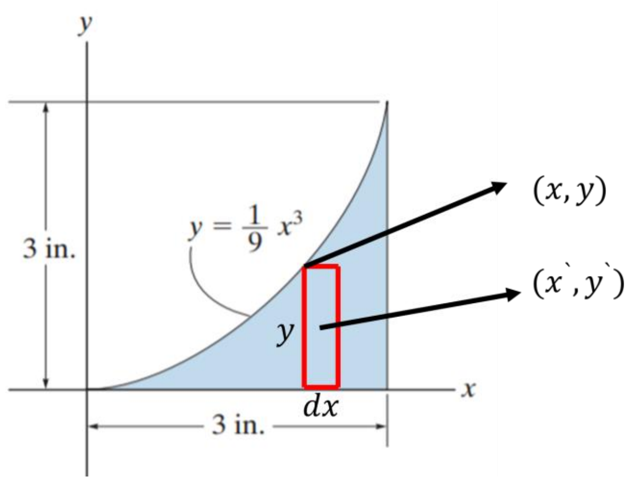
<u>نريد التذكير قد تختلف الإشاره حسب مكان الربع التي تقع به</u>



- Prop10–55. Determine the product of inertia of the shaded area with respect to the x and y axis ?



نأخذ شريحة ونحسب مساحتها



$$x` = x$$

$$y` = \frac{y}{2}$$

$$dA = y * dx$$

$$I = \int xydA$$

$$I = \int xy * ydx$$

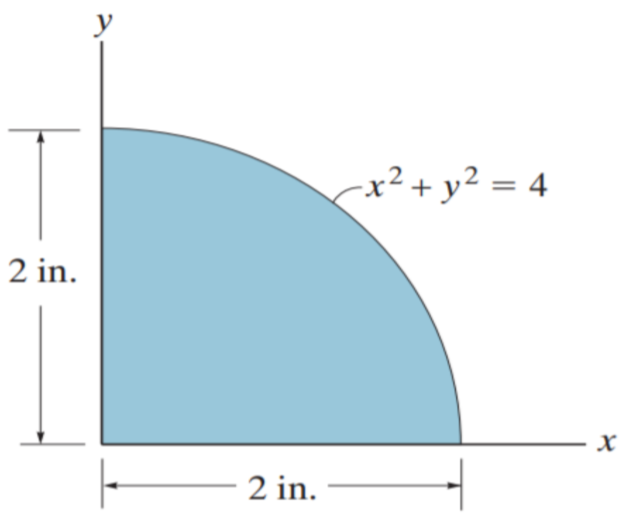
$$y^2 = \frac{1}{81}x^6$$

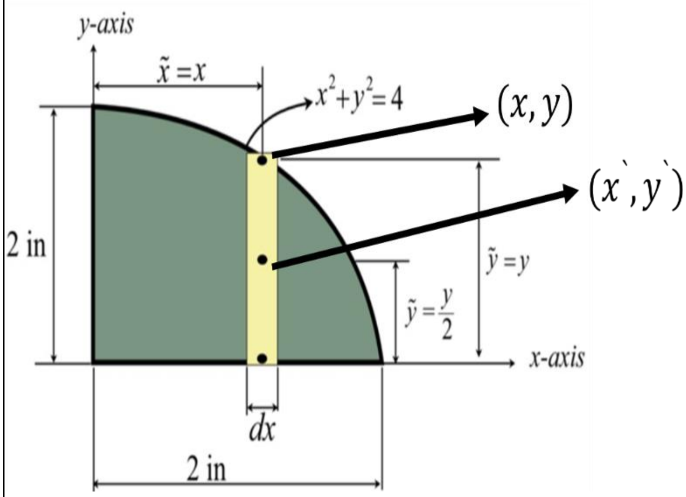
$$I = \frac{1}{2}\int x * \frac{1}{81}x^6 dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^3 x * \frac{1}{81}x^6 dx$$

$$I = 5.06$$

- Prop10–60. Determine the product of inertia of the shaded area with respect to the x and y axis ?





