إعداد :- عمر الخواجه
- رياضيات سنه اولى
0786160562

سنوات - ديف 1

فيرست

Note :- هذا العمل هو مجهود ما قبلي من أصحاب المجهود المبارك ..
ما قمت به هو تجميع الأسئلة في ملف واحد فقط
ليسهل على الطالب البحث عن سنوات المادة .. ♥

دعوة - لوالدي - ووالدتي
بالشفاء... وشكراً ...♥


oo!

سنوات ، دكاترة ، كتاب ، طلاب

#اسئلة - عفق

(اللهم لا سهلا الا ما جعلته سهلا ...... وأنت تجعل الحزن إذا شئت سهلا)

Q1:- if $\frac{dy}{dt} = \sin(t) \cdot y^2 \cdot e^{\cos(t)}$, $y(0) = 4e^{-1}$ find $y(\frac{\pi}{2})$?

Sol. $\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin t \, e^{\cos(t)} \cdot dt$ ....(*)

$u = \cos t \to \frac{du}{-\sin t} = dt$

$\int -e^u \cdot du = -e^u = -e^{\cos t}$

$\frac{-1}{y} = -e^{\cos t} + K$

but $y(0) = \frac{1}{4e} \Rightarrow -4e = -e + K \Rightarrow \boxed{K = -3e}$

so $y(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{-1}{y} = -e^0 - 3e$

$\frac{1}{y} = 1 + 3e \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{1+3e}}$ #

#Omar-Alkhawaja...

Q2: the equation $y' + p(x)y = \sin^2(x)$, $\mu(x) = \sin x$ find $p(x)$??

Sol. $\sin x = e^{\int p(x) \cdot dx}$ (نأخذ ln للطرفين) $\Rightarrow \ln(\sin x) = \int p(x) dx$

نشتق الآن $\Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = p(x) \Rightarrow \boxed{p(x) = \cot(x)}$

Q3:- $x M(x,y) - y N(x,y) = 0$ on the following is a sol. of
$M(x,y) \cdot dx + N(x,y) \cdot dy = 0$?

Sol. $\frac{x}{y} M(x,y) = N(x,y) \rightarrow$ نعوض بالمعادلة الأصلية $\Rightarrow M(x,y) \cdot dx + \frac{x}{y} M(x,y) \, dy = 0$

$\boxed{\div M(x,y)}$ $1 \cdot dx + \frac{x}{y} \cdot dy = 0 \Rightarrow -1 \cdot dx = \frac{x}{y} \cdot dy$

$\int \frac{-1}{x} \cdot dx = \int \frac{1}{y} \cdot dy \Rightarrow c - \ln|x| = \ln|y|$ $\boxed{\text{نرفع } e}$

$y = x^{-1} \cdot e^c \Rightarrow y = \frac{c'}{x}$; $\boxed{c' = e^c}$ #

Q_4 :- If $\dfrac{N(x,y) - M(x,y)}{M(x,y)} = y^2$ ---- (*)

then $\dfrac{M(x,y)}{x} \cdot dx - \dfrac{N(x,y)}{y} \cdot dy = 0$ ---- (**)

find the D.E ?

Sol. (*) $y^2 (M(x,y)) = N(x,y) - M(x,y) \Rightarrow \boxed{M(x,y)(y^2+1) = N(x,y)}$ (1)

(**) $\dfrac{M(x,y)}{x} \cdot dx - \dfrac{N(x,y)}{y} \cdot dy = 0$

from (1) $\Rightarrow \dfrac{M(x,y)}{x} \cdot dx - \dfrac{M(x,y)(y^2+1)}{y} \cdot dy = 0$ $\quad \div M(x,y)$

كل المعادلة

$\dfrac{1}{x} \cdot dx - \dfrac{y^2+1}{y} \cdot dy = 0 \Rightarrow \int \dfrac{1}{x} \cdot dx = \int \dfrac{y^2+1}{y} \cdot dy$

$\ln|x| + c = \dfrac{y^2}{2} + \ln|y|$ ... #

Q_5 :- find the equation :- (Solve) :- $2(1 + x + xy^2) y' - y = y^3$

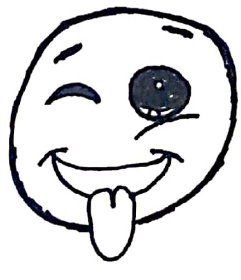
محلول ص 16 سؤال Q_{36}

Q_6 :- solve , $(3y^2 + 2xy) \cdot dy - (2x - y^2) \cdot dx = 0$; $y(1) = 1$ find $y(0)$?

Sol. $(y^2 - 2x) \cdot dx + (3y^2 + 2xy) \cdot dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$ is exact

#omar-Alkhawaj



$\int M(x,y) = \int y^2 - 2x \cdot dx$

$f(x,y) = y^2x - x^2 + g(y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = y^2x - x^2 + g(y)$

نشتق بالنسبة الى y

$3y^2 + \cancel{2xy} = 2y\cancel{x} + g'(y)$

$3y^2 = g'(y)$

$\boxed{g(y) = y^3}$

$C = y^2x - x^2 + y^3$

but $y(1) = 1 \rightarrow \boxed{C = 1}$

$\boxed{y(0) = 1}$ #

Q_7 :- Solve the I.V.P $\quad y^2 y' + \cos x \cdot y^3 = \cos x \; ; \; y(\frac{\pi}{2}) = 2$

$\underline{\text{Sol.}}$ $(\div y^2) \Rightarrow \quad y' + \cos x \cdot y = \dfrac{\cos x}{y^2}$

$y' + \cos x \cdot y = \cos x \; y^{-2} \longrightarrow$ bernoulli

$v = y^{1--2} = y^3 \Rightarrow v' = 3y^2 \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$3y^2 \left(y' + \cos x \cdot y = \cos x \; y^{-2} \right) \Rightarrow v' + 3\cos x \cdot v = 3\cos x$

$\underline{\text{Linear in } V}$

$\mu(x) = e^{\int 3\cos x \, dx} = \boxed{e^{3\sin x}}$

$v = \dfrac{1}{e^{3\sin x}} \cdot \left[c + \int e^{3\sin x} \cdot 3\cos x \, dx \right]$

$u = 3\sin x$

$\dfrac{du}{3\cos x} = dx$

$\int e^u \cdot du = e^u = \boxed{e^{3\sin x}}$

$v = \dfrac{1}{e^{3\sin x}} \cdot \left[c + e^{3\sin x} \right]$

but $y(\frac{\pi}{2}) = 2 \Rightarrow y^3 = e^{-3\sin x} \cdot \left[c + e^{3\sin x} \right]$

$8 = \dfrac{1}{e^3} \cdot \left[c + e^3 \right]$

$\dfrac{1}{e^3} c = 8 - 1 \Rightarrow \boxed{c = 7e^3}$ #

#Omar.AlKhawaja

Q_8 :- Solve : $\quad y\,dx + x\,dy + y^2 (x\,dy - y\,dx) = 0$?

$\underline{\text{Sol.}}$:- $y\,dx + x\,dy + y^2 x\,dy - y^3 dx$

$(x + y^2 x)\,dy + (y - y^3)\,dx = 0$

$y' = \dfrac{y^3 - y}{(x + xy^2)} \Rightarrow y' = \dfrac{y^3 - y}{x(1+y^2)}$

$\displaystyle\int \frac{1+y^2}{y^3 - y} dy = \int \frac{dx}{x}$

الفكرة بكل السؤال حل التكامل

$\circledast \displaystyle\int \frac{1+y^2}{y^3 - y} \cdot dy \Rightarrow \quad u = 1 + y^2$

$\dfrac{du}{2y} = dy$

$\displaystyle\int \frac{u}{2y^2(u-2)} \cdot du = \frac{1}{2} \int \frac{u}{(u-1)(u-2)} \cdot du$

$u = A(u-2) + B(u-1)$ $\quad$ $\underline{\text{partial fraction}}$

$u = 2 \Rightarrow B = 2$

$u = 1 \Rightarrow A = -1$

$= \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{-1}{u-1} + \frac{2}{u+2} \cdot du$

$= \dfrac{-1}{2} \ln|y^2| + \ln|y^2 - 1|$

equation :- $\dfrac{-1}{2} \ln|y^2| + \ln|y^2 - 1| = \ln|x| + c$

Q_9 :- $y' = x^3(y^2 + x^2 - 2xy) + \frac{2}{x}$; substitution is $u = y - x$, solve it ?

Sol. $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$

$u = y - x \Rightarrow y' = u' + 1$

$u' + 1 = x^3(u)^2 + \frac{y}{x}$ $\quad \Big|\ y = u + x$, $\frac{y}{x} = \frac{u}{x} + 1$

$u' + \cancel{1} = x^3(u)^2 + \frac{u}{x} + \cancel{1}$

$u' - \frac{1}{x}u = x^3 u^2$

Bernolli in u

$v = y^{1-2} = u^{-1} \Rightarrow v' = -u^{-2} \cdot u'$

$-u^{-2}(u' - \frac{1}{x}u) = -u^{-2}x^3u^2$

$v' + \frac{1}{x}v = -x^3$ linear in v

نكمل ونرجع قيم التعويض

Just ... ☺

$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{x}\left[c - \frac{x^5}{5}\right] \Rightarrow$ final answer

---

Q_{10} :- the general sol. D.E :- $xy' = y(\ln x + \ln y)$

Sol. $xy' = y\ln(xy)$

$v = xy$

$v' = xy' + y \Rightarrow \boxed{y' = \frac{v' - y}{x}}$, $\boxed{y = \frac{v}{x}}$

$v' = y(\ln(v) + 1)$

$v' = \frac{v}{x}(\ln(v) + 1)$

$\int \frac{dv}{v(\ln(v)+1)} = \int \frac{dx}{x}$

$\boxed{\ln(\ln(v) + 1) = \ln|x| + C}$ #

Q_{11} :- find the general sol. of the D.E :-

$(5y^2 - xy + y^3\sin y)y' + xy^3 = -y^2$

#Omar-AlKhawaja...

Sol. :- $(5y^2 - xy + y^3\sin y)\,dy + (xy^3 + y^2)\,dx = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 + 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -y$ non exact

⊛ $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{-y - 3xy^2 - 2y}{xy^3 + y^2} = \dfrac{-3(y + xy^2)}{y(xy^2 + y)} = \boxed{\frac{-3}{y}} \Rightarrow e^{\int \frac{-3}{y}\cdot dy} = \boxed{y^{-3}}$

$\boxed{\times\, y^{-3}} \Rightarrow \left(\frac{5}{y} - \frac{x}{y^2} + \sin y\right)\cdot dy + \left(x + \frac{1}{y}\right)\cdot dx = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-1}{y^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-1}{y^2}$ .... is exact ....→ نحلها exact de

Q12: Solve: $(1+x^2)\,dy - x(3+3x^2-y)\,dx = 0$

Sol.: $y'\left(\frac{1+x^2}{x}\right) = 3+3x^2-y \Rightarrow y'\left(\frac{1+x^2}{x}\right) = 3(1+x^2)-y$

$(\div\, 1+x^2) \Rightarrow \frac{y'}{x} = 3 - \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow \frac{y'}{x} + \frac{y}{1+x^2} = 3 \xrightarrow{(*x)} \underbrace{y' + \frac{x}{1+x^2}\cdot y = 3x}_{\text{Linear in } y}$

$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \boxed{\sqrt{1+x^2}}$

$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[c + \int \sqrt{1+x^2}\cdot 3x\,dx\right.$

$u = 1+x^2$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{2}\,du$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$

$= \boxed{u^{\frac{3}{2}}}$

$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[c + u^{\frac{3}{2}}\right]$

$y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[c + (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$ #

Q13: Solve: $x\,dy = (x^4y^2 - 2x^5y + x^6)\,dx + y\,dx$

use a substitution $u = y - x$?

#Omar-Alkhawaja..

Sol.

$xy' = (x^4y^2 - 2x^5y + x^6 + y)$

$y' = \left(x^3y^2 - 2x^4y + x^5 + \frac{y}{x}\right)$

$u = y - x \Rightarrow u' + 1 = y'$

$u' + 1 = x^3(u+x)^2 - 2x^4(u+x) + x^5 + \frac{u+x}{x}$

$u' + \cancel{1} = x^3(u^2+2xu+x^2) - 2x^4u \underline{- 2x^5 + x^5} + \frac{u}{x} + \cancel{1}$

$u' = u^2x^3 + \cancel{2x^4u} + \cancel{x^5} - \cancel{2x^4u} - \cancel{2x^5} + \cancel{x^5} + \frac{u}{x}$

$u' = u^2x^3 + \frac{u}{x}$

$u' - \frac{u}{x} = x^3u^2$ Bernolli

$v = u^{1-2} = u^{-1}$

$v' = -u^{-2}\cdot u'$

$-u^{-2}\left(u' - \frac{u}{x}\right) = -\cancel{u^{-2}}x^3\cancel{u^2}$

$v' + \frac{v}{x} = -x^3 \rightarrow$ Linear in v

$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = \boxed{x}$

$v = \frac{1}{x}\left[c + \int -x^4\,dx\right]$

$v = \frac{1}{x}\left[c - \frac{x^5}{5}\right]$ نرجع التعويض

$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{x}\left[c - \frac{x^5}{5}\right]$ #

Q_{14} : solve : $\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right)dx + \left(1 + x^2\cos(xy)\right)\cdot dy = 0$

Sol. :-

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos(xy) + -x^2y\sin(xy) + x\cos(xy)$$
$$= 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2\sin(xy)\cdot y$$

exact

$$\int N(x,y) = \int 1 + x^2\cos(xy)\cdot dy$$

$$f(x,y) = y + \frac{x^2\sin(xy)}{x} + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = M(x,y) = y + x\sin(xy) + g(x)$$

نشتق بالنسبة اى x

$$\cancel{\sin(xy)} + xy\cancel{\cos(xy)} = yx\cancel{\cos(xy)} + \cancel{\sin(xy)} + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$
$$g(x) = 0$$

so $\Rightarrow$ $C = y + x\sin(xy)$

#

(^◡^)

Q_{15} : If $M(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ is an I.F of the D.E :-

$y\cdot dx - (y^2 + x^2 + x)dy = 0$, find the general solution?

sol.

$$\left(\div \frac{1}{x^2+y^2}\right) \rightarrow \frac{y}{x^2+y^2}\cdot dx + \left(-1 - \frac{x}{y^2+x^2}\right)\cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x^2+y^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\left(\frac{y^2+x^2 - x(2x)}{(y^2+x^2)^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

is exact

$$\int M(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}\cdot dx$$

$$\int \frac{y}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)}\cdot dx$$

$u = \frac{x}{y}$

$y\,du = dx$

$$\int \frac{du}{u^2+1}$$

$\rightarrow \tan^{-1}(u)$

$$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = N(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$$

$$-1 - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2}+1} + g'(y)$$

$$-1 - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} + g'(y)$$

$$-1 - \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} = \cancel{\frac{-x}{x^2+y^2}} + g'(y)$$

$$g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y$$

$$\boxed{C = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - y}$$

#

Hamar- Alkhawaja...