$$dA = y * dx$$

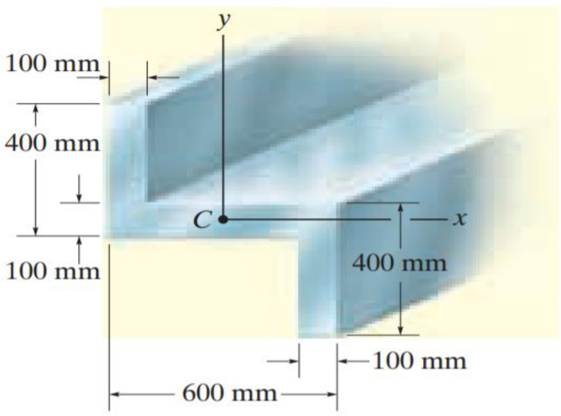
$$y^2 = 4 - x^2$$

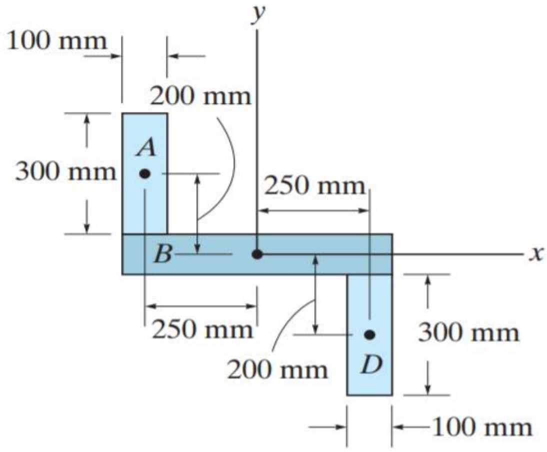
$$I = \int x * y * y dX$$

$$I = \frac{1}{2}\int x * (4 - x^2) dX$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 x * (4 - x^2) dx = 2$$

- **Example. Determine the product of inertia for the cross-sectional area of the member shown in Fig. 10–15a about the x and y centroid axis ?**





Rectangle A

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$

$$= 0 + (300)(100)(-250)(200) = -1.50(10^9)\ \text{mm}^4$$

إنتبه ل الربع الذي تقع به

Rectangle B ⟶ المحاور تمر في مركز الجسم

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$

$$= 0 + 0 = 0$$

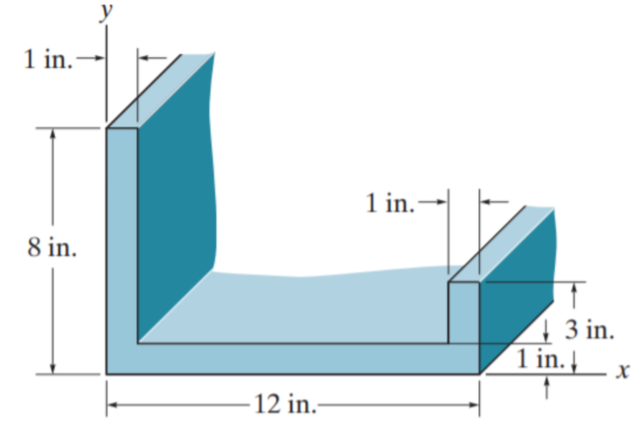
Rectangle D

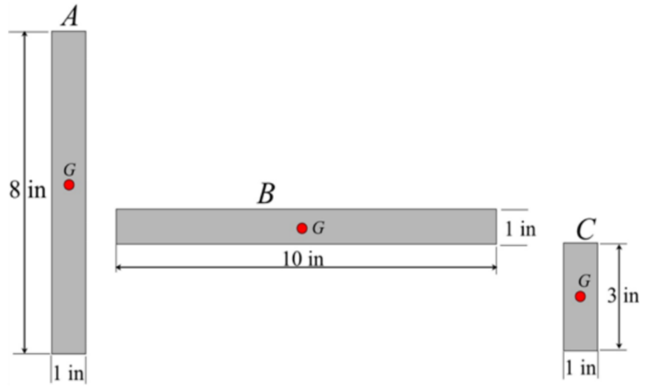
$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$

$$= 0 + (300)(100)(250)(-200) = -1.50(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$I_{xy} = -1.50(10^9) + 0 - 1.50(10^9) = -3.00(10^9)\ \text{mm}^4$$

- ❑ **Prop10–62. Determine the <u>product of inertia</u> for the beam's cross-sectional area with respect to the x and y axis ?**





يمكنكم تقسيم هذا الشكل إلى أشكال أخرى غير هذه

$$(I_{xy})_A = \bar{I}_{x'y'} + A\bar{x}\bar{y}$$
$$= 0 + (8\,\text{in})(1\,\text{in})(0.5\,\text{in})(4\,\text{in})$$
$$= 16\,\text{in}^4$$

من مركز الجسم ل المحور الصادي

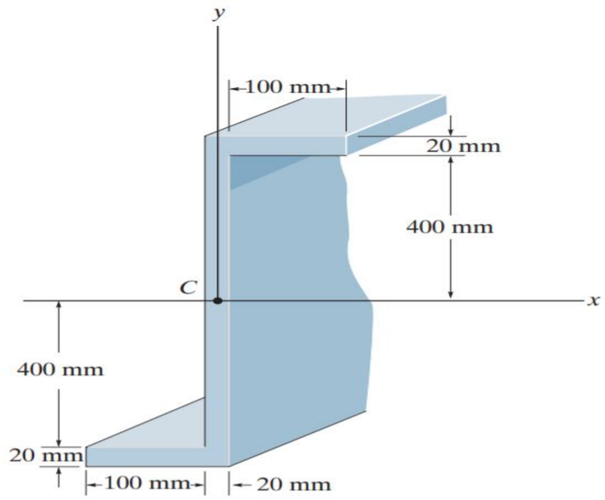
من مركز الجسم ل المحور السيني

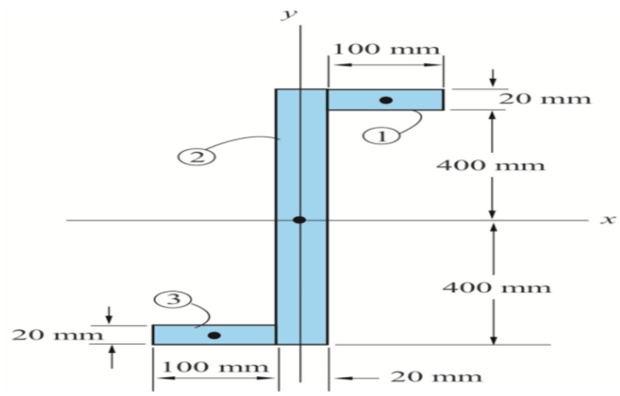
$$(I_{xy})_B = \bar{I}_{x'y'} + A\bar{x}\bar{y}$$

$$= 0 + 10 * 1 * 0.5 * 6$$
$$= 30$$

$$(I_{xy})_C = \bar{I}_{x'y'} + A\bar{x}\bar{y}$$
$$= 0 + (3\,\text{in})(1\,\text{in})(11.5\,\text{in})(1.5\,\text{in})$$
$$= 51.75\,\text{in}^4$$

- ❑ **Prop 10–66. Determine the product of inertia of the cross sectional area with respect to the x and y axis ?**





Segment	Area $A(\text{mm}^2)$	d_x (mm)	d_y (mm)	$I_{x'y'}$ (mm^4)	$I_{x'y'}$ (mm^4)
1	100×20 $=2000$	$10+50$ $=60$	$400+10$ $=410$	0	49.2×10^6
2	840×20 $=16800$	0		0	0
3	100×20 $=2000$	$-10-50$ $=-60$	$-400-10$ $=-410$	0	49.2×10^6