Q16 :- Solve :- $(xy)\,dy - (x^2 + x\sqrt{x^2+y^2}).dx = 0$

Sol. homogenous (أسس كل الحدود متساوية)

$(\div x^2) \Rightarrow \frac{y}{x}\,dy = \left(1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}\right).dx \Rightarrow \frac{y}{x}dy = 1 + \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x)^2}}\,.dx$

let $u = \frac{y}{x} \rightarrow y' = u'.x + u \Rightarrow u(u'.x + u) = 1 + \sqrt{1+u^2}$

$u'.x + u = \frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} \rightarrow u' = \frac{\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u} - u}{x}$

$= \int \frac{u}{1-u^2+\sqrt{1+u^2}}.du = \int \frac{1}{x}.dx \rightarrow$ seperalbe

$\dots \rightarrow$ $\boxed{\text{نكمل بفرض } 1+u^2 = v}$

*Omar-Alkhawaja

Q17 :- An integrating factor:- $(3x^2+y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$, is ?

Sol. non-exact ... $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1-2xy+1}{x(xy-1)} = \frac{2(1-xy)}{x(\cancel{xy-1})} = \boxed{\frac{-2}{x}}$$

$\mu(x) = \text{integrating factor} = e^{\int \frac{-2}{x}.dx} = e^{-2\ln x} = \boxed{x^{-2}}$ #

Q18 :- The most general function $N(x,y)$ that makes the following D.E exact is given by ? $N(x,y)\,dy + (\sin x\cos y - xy - e^{xy})\,dx = 0$

Sol. exact so $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\sin x\sin y - x - xe^{xy}$

$= \int -\sin x\sin y - x - \underbrace{xe^{xy}}_{\text{اجزاء}}.dx = N x$

$= \cos x\sin y - \frac{x^2}{2} - \left(\frac{xe^{xy}}{y} - \frac{1}{y}.\frac{e^{yx}}{y}\right) + g(y)$

$= \cos x\sin y - \frac{x^2}{2} + \frac{e^{xy}}{y^2} + g(y)$

#

Q19 :- The general solution for the following exact D.E :-

$$(\sinh(x+y) + y^2 e^x).dx + (\sinh(x+y) + 2ye^x + 1).dy = 0 \text{ , is ?}$$

<u>Sol</u> <u>exact</u> so :-

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \cosh(x+y) + 2ye^x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \operatorname{cosch}(x+y) + 2ye^x \end{array}\right] \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \int M(x,y) = \int \sinh(x+y) + y^2 e^x \cdot dx$$

$$f(x,y) = \cosh(x+y) + y^2 e^x + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = \cosh(x+y) + y^2 e^x + g(y)$$

نشتق بالنسبة لـ $\underline{y}$

$$\cancel{\sinh(x+y)} + \cancel{2ye^x} + 1 = \cancel{\sinh(x+y)} + \cancel{2e^x y} + g'(y)$$

$$g'(y) = 1 \rightarrow \boxed{g(y) = y}$$

$$\underline{C = \cosh(x+y) + y^2 e^x + y} \quad \#$$

#Omar-AlKhawaja..

Q20 :- The relation $x^2 - \cos(x+y) = 3$ defines an implicit sol. of one of the following D.E , this D.E. is :-

a) $y' = 2\sec(x+y) - 1$

b) $y' = 2x\sin(x+y) - 1$

c) $y' = 2x\sec(x+y) - 1$

d) $y' = -2x\csc(x+y) - 1$

Sol. $x^2 - \cos(x+y) = 3 \longrightarrow$ <u>نشتق فقط</u> (هو اصلا الحلول لمعادلة معينة)

$$2x + \sin(x+y) \cdot (1 + y') = 0 \Rightarrow (1+y')\sin(x+y) = -2x$$

$$1 + y' = \frac{-2x}{\sin(x+y)} \Rightarrow \underline{y' = -2x\csc(x+y) - 1}$$

#

Q_{21}: Find the general solution to the D.E

$$(x+2y+1)\,dx + (3x+6y+2)\,dy = 0$$

Sol.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+2y+1)}{3(x+2y)+2} = G(x+2y)$$

$$u = x+2y \Rightarrow u' = 1+2y' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{u'-1}{2}}$$

$$\frac{u'-1}{2} = -\frac{(u+1)}{3u+2} \Rightarrow \frac{u'-1}{\cancel{2}} = \frac{-2u-2}{3u+2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2u-2}{3u+2} + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-2u-\cancel{2}+3u+\cancel{2}}{3u+2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{3u+2} \Rightarrow \int \frac{3\cancel{u}}{\cancel{u}} + \frac{u}{2}\,.du = \int 1.\,dx$$

$$3u + \frac{u^2}{4} = x + c \Rightarrow \boxed{3x+6y + \frac{(x+2y)^2}{4} = x+c}$$

هنا يعني ، وليس حال كان سؤال هو وارد نلعب بالسؤال
لايصاله الى شكل احد الحلول ... ب

Q_{22}: Solve the I.V.P $\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 y} + \frac{1}{x}y \;,\; y(0)=1 \;,\; x>0$?

Sol.
$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x\,y^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Bernolli}$$

$$u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{+\frac{1}{2}} \rightarrow \cancel{u^2 = y \rightarrow 2u\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}}$$

$$u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x\,y^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$u' - \frac{1}{2x}u = \frac{x}{2} \rightarrow \text{linear} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{2x}.dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln(2x)}$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x}}} \Rightarrow \quad u = \sqrt{2x}\cdot\left[c + \int \frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{x}{2}\,dx\right] \ldots$$

تكمل بسيطة ... ب

#Omar-AlKhawaja...

Q_{23} :- find the largest interval on which you are sure that the following initial value problem has a unique solution, Justify :- $\sqrt{x-1}\, y' + (\cos x) y = \csc x$; $y(2) = 3$?

Sol. :-
$$y' + \frac{\cos(x)}{\sqrt{x-1}}\, y = \frac{\csc x}{\sqrt{x-1}}$$

$\circledast$ $\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ $\circledast$ $\cos x \Rightarrow \mathbb{R}$

$\circledast$ $\csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \sin x = 0$
$x = \pi$, $x = 0$ $\Rightarrow (0,1)(1,\pi)(\pi, 2\pi$
$x = 2\pi$

Laregst Interval #

Largest interval $= (1, \pi)$

Q_{24} :- Given that $y_1(x) = \frac{1}{x}$ and $y_2(x) = \frac{1}{2x}$ are two solutions of the diff. eq. :- $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$, find solution ?

Sol. :-

second سؤال

مش مطلوب منا بالفيرست

لأنه مشتقة ثانية مش اولى..

Q_{25}: Cosider the I.V.P : $y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0$, $y(2) = 1$

non-exact

(a) find the Integrating factor of the differential equation

(b) Solve the initial value problem

(C) is there another method to solve this D.E (other than method you have used), Justify ?

Sol.

(a) ⊛ $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{1 - -1}{(y^2 - x)} \quad \propto$

⊛ $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{-1-1}{y} = \boxed{\dfrac{-2}{y}} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{-2}{y}\,dy}$

$$\boxed{\mu(y) = \frac{1}{y^2}}$$

#omar-AlKhawaja ...

(b) $\dfrac{1}{y^2}\left[y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0\right] \Rightarrow \dfrac{1}{y}\,dx + \left(1 - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{-1}{y^2}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{-1}{y^2}$ exact

كمل حل على exact

(C)

Q25 :- using a suitable substitution transform the D.E $(\cos y)\, y' + x(\sin y) = 3$ into a linear equation?

Sol. في السؤال طلب ادي linear equation عن طريق تعويض -- ركز ما تستعجل

بس نبو مطلع ال Linear...

$$y' + x \tan y = \frac{3}{\cos y}$$

let $u = \sin y$

$\frac{du}{dx} = \cos y \, y'$

$$\frac{u'}{\cos y} + \frac{x\, u}{\cos y} = \frac{3}{\cos y}$$

$(\times \cos y) \Rightarrow u' + x u = 3$ ... it is Linear #

Q27 :- consider the non-exact D.E $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$ ... ⊛

if $\frac{P_y - Q_x}{P} = 3$, find an Integrating facto to ⊛ ?

Sol. $\frac{P_y - Q_x}{P} = 3 \Rightarrow$ نضرب بسالب مشترك لتحقق الحل

$$\underbrace{\frac{Q_x - P_y}{P} = -3}$$

$$\mu(y) = e^{\int -3 \cdot dy}$$

$$\mu(y) = \boxed{e^{-3y}}$$

Just

Q28 :- If you know $\left(u = \frac{dy}{dx}\right)$, find the value (A) in $\left(u = A\sqrt[3]{y}\right)$,

use I.V.P, $y(0) = 0$, $y(3) = 8$ ... ?

Sol. $u = \frac{dy}{dx} = A\sqrt[3]{y} \Rightarrow y' = A y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \int dy\, y^{-\frac{1}{3}} = \int A\, dx$

$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = Ax + C \longrightarrow y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\boxed{\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = Ax}$

$\boxed{y(3) = 8} \Rightarrow \boxed{A = 2}$ #

#Omar-AlKhawaja

Q29 :- solve :- $e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x} y = x^2$

مهم فكرة حلوة

Sol. $\cancel{d(e^{2x}y) = x^2}$ $e^{2x} dy + 2e^{2x} y\, dx = x^2 \cdot dx$

$d(e^{2x} y) = x^2 dx \xrightarrow{\text{تكامل}} \boxed{e^{2x} y = \frac{x^3}{3} + C}$ #

you complete me..

Q_{30} :- solve :: $(1+2xy-x^2y^2).dx + x^2.dy = 0$

Q_{31} :- If $\dfrac{M(x,y)-N(x,y)}{N(x,y)} = x$, then the sol. to the D.E

$$\frac{M(x,y)}{x}.dx - \frac{N(x,y)}{y}.dy = 0 \quad , \quad x,y > 0 \quad ?$$

sol. $M(x,y) - N(x,y) - N(x,y).x = 0$

$M(x,y) - N(x,y)(1+x) = 0 \Rightarrow \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} = 1+x$

$\boxed{\div N(x,y)} \Rightarrow \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)\,x}.dx - \dfrac{1}{y}.dy = 0$

but $\frac{M}{y} = 1+x \Rightarrow \int \frac{(1+x)}{x}.dx = \int \frac{1}{y}.dy$

$$\boxed{\ln|x| + x + C = \ln|y|} \ \#$$

#Omar-Alkhawaja...

Q_{32} :- The values of m, n that make the D.E

$$2\sqrt{x}\,(x-2y)^m.dx - (x^3 - 2n - 5).dy = 0$$

homogeneous are ?

Sol. :- homo $\longrightarrow$ يعني قوس لازم تكون متساوية

$$\underbrace{2\cancel{x}^{\frac{1}{2}}(x-2y)^m}_{\text{يجب أس} = 3}.dx = (\underbrace{x^3}_{\text{الأس} = 3}\underbrace{-2n-5}).dy$$

يجب أن تكون = صفر (عدد بدون متغيرات)

$\frac{1}{2} + m = 3$

$\boxed{m = \frac{5}{2}}$

$-2n - 5 = 0$

$-2n = 5 \Rightarrow \boxed{n = -\frac{5}{2}}$

Q33:- The solution of the D.E. $y' = \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{(a+b)^2 \text{ تحليل قاعدة}} - 1$

Sol. $y' = (x+y)^2 - 1$

$v = x + y$

$v' = 1 + y'$

$\boxed{y' = v' - 1}$ $\Rightarrow$ $v' - \cancel{1} = v^2 - \cancel{1}$

$\int \frac{dv}{v^2} = \int dx$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{v} = x + c$

$\boxed{\frac{-1}{x+y} = x + c}$ #

Q34:- for what the value of (K) is $(x^2+y^2)^K$ an integrating factor for $-y\,dx + x\,dy = 0$?

Sol. يعني السؤال بدو قيمة K وتجعلك انو $(x^2+y^2)^K$ هو I.F

$\boxed{*(x^2+y^2)^K} \Rightarrow -(x^2+y^2)^K y \cdot dx + x(x^2+y^2)^K \cdot dy = 0 \ldots$ لازم يصير Exact

$M_y = -K(x^2+y^2)^{K-1} \cdot 2y \cdot y - (x^2+y^2)^K \Rightarrow -K2y^2(x^2+y^2)^{K-1} - (x^2+y^2)^K$

$N_x = K(x^2+y^2)^{K-1} \cdot 2x \cdot x + (x^2+y^2)^K \Rightarrow 2Kx^2(x^2+y^2)^{K-1} + (x^2+y^2)^K$

$$M_y = N_x$$

$$-2Ky^2(x^2+y^2)^{K-1} - (x^2+y^2)^K = 2Kx^2(x^2+y^2)^{K-1} + (x^2+y^2)^K$$

$$\cancel{2}(x^2+y^2)^K + \cancel{2}Kx^2(x^2+y^2)^{K-1} + \cancel{2}Ky^2(x^2+y^2)^{K-1} = 0 \quad \boxed{\div 2}$$

$$(x^2+y^2)^K\left(1 + \frac{Kx^2+Ky^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \quad (\div)(x^2+y^2)^K$$

$$1 + \frac{K\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}} = 0 \Rightarrow 1 + K = 0$$

$$\boxed{K = -1}$$ #

سؤال مرتب ولذيذ

#Omar_Alkhawaja...