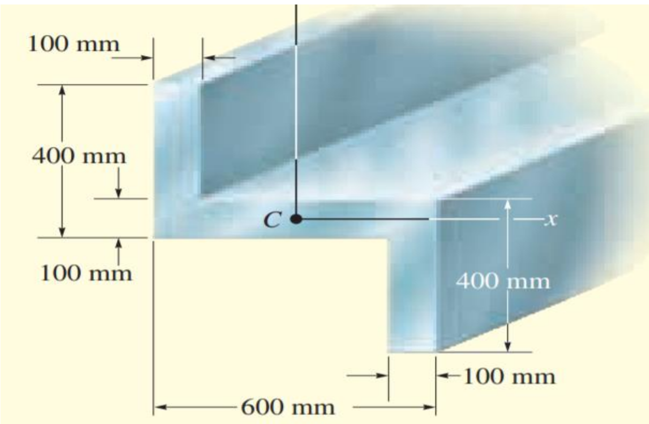
$$I_{xy} = \sum I_{xy}$$
$$= (49.2\times 10^6) + 0 + (49.2\times 10^6)$$
$$= 98.4\times 10^6\ \text{mm}^4$$
$$I_{xy} = 98.4\times 10^6\ \text{mm}^4$$

دائرة مور سيركل , موضوع مهم في مادة مقاومة المواد ومادة الهندسة الجيوتقنية وأخر موضوع لنا في هذا الشابتر .

I_x I_y I_{xy}

غالبا تعطى في السؤال وفي حال عدم إعطاؤها عليك إيجادهم كما تعلمنا سابقا وفي حال قمت بإيجادهم رسم الدائرة سهل جدا

- **Example10.9. Using Mohr's circle, determine the principal moments of inertia and the orientation of the major principal axes for the cross-sectional area of the member shown in Fig. 10–20a, with respect to an axis passing through the centroid ?**



$$I_x = 2.90(10^9)\ \text{mm}^4,$$
$$I_y = 5.60(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_{xy} = -3.00(10^9)\ \text{mm}^4.$$

هذه الأرقام معطاه في السؤال وهذا ليس بشرط

نريد الأن معرفة مركز الدائرة

$$O = \left[\frac{IX + IY}{2}, 0\right]$$

$$O = \left[\frac{2.90 + 5.60}{2}\right] = (4.25, 0)$$

نريد معرفة نصف قطر الدائرة

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\sqrt{(-1.35)^2 + (-3)^2} = 3.29$$

$$I_{Max} = \frac{I_X + IY}{2} + \sqrt{\left[\frac{I_X - IY}{2}\right]^2 + I_{XY}{}^2}$$

$$I_{Max} = \frac{2.90+5.60}{2} + \sqrt{\left[\frac{2.90-5.60}{2}\right]^2 + (-3)^2} =$$

$$7.54(10^9)\ \text{mm}^4$$

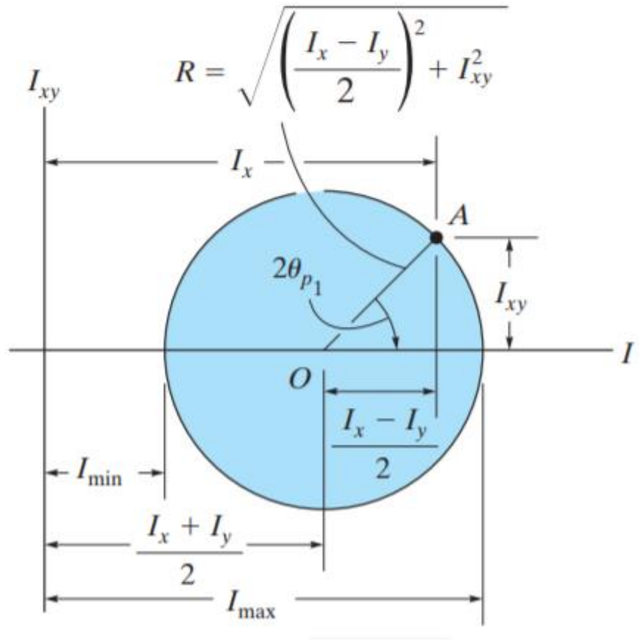
$$I_{Min} = \frac{I_X + IY}{2} - \sqrt{\left[\frac{I_X - IY}{2}\right]^2 + I_{XY}{}^2}$$

$$I_{Min} = \frac{2.90+5.60}{2} - \sqrt{\left[\frac{2.90-5.60}{2}\right]^2 + (-3)^2} =$$

$$0.960(10^9)\ \text{mm}^4$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{-[-3.00(10^9)]}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

ملخص حل أي سؤال : حفظ الشكل :



1. Determine I_x, I_y, and I_{xy}.

2. ايجاد مركز الدائرة

$$O = \frac{IX + IY}{2}$$

3. ايجاد نصف قطر الدائرة

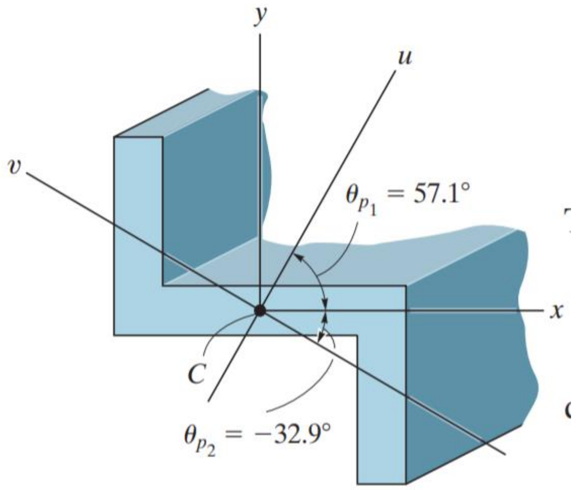
$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

4.
$$I_{Max} = \frac{I_X + IY}{2} + \sqrt{\left[\frac{I_X - IY}{2}\right]^2 + I_{XY}{}^2}$$

5.
$$I_{Min} = \frac{I_X + IY}{2} - \sqrt{\left[\frac{I_X - IY}{2}\right]^2 + I_{XY}{}^2}$$