Q_{35}: show that if y_1, y_2 are solution of the linear equation of order (n), $L[y]=0$, then $c_1y_1+c_2y_2$ where $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, is also of $L[y]=0$

سؤال دكتور أمير ← مش سنوات ← بس سؤال حلو على التعريف

Sol. هذا السؤال نلاحظ انو y_1, y_2 حلول شو يعني يعني؟

لأنهم حلول $L[y_1] + L[y_2] = 0$ ⟸ يعني

$$L[y_1] = a_n(x)\, y_1^{(n)} + \dots + a_1(x)\, y_1' = 0$$
$$L[y_2] = a_n(x)\, y_2^{(n)} + \dots + a_1(x)\, y_2' = 0$$

من تعريف Linear Homo

$$\boxed{L[y] = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y'}$$

So $L[c_1y_1 + c_2y_2]$

$$= a_n(x)\left(c_1y_1+c_2y_2\right)^{(n)} + a_{n-1}(x)\left(c_1y_1+c_2y_2\right)^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\left(c_1y_1+c_2y_2\right)'$$

(المشتقة توزع على الجمع والطرح ويضرب الثابت الـ الخارج)

$$= a_n(x)\left(c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}\right) + a_{n-1}(x)\left(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)}\right) + \dots + a_1(x)\left(c_1y_1' + c_2y_2'\right)$$

نجمع الحدود وإخراج المعامل إلى الخارج

$$= c_1a_n(x)y_1^{(n)} + c_1a_{(n-1)}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + c_1a_1(x)y_1' \oplus$$
$$c_2a_n(x)y_2^{(n)} + c_2a_{(n-1)}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + c_2a_1(x)y_2'$$

نسحب c_1 عامل مشترك و c_2 أيضاً

$$= c_1\underbrace{\left[a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_1'\right]}_{L[y_1]} \oplus c_2\underbrace{\left[a_n(x)y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y_2'\right]}_{L[y_2]}$$

$$= c_1[Ly_1] + c_2L[y_2]$$

but $L[y_1], L[y_2] = 0$ لأنهم حلول

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0$$
$$= \boxed{0} \quad \#$$

#Omar-AlKhawaja

Q36 :- find the general solution to the D.E :-

$$-2(1+x+xy^2)y' - y = y^3$$

Sol. :-
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+y}{-2(1+x+xy^2)} \longrightarrow \text{لكي نحصل على اختصار نقلب}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2-2x(1+y^2)}{y(1+y^2)} \longrightarrow \text{نوزع}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{y(1+y^2)} - \frac{2x\cancel{(1+y^2)}}{y\cancel{(1+y^2)}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{y(1+y^2)} - \frac{2x}{y}$$

$$x' + \frac{2}{y}x = \frac{-2}{y(1+y^2)} \qquad \text{linear in } x$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{2\ln y} = \boxed{y^2}$$

$$x = y^{-2}\left[c + \int y^2 \cdot \frac{-2}{(1+y^2)y}\,dy\right] \ldots$$ نكمل بحل التكامل

Q37 :- find the largest interval for which the I.V.P : $y' + \frac{y}{x\ln(e^x-3)} = x$, $y(\ln\frac{3}{2}) = 4$ has a unique ?

Pikachu

Sol. $x(\ln(e^x-3)) = 0$

$\boxed{x=0}$ $\qquad \ln(e^x-3) = 0$

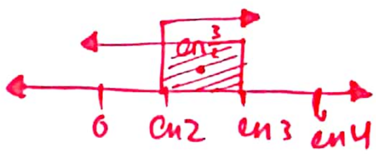
$e^x - 3 = 1 \Rightarrow e^x = 4$

$\boxed{x = \ln 4}$

$y(\ln\frac{3}{2}) = 4$

$\ln \neq 1 \begin{cases} e^x-3 = 1 \Rightarrow x = \ln 4 \\ e^x - 3 = -1 \Rightarrow x = \ln 2 \end{cases}$

$\ln > 0 \rightarrow e^x - 3 > 0 \Rightarrow x > \ln 3$



largest interval $(\ln 2, \ln\frac{3}{2})$

#Omar_AlKhawaja...

Q_{38} :- Consider the D.E: $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$

if $(M_y)^2 - (N_x)^2 = \cos(x)\,(M_y + N_x)\,N(x,y)$

and $\cos x > 0$, $(M_y + N_x) \neq 0$, find the

integrating factor of the D.E ?

Sol.:- $(M_y - N_x)(M_y + N_x) = \cos(x)\,(M_y + N_x)\,N(x,y)$

$$\frac{(M_y - N_x)\cancel{(M_y + N_x)}}{N(x,y)\cancel{(M_y + N_x)}} = \cos(x)\,\frac{\cancel{(M_y + N_x)}\,\cancel{N(x,y)}}{\cancel{(M_y + N_x)}\,\cancel{N(x,y)}}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N(x,y)} = \cos(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}.dx} = e^{\int \cos x . dx} = \boxed{e^{\sin x}}$$ this is I.F

Q_{39} :- The suitable substitution that transforms the D.E :-

$y e^{xy} \frac{dx}{dy} + x e^{xy} = 12y^2$, $x,y > 0$, into a seperable

equation is :- ?

Sol.:- let $v = e^{xy} \Rightarrow \ln v = xy \Rightarrow x = \frac{\ln v}{y}$

$$x' = \frac{y\frac{v'}{v} - \ln v}{y^2}$$

#Omar.Alkhawaja

$$y v . x' + \frac{\ln v}{y}.v = 12y^2 \Rightarrow y.\cancel{v}\left(\frac{y v' - v\ln v}{\cancel{v}\,y^2}\right) + \frac{\ln v}{y}.v = 12y^2$$

$$\frac{y v'}{y} - \cancel{\frac{v \ln v}{y}} + \cancel{\frac{\ln v}{y}.v} = 12y^2$$

$v' = 12y^2 \Rightarrow 1.dv = 12y^2.dy$ seperable ...

Q40 :- $\dfrac{M(x,y) - N(x,y)}{N(x,y)} = x$, than the solution to the D.E :- $\dfrac{M(x,y)}{x} \cdot dx - \dfrac{N(x,y)}{y} \cdot dy = 0$, $x, y > 0$ is?

sol. $\dfrac{M(x,y)}{x} \cdot dx = \dfrac{N(x,y)}{y} \cdot dy$

$$\boxed{\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad \text{---} \; (*)$$

من المعادلة الأولى

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} - \cancel{\frac{N(x,y)}{N(x,y)}} = x$$

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = x + 1$$

from $(*)$ $\quad x + 1 = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$\int 1 + \frac{1}{x} \cdot dx = \int \frac{1}{y} \cdot dy$$

$$\boxed{x + \ln|x| + c = \ln|y|} \; \#$$

Q41 :- Classify each of the following equations as to :- seperable , homo , exact , linear and Bernoulli ?

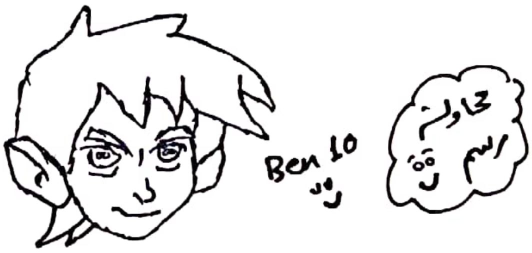
[1] $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 + x - y^2 - 1}{yx^2 + 2y - 3x^2 - 6}$

Sol. :- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(y^2+1) - (y^2+1)}{y(x^2+2) - 3(x^2+2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)(x-1)}{(x^2+2)(y-3)}$$

$$\frac{(y-3)dy}{y^2+1} = \frac{(x-1)}{x^2+2} \cdot dx$$

seperable



[2] $y' = \dfrac{1}{x(x-y)}$

Sol. :- $x' = x(x-y) \Rightarrow x' = x^2 - xy \Rightarrow x' + yx = x^2$

Bernoulli

[3] $y' - 5y = 4 + y^2$

sol. $y' = y^2 + 5y + 4$

$y' = (y+1)(y+4)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(y+1)(y+4)} = \int 1 \cdot dx$$

seperable

[4] $x' = \dfrac{\left(\frac{1}{y} + x\ln y\right)}{e^{-xy} - y\ln y}$

Sol. :

مش من ضمن المطلوب معنا ..... ايا ما صبوا
علامتو للكل ...

[5] $(1+x^2)\cdot dy + (xy + x^3 + x)\cdot dx = 0$

Sol. $y' = -\left(\dfrac{xy + x(x^2+1)}{(1+x^2)}\right) \rightarrow y' = \dfrac{-xy}{x^2+1} - \dfrac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}$

$y' + \dfrac{x}{x^2+1}\,y = -x$ linear #

Q42 :- solve : $y' = \dfrac{2x + \cos y}{x\sin(y) + 2y + 1}$

Sol. :

$(\underbrace{x\sin(y) + 2y + 1}_{N})\,dy + (\underbrace{-2x - \cos y}_{M})\cdot dx = 0$

$\left.\begin{array}{l} M_y = \sin y \\ N_x = \sin y \end{array}\right\} \rightarrow$ exact

$\int M(x,y) = \int -2x - \cos y \cdot dx$

$f(x,y) = -x^2 - \cos y\cdot(x) + g(y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = -x^2 - \cos(y)\cdot x + g(y)$ نشتق بالن. الى y

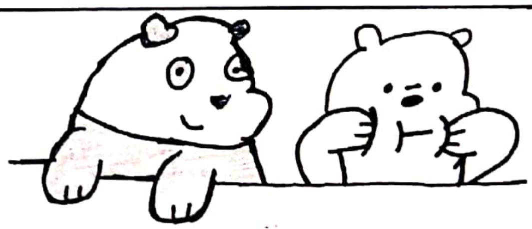
$x\sin(y) + 2y + 1 = x\sin(y) + g'(y)$

$2y + 1 = g'(y) \rightarrow \boxed{g(y) = y^2 + y}$

$f(x,y) = \boxed{C = -x^2 - \cos(y)\cdot x + y^2 + y}$ #

سنوي

Q43 :- find the Integrating factor of the differential equation
$(yx^3 + 2x^4 - 4y)\,dx + (x^4 + 2x)\,dy = 0$



#Omar- AlKhawaja...

Sol. $\left.\begin{array}{l} M_y = x^3 - 4 \\ N_x = 4x^3 + 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ non-exact

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{x^3 - 4 - 4x^3 - 2}{x^4 + 2x} = \dfrac{-3x^3 - 6}{x(x^3+2)} = \dfrac{-3\cancel{(x^3+2)}}{x\cancel{(x^3+2)}} = \dfrac{-3}{x}$

$\mu(x) = I.F = e^{\int \frac{-3}{x}\cdot dx} = x^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{x^3}}$ #

(معاود) Q_{44} :- using a suitable substitution to transform the D.E: $(2x-2)\,dy-(2x+y)\,dx=-y\cdot dy$ into a separable equ. , the resulting equation is given by:

sol.

$(2x-2)\,dy+y\,dy-(2x+y)\,dx=0$

$(2x-2+y)\cdot dy-(2x+y)\cdot dx=0$

$\left.\begin{array}{l} u=2x+y \\ u'=2+y' \end{array}\right\} y'=u'-2$

$(u-2)\cdot\dfrac{dy}{dx}-u=0$

$(u-2)(u'-2)=u$

$(u-2)u'-2u+4-u=0$

$\boxed{(u-2)u'-3u=-4}$ هذا المطلوب بالفوداره

(معاود) Q_{45} :- let $y(x)$ the solution for the D.E $(y-xe^{x})\cdot dx+(x+2)\cdot dy=0$; $x>-2$, with $y(1)=3$, find $y(0)=??$

#Omar -Alk hawaja

sol.

$\left.\begin{array}{l} M_y=1 \\ N_x=1 \end{array}\right]$ exact $\Rightarrow$ $\int N(x,y)=\int x+2\;.dy$

$f(x,y)=xy+2y+g(x)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=M(x,y)=xy+2y+g(x)$

نشتق بالنسبة لـ x

$\cancel{y}-xe^{x}=\cancel{y}+g'(x)$

$-xe^{x}=g'(x)\Rightarrow g(x)=-xe^{x}+e^{x}$

عن طريق الاجزاء

$c=xy+2y-xe^{x}+e^{x}$ but $y(1)=3$

$c=3+6-\cancel{e}+\cancel{e}$

$\boxed{c=9}$

$y(0)=\;9=0+2y-0+1$

$9=2y+1\Rightarrow\boxed{y=4}$

(يمكن حله طريقة أخرى عن طريق Linear)

(معاود) Q_{46} :- The best substitution to transform the D.E :- $(x^{3}-yx^{2})y'+x=0$ into a linear equ. is given by ?

sol. $y'+\dfrac{x}{x^{3}-yx^{2}}=0\Rightarrow x'+\dfrac{x^{3}-yx^{2}}{x}=0$

$x'-yx=-x^{2}\Rightarrow$

bernoulli in x

$u=x^{1-2}\Rightarrow\boxed{u=\dfrac{1}{x}}$

ضع دائرة هنا الجواب

للعودة Q47 :- let $y(x)$ be the solution for the D.E :-

$y \cdot dx + (xy - 2y^2) dy = 0$, if $y\left(\frac{1}{e}\right) = 1$, then at $x = -2$, the value of y will satisfy = ?

Sol.

$$\frac{dx}{dy} + \frac{xy - 2y^2}{y} = 0$$

$$x' + x = 2y$$

$$M(y) = e^{\int 1 \cdot dy} = \boxed{e^y}$$

$$x = e^{-y}\left[c + \int e^y \cdot 2y \cdot dy\right]$$

ولا اجراءات....

$$x = \frac{c}{e^y} + 2(y-1)$$ but $y\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

$$\frac{1}{e} = \frac{c}{e} + 0 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$\boxed{x = -2}$ y ??

$$-2 = \frac{1}{e^y} + 2(y-1)$$

$$\cancel{-2} = \frac{1}{e^y} + 2y \cancel{-2}$$

$$-2y = \frac{1}{e^y} \xrightarrow{\times e^y} -2ye^y = 1 \Rightarrow \boxed{ye^y = -\frac{1}{2}}$$

ضع دائرة، هذا الجواب

للعودة Q48 :- when using the substitution $u = yx$ in the D.E

سؤال زنخ !

$(x^3y^2 + x^2y + x) \cdot dy + y(1 + xy) dx = 0$, the resulting differ. equation will be : ?

Sol. :-

$$\frac{x^2y(xy+1) + x}{y(1+xy)} + \frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{x^2\cancel{y}(\cancel{xy+1})}{\cancel{y}(\cancel{1+xy})} + \frac{x}{y(1+xy)} + x' = 0$$

$$x^2 + \frac{x}{y(1+xy)} + x' = 0$$

$$u = yx \Rightarrow x = \frac{u}{y} \Rightarrow x' = \frac{yu' - u}{y^2}$$

$$\frac{u^2}{y^2} + \frac{u}{y^2(1+u)} + \frac{\cancel{y}u'}{y^{\cancel{2}}} - \frac{u}{y^2} = 0$$

$$\frac{u^2}{y^2} + \frac{u}{y^2(1+u)} + \frac{u'}{y} - \frac{u}{y^2} = 0$$

$$\frac{(u^2-u)}{y^2} + \frac{u}{y^2(1+u)} + \frac{u'}{y} = 0$$

$$(\times y) \Rightarrow \frac{(u^2-u)\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}} + \frac{u\,\cancel{y}}{y^{\cancel{2}}(1+u)} + u' = 0$$

$$\frac{u^2-u}{y} + \frac{u}{y(1+u)} + u' = 0$$

تقليب

$$\frac{y}{u^2-u} + \frac{y(1+u)}{u} + y' = 0$$

$$\boxed{-y\left(\frac{1}{u^2-u} + \frac{(1+u)}{u}\right) = y'}$$

seperable

سؤال ضع دائرة ← لاحظ نبحث عن الشبيه

Q49 :- using a suitable substitution to tranform the D.E :- $y\,dx + (x+\sqrt{xy})\,dy = 0$ into seperable equation the resulting D.E will be :- (السود)

Sol. $\boxed{\div x}$ $\quad \frac{y}{x} + \left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)y' = 0$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = x.u' + u$$

$$u + (1+\sqrt{u})(x.u' + u) = 0$$

$$\underbrace{\cancel{u} + x.u' + \sqrt{u}\,x.u' + \cancel{u}}_{2u} + \sqrt{u}\,u = 0$$

$$2u + x.u' + \sqrt{u}\,x.u' + \sqrt{u}\,u = 0$$

$$2u + x.u'(1+\sqrt{u}) + \sqrt{u}\,u = 0$$

$$x.u' = -\frac{(2u - \sqrt{u}\,u)}{(\sqrt{u}+1)}$$

seperable

#Omar-Alkhawaja..