6.
$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

7. $2\theta_P = \tan^{-1}(tan2\theta_P)$

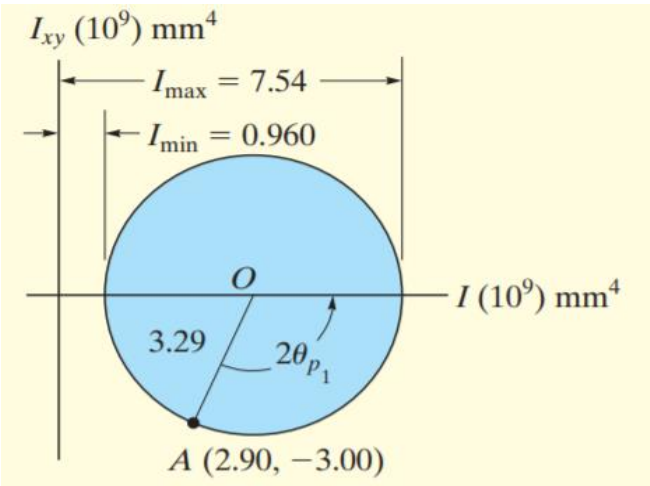


$$2\theta P = \tan^{-1}(-2.22) = -65.8$$

$$\theta P1 = \frac{-65.8}{2} = -32.87$$

$$\theta P2 = \theta P1 + 90$$

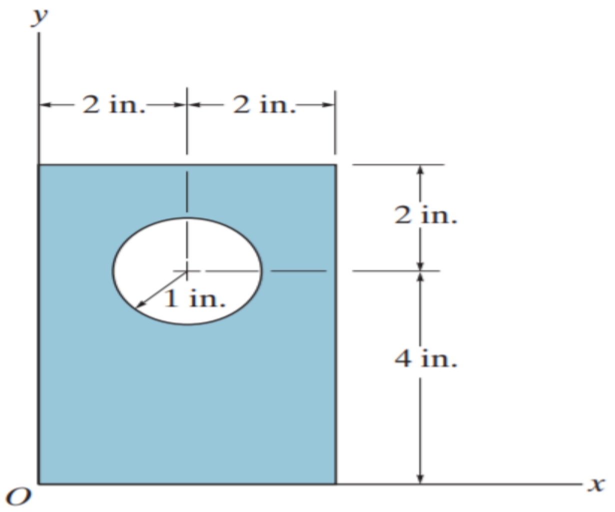
$$\theta P2 = -32.9 + 90 = 57.1$$

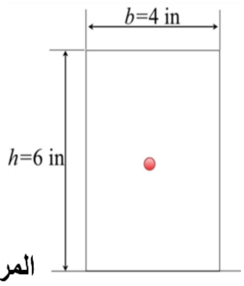


8. $$\theta P1 = \frac{2\theta P}{2}$$

9. $$\theta P2 = \theta P1 + 90$$

❑ **Prop 10–83. Solve Prob using <u>Mohr's circle</u> ?**

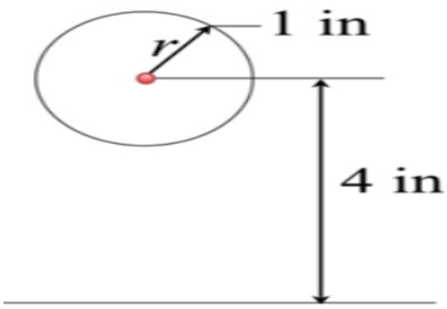




المرجع

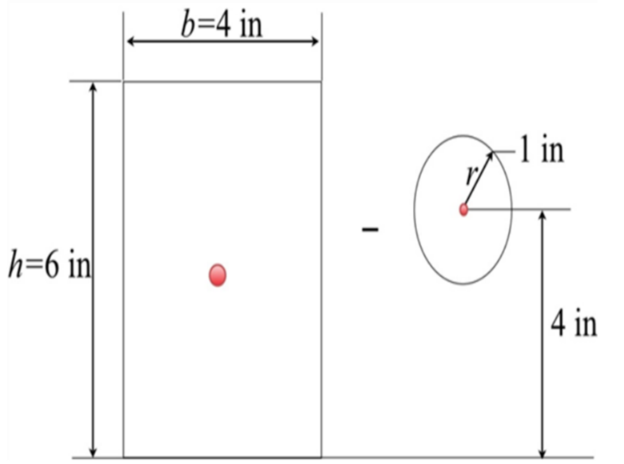
$$I_x = \left(\frac{1}{12}bh^3 + (bh)\left(d_{y,rec}\right)^2\right)$$

$$I_x = \left[\frac{1}{12}(4)(6)^3 + (4)(6)(3)^2\right]$$



$$\left(\frac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)\left(d_{y,circle}\right)^2\right)$$

$$\left[\frac{1}{4}\pi(1)^4 + \pi(1)^2(4)^2\right]$$



$$I_x = \left[\frac{1}{12}(4)(6)^3 + (4)(6)(3)^2\right] - \left[\frac{1}{4}\pi(1)^4 + \pi(1)^2(4)^2\right]$$
$$= 236.95\,\text{in}^4$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12}hb^3 + (bh)\left(d_{x,rec}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)\left(d_{x,circle}\right)^2\right)$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(6)(4)^3 + (4)(6)(2)^2\right] - \left[\frac{1}{4}\pi(1)^4 + \pi(1)^2(2)^2\right]$$
$$= 114.65\,\text{in}^4$$

قمنا بالطرح لأنه جسم مجوف اي يعني أنه لا يدخل في الحساب

$$\left(I_{xy}\right)_{rec} = 0 + (4\,\text{in}\times 6\,\text{in})(2\,\text{in})(3\,\text{in})$$
$$= 144\,\text{in}^4$$

بسبب التماثل , القيمة صفر

$$\left(I_{xy}\right)_{circle} = 0 + \pi(1\,\text{in})^2(2\,\text{in})(4\,\text{in})$$
$$= 25.13\,\text{in}^4$$