Q50 :- find the value of K such that the substitution $u = \frac{y}{x^K}$ tranform the D.E : $(y^2+3x^4).dx + 5xy.dy = 0$ into a sep. equ. ? (السود)

Sol. $y = u.x^K \Rightarrow y' = Kux^{K-1} + u'x^K$

$$y' + \frac{y^2+3x^4}{5xy} = 0$$

$$Kux^{K-1} + u'x^K + \frac{u^2x^{2K}+3x^4}{5x^{K+1}u} = 0$$

$$u'x^K + \frac{u^2x^{2K}+3x^4}{5x^{K+1}u} + \frac{Kux^{K-1}.5ux^{K+1}}{5x^{K+1}.u} = 0$$

$$u'x^K + \frac{u^2x^{2K}+3x^4+5Kx^{2K}u^2}{5x^{K+1}u} = 0$$

$$u'x^K + \frac{x^{2K}(u^2+5Ku^2)+3x^4}{5x^{K+1}u} = 0$$

السؤال ذكر انوا seperable أي بمعنى منفصل يجب أن نفذ X عامل مشترك لكي يتم الفصل بين X, u أي يجب أن يكون نفس الأس لكي يصبح عامل مشترك ...؟

$$x^{2K} = x^4 \quad \text{يعني}$$

$$2K = 4 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

سؤال جيد صح؟ ^^

this is life ...♥

إن الذي يرتجي شيئاً بهمته يلقاه ولو حاربته الانس والجن...

فاقصد الى قمم الأشياء تدركها تجري الرياح كما رادت لها السفن...!

#Omar-Alkhawaja...

Scanned by CamScanner

Q_{51}: find the general solution to the D.E

سعود

$$(\sin(2x) + 2\ln y)\,dx + \left(\frac{2x}{y} + ye^y\right)dy = 0$$

Sol.

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \frac{2}{y} \\ N_x &= \frac{2}{y} \end{aligned}\right] \to \text{is exact}$$

$$f(x,y) = \int \sin 2x + \ln y \, dx$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2x\ln y + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2x\ln y + g(y)$$

dy نشتق

$$\cancel{\frac{2x}{y}} + ye^y = \cancel{\frac{2x}{y}} + g'(y)$$

$$g'(y) = ye^y$$

$$g(y) = ye^y - e^y$$

$$C = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2x\ln y + ye^y - e^y$$

#

#Omar. AlKhawaja...

Q_{52}: solve $(xy^2 - y^2 - x + 1)y' + y + x + xy = -1$, $y \neq -1$

سعود

Sol.

$$y' = \frac{-y - x - xy - 1}{xy^2 - y^2 - x + 1}$$

$$y' = \frac{-y(1+x) - (x+1)}{y^2(x-1) - (x-1)}$$

$$y' = \frac{-(y+1)(x+1)}{(y^2-1)(x-1)}$$

$$y' = \frac{-\cancel{(y+1)}(x+1)}{(y-1)\cancel{(y+1)}(x-1)}$$

seperable

حل مبدأ فصل

Q_{53}: find a suiable substitution to transform the D.E $\dfrac{y'}{1+4y^2} + \dfrac{x^2\tan^{-1}(2y)}{x+1} = \dfrac{1}{x}$ into alinear equ. , the find the resulting linear eq. (don't solve the equ.) ?

سعود

Sol.

$$\frac{y'}{(1+4y^2)} + \frac{x^2\tan^{-1}(2y)}{x+1} = \frac{1}{x}$$

$$v = \tan^{-1}(2y)$$

$$v' = \frac{2y'}{1+4y^2} \Rightarrow y' = v'\frac{(1+4y^2)}{2}$$

$$\frac{v'\cancel{(1+4y^2)}}{\cancel{(1+4y^2)}\,2} + \frac{x^2 v}{x+1} = \frac{1}{x}$$

$$v' + \frac{2x^2}{x+1}v = \frac{2}{x}$$

linear in $\underline{v}$

هكذا الحل فقط * لاحظ هو طالب بالسؤال لا تحل المعادلة..

Q_{54}: If $\mu(x) = e^{h(x)}$ is internating factor of the liner D.E :-

المعود

$x\frac{dy}{dx} - h(x)y = \sin(x) - x^2 y$, then the function $h(x)$ is given by ?

Sol:

$$y' + \frac{(x^2 - h(x))y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\mu(x) = e^{h(x)} = e^{\int \frac{x^2 - h(x)}{x} \cdot dx}$$

$$h(x) = \int x - \frac{h(x)}{x} \cdot dx$$

لايوجد اي معلومة عن h(x) لذلك نشتق الطرفين

(تنو تكامل h(x) ما بعرف) عشان هيك

اشتقت الطرفين

$$h'(x) = x - \frac{h(x)}{x}$$

$$h'(x) + \frac{1}{x} h(x) = x$$ linear in h(x)

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} \cdot dx} = \boxed{x}$$

$$h(x) = \frac{1}{x}\left[c + \int x \cdot x \cdot dx\right]$$

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{x}\left[c + \frac{x^3}{3}\right]} \#$$

سؤال فخم جداً ...

Q_{55}: $ye^{\frac{x}{y}} \cdot dx - (xe^{\frac{x}{y}} - 3y^2)dy = 0$, $y \neq 0$

المعود

, is it possible to solve the equ. using the substitution $u = \frac{x}{y}$ if yes find the general solution , if No find another method ?

solve:- $ye^{\frac{x}{y}} = (xe^{\frac{x}{y}} - 3y^2)y' \Rightarrow y' = \frac{ye^{\frac{x}{y}}}{xe^{\frac{x}{y}} - 3y^2}$

$$x' = \frac{x\cancel{e^{x/y}}}{y\cancel{e^{x/y}}} - \frac{+3y^2}{ye^{x/y}} \Rightarrow x' = \frac{x}{y} - \frac{3y}{e^{\frac{x}{y}}} \Rightarrow u = \frac{x}{y} \Rightarrow x' = u'y + u$$

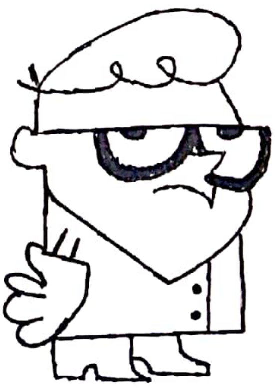
$$u' \cdot y + \cancel{u} = \cancel{u} - \frac{3y}{e^u}$$

$$u' \cdot y = \frac{-3y}{e^u} \Rightarrow \int e^u \cdot du = \int \frac{-3\cancel{y}}{\cancel{y}} dy$$

$$e^u = -3y + c$$

$$\boxed{e^{\frac{x}{y}} = -3y + c} \#$$

homogeneous



ops!

Diff #

#$..#

Q_{56} :- find the values of α and β that make the

D.E: $\left(\frac{1}{x+2}+\frac{\alpha}{y}\right).dx+\left(xy^{3\beta}+1\right).dy=0$

an exact ?

Sol. exact so $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-\alpha}{y^2}$

$\frac{\partial N}{\partial x}=y^{3\beta}$

$-\alpha y^{-2}=y^{3\beta}$

$-\alpha=1 \Rightarrow \boxed{\alpha=-1}$

$-2=3\beta$

$\boxed{\beta=\frac{-2}{3}}$

#

Q_{57} :- Solve $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right).dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right).dy=0$

Hint: Try an I.F of the form $\mu(x,y)=ye^{x}$

Sol. $ye^{x}\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right).dx$

$+\ ye^{x}\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right).dy=0$

$(e^{x}\sin y-2y\sin x)dx+(e^{x}\cos y+2\cos x)dy=0$

$M_y=e^{x}\cos y-2\sin x$

$N_x=e^{x}\cos y-2\sin x$

exact

$\int\frac{\partial f}{\partial y}.dy=\int e^{x}\cos y+2\cos x\ .dy$

$f(x,y)=e^{x}\sin y+2\cos x.y+g(x)$

$M(x,y)=e^{x}\sin y+2\cos x\cdot y+g(x)$

$\cancel{e^{x}\sin y}-2y\sin x=\cancel{e^{x}\sin y}-2y\sin x+g'(x)$

$\boxed{0=g'(x)}$ .... كمل

Q_{58} :- Solve the following I.V.P :

(A) $y^2y'+\cos(t)\,y^3=\cos t$

, $y(\frac{\pi}{2})=2$

كمل التمارين

(B) $xyy'=x^2e^{\frac{y}{x}}+y^2$, $y(1)=2$

Sol. ⇒ $\div xy$

$y'=\frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

let $u=\frac{y}{x}$ ... نكمل بيها كثير

#Omar_Alkhawaja ..

Sol: $y^2 y' + \cos t\, y^3 = \cos t$

$y' + \cos(t)\, y = \cos t\; y^{-2}$

Bernoulli

$V = y^{1-(-2)} = y^3 \Rightarrow V' = 3y^2 y'$

$3y^2\left(y' + \cos(t)\, y = \cos(t)\, y^{-2}\right)$

$V' + 3\cos(t)\, V = 3\cos(t)$ — linear in V

$\mu(t) = e^{\int 3\cos t} = \boxed{e^{3\sin t}}$

$V = e^{-3\sin t}\left[c + \int e^{3\sin t} \cdot 3\cos t \, dt\right]$

$u = 3\sin t$, $\frac{du}{3\cos t} = dt$ $\Rightarrow \int e^u \cdot 3\cos t \frac{du}{3\cos t} = e^u = \boxed{e^{3\sin t}}$

$V = e^{-3\sin t}\left[c + e^{3\sin t}\right]$

$y^3 = e^{-3\sin t}\left[c + e^{3\sin t}\right]$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{c = 7e^3}$

نكتب الحل النهائي ... #

Q59 :- find general solution for $e^y y' - \frac{e^{-x}}{x^2 + xy} + e^y = 0$

صعب

Sol. $y' - \frac{1}{x(x+y)\, e^{x+y}} + 1 = 0$

$u = x + y$

$u' = 1 + y'$

$\boxed{y' = u' - 1}$

$u' - \cancel{1} - \frac{1}{x \cdot u e^u} + \cancel{1} = 0$

$u' = \frac{1}{x u e^u}$

$\int u e^u \, du = \int \frac{1}{x} \cdot dx$ — seperable

اجزاء

نكمل بسيط جدا

#omar-Alkhawaja..

Q60 :- show that the differ. eq. $y' = f(x,y)$ is homogenous if and only if $f(tx, ty) = f(x,y)$

صعب

Sol. if and only if $\Leftrightarrow$

هذا معناه أنه
بالرياضيات بشكل عام $\Leftrightarrow$ يعني بدنا نثبت من الطرفين = اليسار ⓦ اليمين
(في اتجاهين)

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$

General equation homogenous :-

$f(x,y) = G\left(\frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow f(tx, ty) = G\left(\frac{\cancel{t}y}{\cancel{t}x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$

$= f(x,y)$

so homo

$\Leftarrow$ let $t = \frac{1}{x}$

become :- $f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$= f(x,y)$

so homogenuos

#

مجاب

Q61: show that if $\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = Q$, where Q depends only on the ~~[...]~~ quantity xy, then the differ. eq.: $M + Ny' = 0$, has an I.F of the form $\mu(xy)$. Give the general formula for this integrating factor?

معلومه — معلومة

السؤال بده فقط الصيغة العامة لـ $\mu(xy)$

Sol: $Q = f(xy) \rightarrow$ بسبب السؤال Q تعتمد على xy

Let $u = xy \Rightarrow \frac{N_x - M_y}{xM - yN} = f(xy)$

$$I.F = \mu(xy) = \boxed{\mu(u)}$$ نفرض بالعادة

$M + Ny' = 0 \Rightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\mu(u)M(x,y)\,dx + \mu(u)N(x,y)\,dx = 0$ is exact

$$\# \quad \frac{\partial(\mu(u)\,M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(u)\,N(x,y))}{\partial x} \quad ...①$$

$$\# \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{y\frac{\partial \mu}{\partial u}}$$

$$\# \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{x\frac{\partial \mu}{\partial u}}$$

by chain Rule....

$$\rightarrow \frac{\partial(\mu(u) \cdot M(x,y))}{\partial y} = x\frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot M + \mu(u) M_y \quad ...②$$

$$\rightarrow \frac{\partial(\mu(u)\,N(x,y))}{\partial x} = y\frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot N + \mu(u) N_x \quad ...③$$

هسا بنعوض ② , ③ في معادلة ①

$$x\frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot M + \mu(u) M_y = y\frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot N + \mu(u) N_x$$

$$x \cdot M\frac{\partial \mu}{\partial u} - y \cdot N\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu(u) \cdot N_x - \mu(u) M_y$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u}(xM - Ny) = \mu(u)(N_x - M_y)$$

$\div (xM - yN) \rightarrow$ عشان نعوض عن المعطى من السؤال ..

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu \cdot f(xy)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \mu(u)\, f(u) \rightarrow \text{seperable}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int f(u)\,du$$

$$\ln|\mu| = \int f(u)\,du$$ نرفع e

$$\mu(u) = \pm e^{\int f(u)\,du}$$

نرجع للفرض:

$$\mu(xy) = \pm e^{\int f(xy)\,dxy}$$

#

سؤال زنخ جداً ....