بسبب التماثل , القيمة صفر

$$I_{xy} = \left(I_{xy}\right)_{rec} - \left(I_{xy}\right)_{circle}$$
$$= 144\,\text{in}^4 - 25.13\,\text{in}^4$$
$$= 118.87\,\text{in}^4$$

$$O = \left[\frac{IX + IY}{2}\right]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\sqrt{(61.15)^2 + (118.87)^2}$$
$$= 133.67$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{\frac{I_x - I_y}{2}}$$

$$\tan 2\theta_p = \left(\frac{-118.87}{\left(\frac{236.95 - 114.65}{2}\right)}\right)$$

$$2\theta_p = -62.78°$$

$$\theta_{p1} = -31.4°$$

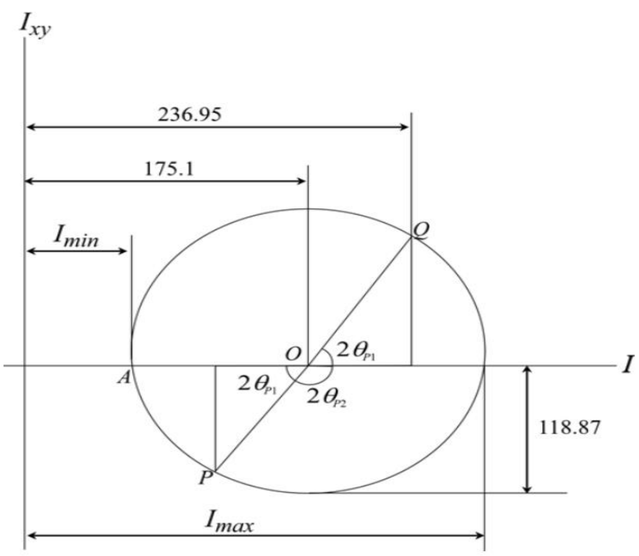
$$\theta_{P2} = 90° - 31.4°$$
$$= 58.6°$$

$$I_{\max,\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I^2_{xy}}$$

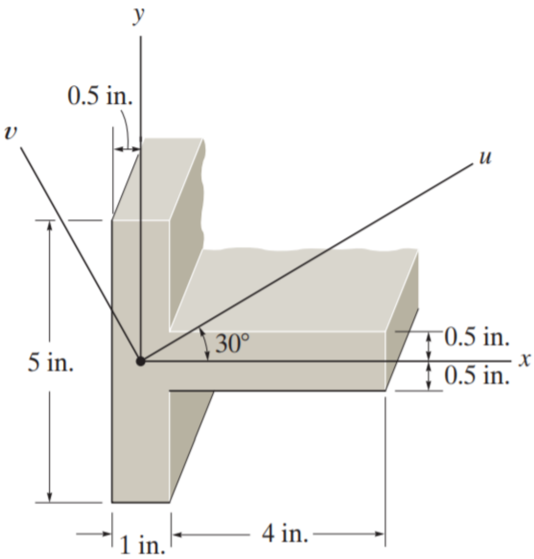
$$I_{\max,\min} = \frac{236.95 + 114.65}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{236.95 - 114.65}{2}\right)^2 + (118.87)^2}$$

$$I_{\max} = 309 \text{in}^4$$

$$I_{\min} = 42.1 \text{in}^4$$



- **Prop 10–63. Determine the moments of inertia of the shaded area with respect to the u and v axis ?**



$$I_X = 10.75$$
$$I_Y = 30.75$$
$$I_{XY} = 0$$

معطى في السؤال

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

$$I_u = \left(\frac{10.75 + 30.75}{2}\right) + \left(\frac{10.75 - 30.75}{2}\right)\cos(2 \times 30°) - 0$$
$$= 20.75 - 5$$
$$= 15.75 \text{in.}^4$$

$$I_v = \left(\frac{10.75 + 30.75}{2}\right) - \left(\frac{10.75 - 30.75}{2}\right)\cos(2 \times 30) + 0$$
$$= 20.75 - (-5) + 0$$
$$= 25.75 \text{in.}^4$$