حبايبي هاد اهول بالتيشير

Q62 :- if $y(x)$ is solution to the D.E :

فيكب

$x y' + (2x+1) y - e^{-2x} = 0$, with $y(1) = e^{-2}$ find value of $y(2)$

sol.

$$y' + \left(2 + \frac{1}{x}\right) y = \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int 2 + \frac{1}{x} \cdot dx} = e^{2x + \ln x} = \boxed{x e^{2x}}$$

$$y = \frac{1}{x e^{2x}} \left[c + \int \cancel{x e^{2x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{\cancel{x}} \, dx \right]$$

$$y = [c + x] \frac{1}{x e^{2x}}$$

$$y(1) = e^{-2} \Rightarrow \cancel{e^{-2}} = [c+1] \frac{1}{1 \cancel{e^{2}}}$$

$$\cancel{1} - 1 = c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$y = \frac{1}{e^{2x}} \rightarrow \boxed{y(2) = \frac{1}{e^4}}$$

Q63 :- find the values of β so that the substitution $y = v x^{\beta}$

فيكب

transform the D.E $(x + 3x^2 y) y' + x y^2 = y$ into a seperable equation ?

sol. Assume $\beta = -1$

$$y = \frac{v}{x} \Rightarrow y' = \frac{x v' + v}{x^2}$$

$$x\left(1 + 3\cancel{x^2}\frac{v}{\cancel{x^2}}\right)\left(\frac{x \cdot v' + v}{x^2}\right) + \cancel{x}\frac{v^2}{\cancel{x^2}} = \frac{v}{x}$$

$$\cancel{x}(1 + 3v)\left(\frac{x \cdot v' + v}{x \cancel{x}}\right) + \frac{v^2}{x} = \frac{v}{x}$$

$$(1+3v)\left(v' + \frac{v}{x}\right) + \frac{v^2}{x} = \frac{v}{x}$$

$$v' + \frac{v}{x} = \frac{(v - v^2)}{x(1+3v)}$$

$$v' = \frac{v - v^2 - v(1+3v)}{x(1+3v)}$$

$$v' = \frac{-4v^2}{x(1+3v)}$$ seperable

... كمل

Q64 :- find the general sol. to the D.E $(y^2 e^{xy^2} + 4x^2) \cdot dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) \cdot dy = 0$

فيكب

M_y, N_x

sol. $M_y = y^2 \, 2xy \, e^{xy^2} + 2 e^{xy^2} y \Rightarrow 2xy^3 e^{xy^2} + 2y e^{xy^2}$

$N_x = 2xy \cdot y^2 e^{xy^2} + 2 e^{xy^2} y \Rightarrow 2xy^3 e^{xy^2} + 2y e^{xy^2}$

$$\int M(x,y) = \int y^2 e^{xy^2} + 4x^2 \cdot dx$$

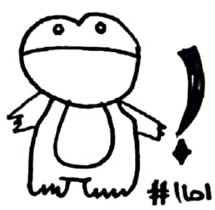
$$f(x,y) = e^{xy^2} + \frac{4}{3}x^3 + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = N(x,y) = e^{xy^2} + \frac{4}{3}x^3 + g(y)$$

$$2\cancel{xy} e^{xy^2} - 3y^2 = \cancel{2y e^{xy^2}} + \cancel{4x} + g'(y)$$

$$-3y^2 = g'(y)$$

$$\boxed{-y^3 = g(y)}$$



$$C = e^{xy^2} + \frac{4}{3}x^3 + (-y^3)$$ #

#omar-Alkhawaja ...

Q65 :- find the general sol. to the D. E

ويكيب

$$y' + 2x - 2(x^2+y-1)^{\frac{2}{3}} = 0$$

sol. let $v = x^2+y-1$

$v' = 2x + y'$

$\boxed{y' = v' - 2x}$

$v' - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 2v^{\frac{2}{3}} = 0$

$v' = 2v^{\frac{2}{3}}$

$\int \frac{dv}{2v^{\frac{2}{3}}} = \int 1 \cdot dx$

$\boxed{\frac{1}{2} \cdot 3 v^{\frac{1}{3}} = x + c}$ #

Q66 :- If $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ is an I.F of the D.E

ويكيب

$(x^2-y^2-y) - (x^2-y^2-x)y' = 0$, then the general solution is given by :- ?

sol. نضرب $\mu(x,y)$ في المعادلة لتصبح exact

$$\underbrace{\left(1 - \frac{y}{x^2-y^2}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(-1 + \frac{x}{x^2-y^2}\right)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$M_y = -\left(\frac{(x^2-y^2) - y\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$

$N_x = -\left(\frac{x^2-y^2 + x(2x)}{(x^2-y^2)^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$

$M_y = N_x$ is exact

$\int \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx = \int 1 - \frac{y}{x^2-y^2} \cdot dx$

$f(x,y) = x - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$

$c = x - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$ #

Q67 :- find the integrating factor of the D.E

ويكيب

$e^x(x+1) + (ye^y - xe^x)y' = 0$, then find general solution ?

sol. $e^x(x+1)dx + (ye^y - xe^x)\cdot dy = 0$

$M_y = 0$, $N_x = -xe^x - e^x \Rightarrow$ non exact

$$\circledast \quad \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-\cancel{e^x}(\cancel{x+1})}{\cancel{e^x}(\cancel{x+1})} = \boxed{-1}$$

$\mu(y) = e^{\int -1 \cdot dy} = \boxed{e^{-y}} \Rightarrow$ الحل نزود

$\frac{e^x}{e^y}(x+1)\cdot dx + \left(y - x\frac{e^x}{e^y}\right)\cdot dy = 0$

$M_y = -e^x e^{-y}(x+1)$

$N_x = -\left(x\frac{e^x}{e^y} + \frac{e^x}{e^y}\right) = -e^x e^{-y}(x+1)$

exact

$\int \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx = \int e^{-y} e^x (x+1) \cdot dx$ اجزاء

$f(x,y) = e^{-y}[xe^x]$

⋮

(الحل نزود) كمل

#Omar-Alkhawaja

Q_{68}:- Using the substitution $u = xy$ for the D.E

$$x(xy-1)^2 y' + (x^2y^2+1)y = 0$$

Sol.

$$y = \frac{u}{x} \Rightarrow y' = \frac{u'x - u}{x^2}$$

$$\cancel{x}(u-1)^2\left(\frac{u'x-u}{x^{\cancel{2}}}\right) + (u^2+1)\frac{u}{x} = 0$$

$$(u-1)^2\frac{(u'x-u)}{\cancel{x}} = -(u^2+1)\frac{u}{\cancel{x}}$$

$$u'x - u = \frac{-(u^2+1)u}{(u-1)^2}$$

$$u'x = \frac{-(u^2+1)u + u(u-1)^2}{(u-1)^2}$$

$$u'x = \frac{\cancel{-u^3} \cancel{-u} + \cancel{u^3} - 2u^2 + \cancel{u}}{(u-1)^2}$$

$$u'x = \frac{-2u^2}{(u-1)^2} \quad \ldots \text{separable}$$

نكمل

Q_{69}:- find a suitable substitution (مطلوب) to transform the D.E $(x^2-1)y' + xy - 3xy^2 = 0$ into a linear equation, then find the result (مطلوب) linear equation (don't solve eq.)?

ما تحلها

(ركز على المطاليب عشان ما تضيع وقت بالامتحان)

Sol.

$$y' + \frac{x}{x^2-1}y = \frac{3x}{(x^2-1)}y^2 \qquad \text{Bernolli in } y, \quad n=2$$

$$v = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow \boxed{v' = -y^{-2}y'} \Rightarrow v' - \frac{x}{x^2-1}v = \frac{-3x}{x^2-1}$$

مطلوب 1

Linear in v

مطلوب 2

Q_{70}:- find the general solution of the D.E: $dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{x(y^2+1)} + 1\right)dx$

Sol. نوحد مقامات

$$dy = \frac{(y^2+\cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{1} + xy^2 + \cancel{x})}{x(y^2+1)} \Rightarrow dy = \frac{y^2 + xy^2}{x(y^2+1)}.dx$$

لأنه seperable

$$\int \frac{(y^2+1)dy}{y^2} = \int \frac{x+1}{x}.dx$$

كمل

#Omar-AlKhawaja...

Q71: find the general solution of the D.E: مهم

$$x(2x-y^3)y' - y^4 = 2xy$$

Sol.: $x(2x-y^3)dy + (-y^4-2xy)\,dx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -4y^3 - 2x \\ N_x = 4x - y^3 \end{array}\right] \Rightarrow \text{non exact} \Rightarrow \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - y^3 + 4y^3 + 2y}{-y^4 - 2xy}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+3y^3}{-y(y^3+2x)} = \frac{3\cancel{(2x+y^3)}}{-y\cancel{(y^3+2x)}} = \boxed{\frac{-3}{y}}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-3}{y}dy} = \boxed{\frac{1}{y^3}} \rightarrow (2x^2y^{-3} - x)dy + (-y - 2xy^{-2})\,dx = 0$$

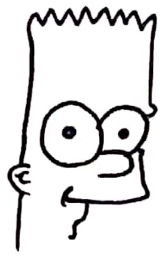
$M_y = -1 + 4xy^{-3}$, $N_x = -1 + 4xy^{-3}$ ⇒ Exact ⇒ ونكمل الحل

"اللهم لك الحمد والشكر"

⇐ اعتذر عن أي خطأ حاصل.... فهو عمل إنساني فقط ولا يخلو....

⇐ سوري عالقهوة المكبوبة بس مفيش وقت اعدل الورق...

اعداد: عمر الخواجه
⇐ سنة أولى رياضيات
0786160562



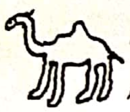
⇐ : Finished

سنوات - ديف - 1 - سكند

ملاحظة: هذا العمل هو مجهود ما قبلي من أصحاب الجهود المبارك ... ما قمت به هو تجميع الأسئلة في ملف واحد فقط ليسهّل على الطالب البحث عن سنوات المادة...♥

تحفيز: مهما جبت بالفيرست أمامك 70 علامة يعني لحالهم بوصلوك C تدخل

ركز وصحصح وتوكل الله والسكند مادة سهلة..♥

السكند - أ 

إنّ الذي يرتجي شيئاً بهمّته - يلقاه لو حاربته الإنس والجنّ..

عمر الخواجه - رياضيات - سنه أولى

بسم الله الرحمن الرحيم

Q_1:- if $P(x) = -(2 + \frac{2}{x})$, $y_1 = e^x$, find y_2 ?

sol. $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2} \cdot dx = e^x \int \frac{e^{+\int 2+\frac{2}{x}\,dx}}{(e^x)^2} \cdot dx$

$= e^x \int \frac{\cancel{e^{2x}} \cdot x^2}{\cancel{e^{2x}}} \cdot dx = e^x \cdot \frac{x^3}{3}$ #

Q_2:- $y_1 = \cos x$, is a sol. to $L[y] = 2\sin x \rightarrow g(x)$

$y_2 = e^{2x}$, is a sol. to $L[y] = \frac{e^{2x}}{3} \rightarrow g(x)$

what is a sol. of $L[y] = 6\sin x + 4e^{2x}$

sol. $y_1 = \cos x$ when $g(x) = 2\sin x$

$y_1 = 3\cos x$ when $g(x) = 6\sin x$

$y_2 = e^{2x}$ when $g(x) = \frac{e^{2x}}{3}$

$y_2 = 12e^{2x}$ when $g(x) = 4e^{2x}$

#omar-Alkhawaja..

a sol: $3\cos x + 12e^{2x}$ #

Q_3:- Find general sol. if $y = \underbrace{x^3}_{①} - \underbrace{3e^{-2x}}_{②} + \underbrace{\sin 4x}_{③}$

sol. ① $x^3 = 1, x, x^2, x^3$

$r = 0 \Rightarrow (r-0)^4 = 0$

② $-3e^{-2x} \Rightarrow \boxed{r+2=0}$ ③ $\sin 4x \Rightarrow r = \pm 4i$

$\boxed{r^2+16=0}$

① * ② * ③ $= 0 \Rightarrow r^4(r+2)(r^2+16) = 0$

$\Rightarrow r^7 + 16r^5 + 2r^6 + 32r^4 = 0 \Rightarrow$ D.E: $y^{(7)} + 16y^{(5)} + 2y^{(6)} + 32y^{(4)} = 0$

#

Q_4: if $w[e^{3x}, y'] = e^{3x}$, $y(0)=0$, $y'(1)=\frac{2}{3}$
find y?

Sol. $w[e^{3x}, y'] = \begin{vmatrix} e^{3x} & y' \\ 3e^{3x} & y'' \end{vmatrix} = e^{3x} \rightarrow e^{3x}y'' - 3e^{3x}y' = e^{3x}$

$y'' - 3y' = 1$

Aux. eq: $r^2 - 3r = 0 \rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = 3$

$y_h = c_1 + c_2 e^{3x}$

$y_p = Ax$, $y'_p = A$, $y''_p = 0 \xrightarrow{\text{نعوض}} 0 - 3A = 1 \rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{3}}$

$y = c_1 + c_2 e^{3x} + \frac{-1}{3}x \rightarrow$ نعوض لنقطتين

$y'= 0 + 3c_2 e^{3x} - \frac{1}{3} \rightarrow$ $y(0)=0$, $y'(1)=\frac{2}{3}$

$c_1 = \frac{1}{9}$, $c_2 = \frac{2}{9} \rightarrow y = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{1}{3}x$ #

Q_5: find the general sol. of $y^{(4)} + 4y''' + 5y'' = 3x^2 + 5\cos x - 2e^{-2x}\cos x$

Sol. Aux. eq. $r^4 + 4r^3 + 5r^2 = 0$

$r^2(r^2 + 4r + 5) = 0$ $r_1 = 0$ $r_2 = 0$ $r_3, r_4 = -2 \pm 1i$

$\rightarrow y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{-2x}\cos x$, $y_4 = e^{-2x}\sin x$ $\boxed{\alpha = -2}$ $\boxed{\beta = 1}$

$y_p = (Ax^2 + Bx + c)x^2 + Dx\cos x + Ex\sin x + Fxe^{-2x}\cos x + Gxe^{-2x}\sin x$

$y = y_h + y_p \rightarrow$ نكمل بطريقة المعاملات تمامًا ....

#Omar-Alkhawaja..

Note: $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}\cos x + c_4 e^{-2x}\sin x$

Scanned by CamScanner

Q_6: find the general sol. of $x^3y'' - 3x^2y' - 5xy = x\ln x$

sol: $(\div x)$ $x^2y'' - 3xy' - 5y = \ln x$

let $x = e^t \Rightarrow$ D.E: $y'' - 4y' - 5y = t$

Aux. eq: $r^2 - 4r - 5 = 0 \Rightarrow r_1 = 5 \quad r_2 = -1$

$y_h = c_1e^{5t} + c_2e^{-t}$

$y_p = At + B \qquad y_p' = A \qquad y_p'' = 0$

D.E $\Rightarrow 0 - 4A - 5At - 5B = t$

$\Rightarrow -5A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{5}}$, $-4A - 5B = 0$ $\boxed{B = \frac{4}{25}}$

$y = c_1e^{5t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{5}t + \frac{4}{25}$

نرجع التعويض $y = c_1x^5 + c_2x^{-1} - \frac{1}{5}\ln x + \frac{4}{25}$ #

Q_7:- find the general solution to D.E: $x^2y'' - 6y = x^3\ln(x)$; $x > 0$

sol: $x^2y'' - 6y = \underbrace{x^3\ln(x)}_{g(x)}$ #omar-Alkhawaja

let $t = \ln x \Rightarrow x = e^t \Rightarrow g(t) = e^{3t}\cdot t$

$\Rightarrow y'' - y' - 6y = 0 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 , r_2 = -2$

$y_h = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t}$

$y_p = (At + B)\, e^{3t} \cdot t$

بيتشابه مع y_1 نضرب بـ t

$y = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} + (At^2 + Bt)\, e^{3t}$

$y(x) = c_1x^3 + c_2x^{-2} + (A(\ln x)^2 + B\ln x)\, x^3$ #

Q_8: find the homo. D.E. with constant coeff. of at least order which has the sol. $y(x) = 3x^2 + 5xe^{2x} - \cos(3x)$

هسا إحنا عنا حل المعادلة وهو بطلب D.E المعادلة الأصلية ..

sol: $y(x) = \underline{3x^2} + \underline{5x^2 e^{2x}} - \underline{\cos(3x)}$

$3x^2 = 0, 0, 0$ $\qquad$ $5x^2e^{2x} = 2, 2$ $\qquad$ $-\cos(3x) = 0 \pm 3i$

$(1, x, x^2)$ يعني x^2 ثلاث $\qquad$ يعني مكرر بس x $\qquad$ $\cos(3x)$ يعني complex

$r^3 \qquad (r-2)^2 \qquad (r^2+9)$

$\Rightarrow r^3(r-2)^2(r^2+9) = 0$ (نضرب ببعض)

$r^7 - 4r^6 + 13r^5 - \cancel{36r^4} + \cancel{36r^4} = 0$

$\Rightarrow y^{(7)} - 4y^{(6)} + 13y^{(5)} = 0$ #

Q_9: let $y_1(x) = \sin(x^2)$ be a solution of $xy'' - y' + 4x^2y = 0$; $x > 0$, use the reduction of order method to find the general solution ?

#Omar Alkhawaja

sol. $(\div x)$ $\quad y'' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} y' + 4xy = 0$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = \sin(x^2) \int \frac{e^{-\int -\frac{1}{x}\,dx}}{\sin^2(x^2)} = \sin(x^2) \int \frac{x}{\sin^2(x^2)}\,dx$$

let $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx \Rightarrow \sin(u) \int \frac{\cancel{x}}{\sin^2(u)} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \frac{\sin(u)}{2} \int \csc^2(u)\,du \Rightarrow \frac{\sin(x^2)}{2} * -\cot(x^2)$

$$y_2 = -\frac{\cos(x^2)}{2} \quad \#$$

Q_{10}: use the method undetermined coeff. to find the form of the particular sol. $y_p(x)$ of the D.E

$$y^{(6)} + 3y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} = x^2 + \sin(2x)$$

sol $r^6 + 3r^5 + 4r^4 + 2r^3 = 0$

$r^3(r^3 + 3r^2 + 4r + 2) = 0$

$r_1, r_2, r_3 = 0$ ← بالتجريب $(r+1) = 0$

$(r+1)(r^2 + 2r + 2)$

$r_4 = -1$ ← complex $r_5, r_6 = -1 \pm i$

$$\begin{array}{r} r^2 + 2r + 2 \\ r+1 \overline{\smash{)}\, r^3 + 3r^2 + 4r + 2} \\ -r^3 - r^2 \\ \hline 2r^2 + 4r + 2 \\ -2r^2 - 2r \\ \hline 2r + 2 \\ -2r - 2 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$y_1 = 1 \quad y_2 = x \quad y_3 = x^2 \quad y_4 = e^{-x} \quad y_5 \text{ و } y_6 =$ ما بهموني

هاد الاشي بهمني عشان يتشابه يعني كل الحلول طعنام

عشان التشابه وحلول y_5, y_6 ما بهموني لانو زاوية الاقتران $\sin$, $\cos$ مختلفة عن السؤال..

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + D\sin(2x) + E\cos(2x)$$

تشابه اذا نضرب بـ x^3

$$y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + D\sin(2x) + E\cos(2x)$$

نلاحظ بالتشابه ما بنضرب المعادلة كلها فقط يلي فيه تشابه...

- تذكر أن الله يعلم أنك تصبر وتنتظر وتدعو، ولن تطيل عليك إلا الحكمة هو يعلمها، وإن طال الأمر مع ثقتك في مدى عظم الصبر واحمد الله حمداً كثيراً... ♥

:) .... #تشبث

#Omar_Alkhawaja...

Q_{11}: Solve $y'' + y' + 4 = 0$

solution: $y'' + y' = -4$

* $y'' + y' = 0 \Rightarrow r^2 + r = 0 \Rightarrow r = 0, -1$

$y_1 = e^{0x} = 1 \qquad y_2 = e^{-x}$

$y_h = c_1 + c_2 e^{-x}$

#omar_Alkhawaja.

** $y_p = A$ → لكن بيتشابه مع y_1 → $\boxed{y_p = AX}$

$y = y_h + y_p = AX + c_1 + c_2 e^{-x}$ #

ممكن ييجي بالسؤال إنو جد قيمة الثابت $\underline{A}$ نشتق y_p مرتين ونوجد الثابت..

Q_{12}: find the homogeneous D.E with constant coeff. where general sol. is given by

$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + 3\sin x$

Sol.:- $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \qquad r = -2$

$(r+2)(r+2) = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$

$y'' + 4y' + 4y = 0$ → homo.

$y'' + 4y' + 4y = g(x)$ → non-homo.

$y_p = 3\sin x \rightarrow y_p' = 3\cos x \rightarrow y_p'' = -3\sin x$

نعوض ⇒ $-3\sin x + 12\cos x + 12\sin x = g(x)$

$g(x) = 12\cos x + 9\sin x$

$\therefore$ D.E ⇒ $y'' + 4y' + 4y = 12\cos x + 9\sin x$ #

Q13 :- find the general solution of D.E $y'' - 2y' + y = x^{-1} e^{x}$

Sol: $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1, 1$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

$g(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$ → اقتران صعب لذلك variation

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ e^{x} & xe^{x} + e^{x} \end{vmatrix} = w(y_1, y_2)$$

$e^{2x}(x+1) - e^{2x} x$

$\cancel{e^{2x} x} + e^{2x} - \cancel{e^{2x} x} = \boxed{e^{2x}}$

$v_1 = -\displaystyle\int \frac{y_2 \, g(x)}{W} \, dx = -\int \frac{\cancel{x} e^{x} \cdot \cancel{x}^{-1} e^{x}}{e^{2x}}$

$v_1 = -\displaystyle\int \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = \boxed{-x}$

$v_2 = \displaystyle\int \frac{y_1 \, g(x)}{W} = \int \frac{\cancel{e^{x}} \cdot x^{-1} e^{x}}{\cancel{e^{2x}}} \, dx$

$v_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x} = \boxed{\ln x}$

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$= -x e^{x} + e^{2x} \ln x$

$y = -x e^{x} + e^{2x} \ln x + c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

\#

Q14: The auxiliary equation of the D.E

$y^{(6)} - 5y^{(5)} + 8y^{(4)} - 10y^{(3)} + 13y'' - 5y' + 6y = 0$ is Given by $(r^2 + 5r + 6)(r^2+1)^2 = 0$, Find the form of the particular sol. to the diff. eq.

$y^{(6)} - 5y^{(5)} + 8y^{(4)} - 10y^{(3)} + 13y'' - 5y' + 6y = x \cos x$

(without finding the undetermined coefficient) ?

حل المعادلة وطول الحل م معطى $(r^2+5r+6)(r^2+1)^2=0$ وطلع y_p ... بس

Sol. $(r^2 + 5r + 6)(r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow (r+2)(r+3)(r^2+1)^2 = 0$

$r = 2, 3$, $r = \pm i$, $r = \pm i$

$y_1 = e^{2x}$ $y_2 = e^{3x}$ $y_3 = \sin x$ $y_4 = \cos x$

$y_5 = x \sin x$ $y_6 = x \cos x$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x + c_5 x \sin x + c_6 x \cos x$

يتبع →

$g(x) = x\cos x \Rightarrow y_p = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$

دخلهم ببعض عشان إلا ما يكون في تشابه

$y_p = Ax\cos x + B\cos x + Cx\sin x + D\sin x$

شايف هي لقينا حلو تشابه، نضرب ب $\underline{x^2}$

$y_p = Ax^3\cos x + Bx^2\cos x + Cx^3\sin x + Dx^2\sin x$ #

انتهى السؤال لأنو طالب y_p #

Q_{15} : Solve : $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{4}{x^2}y = 0$, $x > 0$

Sol: نضرب ب x^2

$x^2y'' + xy' + 4y = 0$ cauchy-eular

$a=1 \quad b=1 \quad c=4$

$r^2 + (1-1)r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 + 4 = 0$

$r = \pm 2i$

$y_1 = x^0\cos 2\ln x = \cos 2\ln x$

$y_2 = x^0 \sin 2\ln x = \sin 2\ln x$

$y(x) = c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)$

Q_{16} : Find general solution to the diff. eq. $xy'' - (x+1)y' + y = 0$, $x > 0$, given that $f(x) = e^x$ is a sol. to this D.E. $\rightarrow$ y_1 هاد معلوم

Sol: $y'' - \underbrace{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}_{P(x)}y' + \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{q(x)}y = 0$

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = e^x\int \frac{e^{+\int \frac{x+1}{x}\,dx}}{e^{2x}}$$

يتبع →

$$= e^x \int \frac{e^{\int 1+\frac{1}{x}\, dx}}{e^{2x}} = e^x \int \frac{e^{x+\ln x}}{e^{2x}} \cdot dx$$

$$= e^x \int \frac{e^x \cdot x}{e^{2x}} \cdot dx = e^x \int e^{-x} \cdot x \cdot dx$$

اجزاء

$u = x \qquad dv = e^{-x}$

$du = 1 \qquad v = -e^{-x}$

$$\Rightarrow \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx\right) \cdot e^x$$

$\boxed{-x-1} = y_2$

$$y_h = c_1 e^x + c_2(-x-1) \quad \#$$

Q_{17}: Solve $y'''' - y = 0$

Sol: $y^{(4)} - y = 0$

$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \ , \ r = \pm i$

$y_1 = e^x \ , \ y_2 = e^{-x} \ , \ y_3 = \cos x \ , \ y_4 = \sin x$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \quad \#$

Q_{18}: let y_1, y_2 be two linearly independent sol.

$x^2 y'' + x y' + q(x) y = 0 \ , \ x > 0 \ , \ \text{if } W[y_1, y_2](1) = 5$

find $W[y_1, y_2](10)$?

Sol. $x^2 y'' + x y' + q(x) y = 0$ (cauch-eular)

$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{q(x)}{x} y = 0$

$W(y_1, y_2)(x) = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = c \cdot e^{-\int \frac{1}{x} \cdot dx} = \boxed{c \cdot x^{-1}}$

but $W(y_1, y_2)(1) = 5 \Rightarrow 5 = c \cdot 1 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$W(y_1, y_2)(10) = 5 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{2}}$

#

Q_{19}: let $L[y]=0$ be a linear diff. eq. with constant coeff. whose auxiliary eq. is $(r+1)^2 r^3 = 0$: Find

a) The order of $L[y]=0$

b) a general sol. to $L[y]=0$

c) a form for a particular sol. to $L[y] = x^2 + 2 + 3\sin 2x$ using the undetermined coeff. method

d) determined whether we can use the undetermined coeff. method to find a particular sol. to $L[y] = \sin^2 x$

Sol. a) $r^5 + 2r^4 + r^3 = 0 \Rightarrow y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

fifth order ... #

b) $r = 0, 0, 0$, $r = -1, -1$

$y_1 = 1$ $\quad y_2 = x$ $\quad y_3 = x^2$ $\quad y_4 = e^{-x}$ $\quad y_5 = e^{-x} \cdot x$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x}$$

c) y_h : افرضناها بالسؤال السابق

$$g(x) = x^2 + 2 + 3\sin 2x$$

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + D\sin 2x + E\cos 2x$$

يوجد تشابه نضرب بـ x^3

$$y_p = (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3) + D\sin 2x + E\cos 2x$$

d) السؤال تعلق بدو تحدد انو بقدر اوجد y_p خلال طريقة unde. coeff.

$$g(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

لا يوجد تشابه مع y_h لذلك تبقى كما هي ... $\leftarrow$ $y_p = A + B\cos 2x + C\sin 2x$ $\Leftarrow$ نعم يمكن

Q20:- Find a general sol. to $(\sin x)y'' + (\sin x)y = 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, if $y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ is the general sol. to the corresponding homo. equation?

Sol. $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ ⇒ نقسم على sinX لكل المعادلة

$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ ⇒ non-homo ⇒ variation ✓

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = \boxed{-1}$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$v_1 = -\int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\sin x}}{-1} \Rightarrow v_1 = \ln|\sin x|$$

$$v_2 = \int \frac{\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}}{-1} \Rightarrow v_2 = -x$$

$$y_p = \ln|\sin x| \cdot \sin x - x\cos x$$

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + (\ln|\sin x|)\sin x - x\cos x \quad \#$$

Q21:- The largest interval on which the I.V.P

$y'' + \frac{y}{x-2} - e^x y = 1$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 0$ has a unique sol. is?

Sol. $x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

$\xrightarrow{\quad 2 \quad (3) \quad}$

⇒ $(2, \infty)$

هنا سؤال الأغلب مش فاهمو ....

دايما مشكلة هون بموضوع الاتصال ....

بأخذ أصفار المقام أو $\ln(a)$ ← $a \neq 1$ and $a > 0$

بعدين بنقطة يلي معطيني اياها بتكون محصورة

بين النقاط ... وهي اكبرها بوجد

largest interval .. #

Q_{22}:- The substitution $x = e^t$ transforms the equation

$$L[y] = x^2 y''(x) + 4x y'(x) + y(x) = 0 \quad , \quad x > 0$$

into ?

Sol. $x = e^t \Rightarrow$ Cauch - Eular

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 1 \Rightarrow r^2 + 3r + 1 = 0$

$y'' + 3y' + y = 0$ #

هذا سؤال فرع دائرة وهذا هو الجواب ..

Q_{23}:- The sol. to $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$ is ?

Sol. $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0$

$r = -2, -2 \Rightarrow y_1 = e^{-2x} \quad y_2 = e^{-2x} \cdot x$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \rightarrow$ سؤال فرع دائرة ..

Given that $(m^2-1)(m^2+1)^3 = 0$ is the auxiliary eq. of some linear D.E $L[y] = 0$ with constant Coefficents , answer parts Q_{24} , Q_{25} , Q_{26} :-

Q_{24}:- The order of the D.E $L[y] = 0$ is ?

فرع دائرة

Sol. $(m^2-1)(m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1) = 0$

order of $\boxed{8}$ الدرجة ثمانية

Q_{25}:- The largest number of elements of a fundemental sol. set of the D.E $L[y] = 0$ is ?

فرع دائرة

Sol. $\Rightarrow$ largest number of elements

يقصد أكبر أس موجود ..

$\Rightarrow \boxed{8}$

Q_{26} :- The form of aparticuler sol. to $L[y] = X\sin X$ is?

sol. لجد دائماً بالبداية y_h عشان نكون يكون في تشابه

وما تضيع علينا علامة السؤال ... ؟؟

$r = \mp 1 \qquad r = \pm i$

$r = \pm i \qquad r = \pm i$

$\Rightarrow y_1 = e^{-X} \quad y_2 = e^{X} \quad y_3 = \sin X \quad y_4 = \cos X$

$y_5 = X\sin X \quad y_6 = X\cos X \quad y_7 = X^2 \sin X \quad y_8 = X^2 \cos X$

$$y_h = C_1 e^{-X} + C_2 e^{X} + C_3 \sin X + C_4 \cos X + C_5 X \sin X + C_6 X\cos X + C_7 X^2 \sin X + C_8 X^2 \cos X \quad \#$$

$g(X) = X \sin X$

$$\Rightarrow y_p = (AX + B)\sin X + (CX + D)\cos X$$
$$= AX\sin X + B\sin X + CX\cos X + D\cos X$$

يوجد تشابه نضرب بـ X^3

عشان هيك مكتب فوق جد دائماً y_h عشان التشابه

$$y_p = AX^4 \sin X + BX^3 \sin X + CX^4\cos X + DX^3 \cos X \quad \#$$

Q_{27} :- Give that $f(x) = X^3$ is a sol. to the D.E

$L[y] = X^2 y''(x) + X y'(x) - 9y(x) = 0$, $X > 0$,

then a second linearly independent sol. to

$L[y] = 0$, $X > 0$ is ?

$f(x) = X^3 = y_1 \Rightarrow$ y_1 لو معطيك y_2 هو طالب

$$y'' + \frac{1}{X} y'(x) - \frac{9}{X^2} y(x) = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = X^3 \int \frac{e^{-\int \frac{1}{X}\,dx}}{X^6}\,dx \rightarrow \text{أكمل}$$

بسيطة جداً جداً .... #

Q28 :- find the wronskian $W[e^{x}, 3e^{\cancel{2}x}]$

اوانه هاد سؤال ؟
كتير بسيط يعني انا
كتبتو عشان اورجيك لكنه
كلو بسيط ونفس الأفكار
كل السنوات..

Sol:

$$W[e^{x}, 3e^{\cancel{2}x}] = \begin{vmatrix} e^{x} & 3e^{x} \\ e^{x} & 3e^{x} \end{vmatrix}$$

$$3e^{2x} - 3e^{2x} = \boxed{0}$$

خلص الحل :) وعليه علامتين

← اذا بدو يصعب شوي بقلك هل هو indep. or depen.

وبما انو الجواب $\boxed{0}$ يعني dep. غير Zero بكون indep..

وصلى الله وبارك..

Q29 :- solve the I.Vp :- $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 3$, $y(1) = y'(1) = 1$?

y'' y'

Sol.

$$y'' \cdot y' = 3$$

let $u = y'$
$u' = y''$ $\Rightarrow$ $u' \cdot u = 3$ $\Rightarrow$ نكامل الطرفين

$$\int u' \cdot u \, dx = \int 3 \, dx$$

اجراء

$$u^2 - \int u \, du = 3x + c$$

$$\frac{u^2}{2} = 3x + c \quad \text{but} \Rightarrow y'(1) = 1$$

$$\frac{1}{2} = 3 + c \qquad y'(1) = u(1) \Rightarrow \boxed{u(1) = 1}$$

نعوض

$$\boxed{c = -\frac{5}{2}}$$

$$u = \sqrt{6x - 5}$$

$$\int y' = \int \sqrt{6x-5} \Rightarrow y = \frac{(6x-5)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot 6} + c = \frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\text{but } y(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{8}{9}$$

سؤال ضع دائرة

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{9}$$

Q_{30} :- If $W[3X+1\,,\,y(X)] = 5X-3$; $W(1) = -1$
find $y(x)$?

Sol. $W[3X+1\,,\,y(X)] = \begin{vmatrix} 3X+1 & y(X) \\ 3 & y'(X) \end{vmatrix} = 5X-3$

$(3X+1)y'(X) - 3y(X) = 5X-3$

$y'(X) - \left(\frac{3}{3X+1}\right)y(X) = \frac{5X-3}{3X+1}$

First order خطية linear

$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3}{3X+1}\,dx}$

$e^{-\ln(3X+1)} = \boxed{\frac{1}{(3X+1)}}$

$y = (3X+1)\left[c + \int \frac{5X-3}{(3X+1)^2}\,dx\right]$

$y = (3X+1)\left[c + \frac{-1}{3}\left(\frac{5X-3}{3X+1}\right) + \int \frac{5}{3X+1}\,dx\right]$

$u = 5X-3 \qquad dv = (3X+1)^{-2}$

$du = 5 \qquad v = \frac{(3X+1)^{-1}}{-1 \cdot 3}$

$y = (3X+1)\left[c - \frac{5X-3}{9X+3} + \frac{5}{3}\ln|3X+1|\right]$ #

هسا صوب ناقصنا بدنا قيمة c من السؤال أعطانا معلومة
$W(1) = -1$

$W = ce^{-\int p(x)dx}$ بوجدها عن طريق

$W = c\,e^{+\int \frac{3}{3X+1}\,dx}$

$W = c(3X+1) \Rightarrow -1 = c \cdot 4 \Rightarrow c = \frac{-1}{4}$

$y = (3X+1)\left[\frac{-1}{4} + \frac{3-5X}{9X+3} + \frac{5}{3}\ln|3X+1|\right]$ #

سؤال حلو نوعًا ما ..♥

Q_{31} :- find the general solution of the D.E :-

$$x^2 y'' + x(x-1)y' - xy = 3x^3$$

Sol: $x^2 y'' + x^2 y' - xy' - xy = 3x^3$ | let $u = y' + y$, $u' = y'' + y'$

$x^2(y'' + y') - x(y' + y) = 3x^3$

$x^2 u' - xu = 3x^3$

$u' - \frac{1}{x} u = 3x \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = \boxed{\frac{1}{x}}$

$u = x\left[c + \int \frac{1}{x} \cdot 3x \, dx\right] \Rightarrow u = x\left[c + 3x\right]$

$u = 3x^2 + cx$ (but $u = y' + y$)

$y' + y = 3x^2 + cx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int 1 \cdot dx} = \boxed{e^x}$

$y = e^{-x}\left[C_1 + \int (3x^2 + cx)e^x \, dx\right]$

هاد مش مهم كثير لانو في c

نشتغل اجزاء لحتى:

$\int 3x^2 e^x + cxe^x \, dx$

صيغة أ دو

الناتج بعد التكامل $\Rightarrow$ $y = e^{-x}\left[3x^2 e^x - 6x e^x + 6e^x + cxe^x - ce^x + C_1\right]$

$y = 3x^2 - 6x + 6 + 6x - C + C_1 e^{-x}$ #

Q_{32} : Solve the D.E: $x^2 y''' + x(x-3)y'' + (-3x+2)y' + 2y = 0$

Sol. $x^2 y''' + x^2 y'' - 3xy'' - 3xy' + 2y' + 2y = 0$

$x^2(y''' + y'') - 3x(y'' + y') + 2(y' + y) = 0$

let $\Rightarrow$ $u = y' + y \Rightarrow u' = y'' + y'$

$u'' = y''' + y''$

تابع $\Rightarrow$

$x^2 y'' + 3x y' + 2y = 0$ (Cauch - eulor)

$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 2$

$r^2 + 4r + 2 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm \sqrt{2}$

$y_h = c_1 x^{(2+\sqrt{2})} + c_2 x^{(2-\sqrt{2})}$

$y' + y = c_1 x^{(2+\sqrt{2})} + c_2 x^{(2-\sqrt{2})} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int 1 \cdot dx} = \boxed{e^x}$

$y = e^{-x}\left[c_3 + \int \left(c_1 x^2 \cdot x^{\sqrt{2}} + c_2 x^2 \cdot x^{-\sqrt{2}}\right) \cdot e^x \cdot dx\right.$

الى هنا يكفي... لأن السؤال ما
ارقامه غير مدروسة جيداً ولكن تهم الفكرة فقط .. ♥

Q_{33}:- The form of a particular sol. to the D.E:

ضع دائرة

$y'' + 4y' + 4y = \cosh 2x$ is: ?

Sol.

$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = -2, -2$

$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

$g(x) = \cosh(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \Rightarrow y_p = A e^{2x} + B e^{-2x}$

تضرب بـ x^2

$y_p = A e^{2x} + B x^2 e^{-2x}$ #

Q_{34}:- Solve: $y^{(4)} - y''' = x + e^x$

Sol. $y^{(4)} + y''' = 0$

$r^4 - r^3 = 0$

$r^3(r-1) = 0$

$r = 0, 0, 0 \;,\; r = 1$

$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x$

$y_p = \underset{\mathrm{I}}{\underline{(Ax + B)}} + \underset{\mathrm{I}}{\underline{Ce^x}}$

نضرب بـ x^3 نضرب بـ x

$y_p = (Ax^4 + Bx^3) + Cxe^x$ #

Q34:- Solve: $x^2y'' + x(2x+10)y' + (10x+30)y = 0$

; $y(x) = x^m$

Sol.:- $y'' + \left(2+\frac{10}{x}\right)y' + \left(\frac{10}{x} + \frac{30}{x^2}\right)y = 0$

$$W = ce^{-\int p(x)\cdot dx} = ce^{-\int 2+\frac{10}{x}\cdot dx} = ce^{-2x}\cdot e^{-10\ln x}$$

$$= \frac{ce^{-2x}}{x^{10}}$$

$$y_2 = x^m\int\frac{e^{-2x}\cdot x^{-10}}{x^{2m}} = x^m\int x^{(-10-2m)}\cdot e^{-2x}\cdot dx$$

but $y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1} \Rightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2}$

so: from the equation

$$\cancel{x^2}\left(m(m-1)\frac{x^m}{\cancel{x^2}}\right) + \cancel{x}(2x+10)m\frac{x^m}{\cancel{x}} + (10x+30)x^m = 0$$

$$m(m-1)x^m + (2x+10)mx^m + (10x+30)x^m = 0$$

$$m^2x^m - mx^m + 2xmx^m + 10mx^m + 10xx^m + 30x^m = 0$$

$$\cancel{(2m+10)x^{m+1} + (m^2-m+10m+30)x^m = 0}$$

ضروري لازم يساوو عشان نصفرهم يا دي صفر ← $2xmx^m + 10xx^m = 0$

$$2xmx^m = -10xx^m$$

$$2m = -10 \Rightarrow \boxed{m = -5}$$

اجا وقتو

$$\Rightarrow x^{-5}\int x^0\cdot e^{-2x}\cdot dx$$

$$\boxed{y_2 = x^{-5}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}}$$ #

سؤال مرتب جداً

Q35: A general sol. of $y'' - 7y' - 3 = 0$

$\boxed{y'' - 7y' = 3}$

فيه دائرة

Sol. $r^2 - 7r = 0$

$r(r-7) = 0$

$\underline{\underline{r = 0}} \qquad \underline{\underline{r = 7}}$

$g(x) = 3$

$y_p = Ax$ بسبب التشابه

$y_p' = A \qquad y_p'' = 0$

$0 - 7A = 3$

$$\boxed{A = \frac{-3}{7}}$$

$$\therefore \; y = c_1 + c_2 e^{7x} - \frac{3}{7}x$$

لو نحكي هاد السؤال مع دائرة وبلاحظ $\frac{-3}{7}$ هاي قيمة A

يعني اذا ما كان في رموز بالاجابة لازم نوجد دقيقا قيمة

الرموز عشان نعرف الإجابة ... اشي بسيط بس بضيع علامات

اذا ما ركزت لا سمح الله ... ♥

Q36: If $w(f,g)(x) = x\cos x - \sin x$ and if $u = f + 3g$ and $v = f - g$, then find $w(u,v)$?

Sol. $w(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g = x\cos x - \sin x$

also $w(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu'$

but

$u = f + 3g$

$u' = f' + 3g'$

$v = f - g$

$v' = f' - g'$

$= (f + 3g)(f' - g') - (f - g)(f' + 3g')$

$= \cancel{ff'} - fg' + 3gf' - \cancel{3gg'} - (\cancel{ff'} + \cancel{3fg'} - gf' - \cancel{3gg'})$

$-4fg' + 4gf'$

$-4(\underbrace{fg' - gf'}_{w(f,g)}) \Rightarrow \boxed{-4(x\cos x - \sin x)}$ #

Scanned by CamScanner

Q_{37} :- Given that $y_1 = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{\cos x}}$, is a sol. the D.E $\cos x\, y'' - y' + 3y = 0$, if the method of reduction of order is used to obtain a second linearly independent sol., find $y_2(x)$?

Sol. $y'' - \sec x\, y' + 3\sec x\, y = 0$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \int \frac{e^{+\int \sec x\,dx}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \int \frac{(\sec x + \tan x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \cdot \int \frac{\cancel{1+\sin x}}{\cancel{1+\sin x}}\,dx$$

$$= x\sqrt{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \quad \#$$

امتحان

Q_{38} :- $\{1, e^x, e^{-x}\}$ is a fundemental set of sol. to the D.E $y''' - y' = 0$, A particular sol. to the non-homo. D.E $y''' - y' = g(x)$, where $g(x)$ is a nonzero continuous function, is assumed to be of the form $y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)e^x + u_3(x)e^{-x}$, then find $u_1(x)$?

Sol. $$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\cdot g(x)\,dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\cdot g(x)\,dx + y_3(x)\int \frac{W_3(x)}{W(x)}\cdot g(x)\,dx$$

$$W = \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \end{array}$$
$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \Rightarrow 1(e^0 + e^0) \cancel{- e^x(0-0) + e^{-x}(0-0)}$$

$$= \boxed{2}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} & e^{-x} \\ 0 & e^{x} & -e^{-x} \\ 1 & e^{x} & e^{x} \end{vmatrix} = 1(-1-1) - \cancel{e^{x}(0-0)} + \cancel{e^{-x}(0-0)}$$

$$= \boxed{-2}$$

$$\cancel{y_1(x)} \cdot u_1(x) = \cancel{y_1(x)} \int \frac{W_2(x)}{W(x)} \cdot g(x) \cdot dx$$

$$u_1(x) = \int \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot g(x) \cdot dx$$

$$\boxed{u_1(x) = \int - \cdot g(x) dx}$$ # هذا هو الجواب مع دائرة

Q39 :- Solve : $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

Sol. $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$ $r = 1$ بالتجريب

$(r-1)(r^2 - r - 6) = 0$ عن طريق القسمة الطويلة

$(r-1)(r-3)(r+2) = 0$

$r = 1, 3, -2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t}$ #

Q40 :- If $y = e^{3x} \sin 2x$ is a sol. of $y'' + by' + cy = 0$
find b, c ?

sol. $y = e^{3x} \sin 2x \Rightarrow \alpha = 3 \quad \beta = 2$

$r_1, r_2 = 3 \pm i2$

$(r-3) = \pm i2 \Rightarrow (r-3)^2 = -4$

$r^2 - 6r + 9 = -4 \Rightarrow r^2 - 6r + 13 = 0$

$y'' - 6y' + 13 = 0$

$\boxed{b = -6}$ $\boxed{c = 13}$ #

Q_{41} :- $x^2 y'' - x y' + y = x \ln x$, solve?

sol: $r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$ $\quad \boxed{r = 1, 1}$ $\quad y_1 = x \quad y_2 = x^2$

$t = \ln x \Rightarrow \boxed{e^t = x}$

$y_1 = e^t \qquad y_2 = e^{2t}$

$y_p = (At + B) e^t \cdot t$ بسبب التشابه

$= (A \ln x + B) \; x \ln x$

$y = c_1 x + c_2 x^2 + (A \ln x + B)(\ln x) \cdot x$ #

Q_{42} :- $x^2 y'' - 2y = x^2 \ln(2x) - 3x$, solve ?

sol: $t = \ln x \Rightarrow x e^t \quad \Rightarrow x^2 y'' - 2y = 0$

$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = -1$

$y_1 = x^2 \quad y_2 = x^{-1} \Rightarrow y_1 = e^{2t} \quad y_2 = e^{-t}$

$g(x) = x^2 \ln(2x) - 3x = x^2(\ln 2 + \ln x) - 3x$

$g(t) = e^{2t}(\ln 2 + t) - 3e^t$

$y_p = (At + B) e^{2t} \cdot t + C e^t$

تشابه

$y_p = (A \ln x + B) x^2 \cdot \ln x + C x$

$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-1} + (A \ln x + B) x^2 \cdot \ln x + C x$ #

" قاوم .... أو ظاهر بأنك تقاوم لكن لا تنحني .. "

الساعة: 2:28 am

#إننا نصنع مصائرنا .. إذا نصنع ما نفعله ..♥

Q_{43}: Solve: $y'' + y = 8\sin^2 x$

<u>sol.</u> $y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

$y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$

$y_p = 8\sin^2 x = 4(1-\cos 2x) = 4 - 4\cos 2x$

$$y_p = A + \underbrace{B\cos 2x + C\sin 2x}_{\text{ما في تشابه بزاوية مختلفة}}$$

$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + A + B\cos 2x + C\sin 2x$

Q_{44}: $y'' + \frac{1}{x^2} y = 0$, solve:

(cauchy-eular)

sol. $x^2 y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$

$r = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$

$y_2 = x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$

$y = c_2 x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + c_1 x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$ #

Q_{45}: $(x+1)^2 y'' + 6(x+1) y' + 6y = 0$

sol. $z = x+1$

$z^2 y'' + 6z y' + 6y = 0 \Rightarrow$ (cauchy-eular)

$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = -3, -2$

$y = c_1 z^{-3} + c_2 z^{-2}$

$y = c_1 (x+1)^{-3} + c_2 (x+1)^{-2}$ #

بعرف سهل جداً
بس هيك مستوى
الامتحان

أَوَدُّ لَوْ أَنِّي أُضِرُّ مَنْ أَوَدُّ بِكُلِّ وِدٍّ أَنِّي أَوَدُّهُ.. ♥ ععع

Q46 :- $\alpha x^2 y'' + \beta x y' + y = 0$, $y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$

مهم

Find α , β ?

Sol: مش عشان شفت كلمة مركب خفت، هيدي مالك

سؤال كتير سهل.. وعادي مركب..

$r_1 = r_2 = -2$

$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$

$a = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

$b - a = 4$ فهمنا.. ؟

$b = 5 \Rightarrow \beta = 5$ يعني سهل.. ♥

Q47 :- $xy'' + (2+8x)y' + (8+16x)y = 0$ use $u = xy$ to solve the D.E ?

Sol: $u = xy \Rightarrow u' = xy' + y \Rightarrow u'' = x \cdot y'' + 2y'$

$\Rightarrow \underbrace{xy'' + 2y'}_{u''} + \underbrace{8xy' + 8y}_{8u'} + \underbrace{16xy}_{16u} = 0$

$u'' + 8u' + 16u = 0$

$r^2 + 8r + 16 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 4$

$u = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$ #

Q48 :- Solve :- $x^3 y''' + x^2 y'' = 0$

Sol: هذا السؤال واضح انو Cauchy-euler بس ركز على شغلة

ما نقدر نستخدم قاعدة $ar^2 + (b-a)r + c = 0$ لأنه المشتقة الثالثة

هون مش ثانية ← يعني نرجع للقانون الرئيسي $y = x^r$ ونشتق ونعوض.

$y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1) x^{r-2} \Rightarrow y''' = r(r-1)(r-2) x^{r-3}$

نعوض $\Rightarrow x^r \big(r(r-1)(r-2) \big) + x^r r(r-1) = 0$ $\{ \div x^r \neq 0 \}$

$r(r-1)(r-2) + r(r+1) = 0$

يتبع ➡

$r(r-1)(r-2+1)=0 \Rightarrow r(r-1)(r-1)=0$

$r=0, 1, 1$

$y=c_1+c_2 x+c_3 \ln x \cdot x$ #

لا تنسى

Q_{49} :: $(xy')'+\frac{1}{x}y=0$, Solve ?

▪ اللهم ضيّق أقدارك.. ♥

$xy''+y'+\frac{1}{x}y=0 \quad \boxed{* \, x}$

$x^2y''+xy'+y=0 \Rightarrow r^2+\cancel{(1-1)}r+1=0$

$r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i$

$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$ #

Q_{50} :: If $y_1=(x+1)$ is a sol. for
$(x^2+3x+2)y''-(2x+4)y'+2y=0$, find the second linearlity independent sol. ?

<u>Sol.</u> $y''-\frac{2\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}}y'+\frac{2}{(x^2+3x+2)}y=0$

$y_2=(x+1)\int\frac{e^{+\int\frac{2}{x+1}\cdot dx}}{(x+1)^2}=(x+1)\int\frac{\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x+1)^2}}\cdot dx$

$=\boxed{(x+1)\,x}$ #

Q_{51} :: Solve the D.E :- $y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}$

<u>Sol.</u> variation ✓ $y''-2y'+y=0$

$r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$

$y_1=e^x \qquad y_2=xe^x$

يتبع ←

$$w(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(1+x) \end{vmatrix} = e^{2x}(1+x) - e^{2x}x$$
$$= \boxed{e^{2x}}$$

$$V_1 = -\int \frac{y_2\, g(x)}{w}\, dx = -\int \frac{x e^x \cdot e^x}{(1+x^2)\cancel{e^{2x}}}\, dx = \boxed{\frac{-1}{2}\ln|1+x^2|}$$

$$V_2 = \int \frac{y_1\, g(x)}{w}\, dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{\cancel{e^{2x}}(1+x^2)}\, dx = \boxed{\tan^{-1}|x|}$$

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2 = \frac{-e^x}{2}\ln|1+x^2| + xe^x \tan^{-1}|x|$$
#

Q_{52}: $y_p = \sin 2x \cdot V_1 + \cos 2x \cdot V_2$ for
$y'' + 4y = \sec 2x$, find V_1 ??

Sol. from $y_p \Rightarrow$ $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos 2x$ $\Rightarrow w(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}$

$$= -2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = \boxed{-2}$$

$$V_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{w}\, dx = +\int \frac{\cancel{\cos 2x} \cdot \cancel{\sec 2x}}{2}\, dx$$
$$\boxed{V_1 = \frac{1}{2}x}$$
#

Q_{53}: If $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + 2x^3$, be a general sol. of 3^{rd}-order with constant coeff. $L[y] = g(x)$. find $g(x)$?

Sol. $y = y_h + y_p$
$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$
$y_p = 2x^3$
roots of Auxil. eq. of $L[y]=0 \rightarrow r = 0, 0, 1$

$r^2(r-1) = 0$
$r^3 - r^2 = 0 \rightarrow L[y] = y''' - y''$
$y_p = 2x^3 \rightarrow y_p' = 6x^2 \rightarrow y_p'' = 12x$
$y_p''' = 12$
$\Rightarrow g(x) = y_p''' - y_p'' = 12 - 12x$

$$\boxed{g(x) = 12 - 12x}$$

Q_{54}: find a homo. D.E with constant coeff. of least order which the solution:

a) $y = 5x^2 - 2e^{3x}$ b) $y = xe^{2x} - \sin 3x$

Sol. المطلوب إيجاد $L[y]$ ...?

a) $y = 5x^2 - 2e^{3x}$

roots: 0, 0, 0 root: 3

$= r^3(r-3) \Rightarrow = r^4 - 3r^3 = 0$

$L[y] = y^{(4)} - 3y^{(3)} = 0$ #

b) $y = xe^{2x} - \sin 3x$

roots: 2, 2 root: $\pm 3i$

$(r-2)^2(r^2 - 9i^2)$ $-9i^2$ $= \boxed{+9}$

$(r-2)^2(r^2+9) = 0$

$r^4 - 4r^3 + 13r^2 - 36r + 36 = 0$

$L[y] = y^{(4)} - 4r^{(3)} + 13y'' - 36y' + 36y = 0$ #

Q_{55}: Find a form of f(x) such that $W[x, f'] = \frac{1}{x}$

sol.

$W[x, f'] = \begin{vmatrix} x & f' \\ 1 & f'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \Rightarrow xf'' - f' = \frac{1}{x}$

$x^2 f'' - xf' = 1$

let $y = f(x) \Rightarrow x^2 y'' - xy' = 1$

نحل المعادلة ونجد f(x) ببساطة

Q_{56}: If y_1, y_2 are foundemental sol. of

$x y'' + 3x y' + 6x^2 y = 0$, such that

$W[y_1, y_2](\ln 3) = 3$ find ?

a) $W[y_1, y_2](x)$ b) $W(\ln 3)$

Sol. $y'' + 3y' + 6xy = 0$

a) by Able's formula.

$$W[y_1, y_2] = c\, e^{\int -3\, dx} = c\, e^{-3x}$$

$$\ln(2) \Rightarrow c\, e^{-3\ln 2} = 3 \Rightarrow \boxed{c = 24}$$

$$W = 24\, e^{-3x}$$

b) $$W(\ln 3) = 24\, e^{-3\ln 3} = \boxed{\frac{24}{9}}$$ #

Q_{57}: If $W[y_1, y_2] = 3e^{x^2}$ of a homo. D.E:

$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, find $p(x)$?

Sol. $$W = 3e^{x^2} = c\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

$c = 3$

$$= e^{x^2} = e^{-\int p(x)\, dx} = -x^2 = \int p(x)\, dx$$

$$\boxed{-2x = p(x)}$$ ⇐ نشتق الطرفين

another sol. $W' + p(x) W = 0$

$$6x e^{x^2} + p(x)\, 3e^{x^2} = 0$$

$$p(x)\, \cancel{3}\cancel{e^{x^2}} = -\cancel{6}\, x\, \cancel{e^{x^2}}$$

$$\boxed{p(x) = -2x}$$ #

من إثبات القانون
ضعي

Q_{58}: Evaluate: the wronskian $W[\sin(t^2), \cos(t^2)](t)$?

ميكب

Sol. $W = \begin{vmatrix} \sin(t^2) & \cos(t^2) \\ 2t\cos(t^2) & -2t\sin(t^2) \end{vmatrix} = -2t\sin^2(t^2) - 2t\cos^2(t^2)$

$= -2t(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))$

$-2t \cdot 1 = \boxed{-2t}$ #

$\boxed{1} =$ متطابقة

Challe 3 تضلو ميكب وسؤال مثل هيك عليه

ببساطة لإنه كثير سهل ♥...

Q_{59}: Consider the D.E: $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, $x > 0$

ميكب

if the corresponding characteristic equation has double roots ($r_1 = r_2 = r$) and $y_1(x) = x^r$

use the Reduction of order Method to show that the second solution is $y_2 = x^r \ln x$

Sol. $(\div ax^2) \Rightarrow y'' + \underbrace{\frac{b}{ax}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{c}{ax^2}}_{q(x)} y = 0$

معادلة الاصلية قبل القسمة $\rightarrow ay'' + (b-a)y' + cy = 0$

$r_1 = r_2 = r = \frac{-(b-a)}{2a}$ يعني double roots من السؤال

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = x^r \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax}\,dx}}{x^{2r}}\,dx$$

$$= x^r \int \frac{e^{\frac{-b}{a}\ln x}}{x^{2r}}\,dx \quad \text{but } r = \frac{-(b-a)}{2a}$$

$$= x^r \int \frac{x^{\frac{-b}{a}}}{x^{\frac{2a-2b}{2a}}}\,dx = x^r \int \frac{\cancel{x^{\frac{-b}{a}}}}{x^1 \cdot \cancel{x^{\frac{-b}{a}}}}\,dx = \boxed{x^r \ln x}$$ #

Q60 :- let y_1 and y_2 be two solution of $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ مهم on open interval I where A, B, C are cont. and $A(x) \neq 0$, if $W(x) = W(y_1, y_2)$, then show that $A(x)\dfrac{dw}{dx} = -B(x)\,W(x)$

Sol.
$$y'' + \underbrace{\frac{B(x)}{A(x)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{C(x)}{A(x)}}_{q(x)} y = 0$$

$$W = Ce^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow \ln w = \ln c - \int p(x)\,dx$$

نأخذ (ln) للطرفين

تشتق جميع الأطراف للتخلص من التكامل :

$$\frac{w'}{w} = -p(x) \Rightarrow \frac{w'}{w} = \frac{-B(x)}{A(x)}$$

$$A(x)\,w' = -B(x)\,w \quad ; \text{ but } w' = \frac{dw}{dx}$$

$$A(x)\frac{dw}{dx} = -B(x)\,W \quad \#$$

Q61 :- Determine a suitable from for the particular sol. مهم $y_p(x)$, if the method undetermined coeff. to be used in solving the non-homo. eq. (Dont evaluate the constants)

$$y^{(6)} + 3y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} = x^2 + xe^{-x}\sin x + xe^{-x}$$

Sol.
$$y^{(6)} + 3y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$$

$$r^6 + 3r^5 + 4r^4 + 2r^3 = 0$$

$$r^3(r^3 + 3r^2 + 4r + 2) = 0$$

$r = -1$ بالتجريب

$$\begin{array}{r|l} & r^2 + 2r + 2 \\ \hline r+1 & r^3 + 3r^2 + 4r + 2 \\ & \vdots \\ \hline & 0 \end{array}$$

Scanned by CamScanner

$r^3 = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 = r_3 = 0}$

$(r+1)(r^2+2r+2) = 0 \Rightarrow \boxed{r_4 = -1}\ \boxed{r_5, r_6 = -1 \pm i}$

$y_1 = 1 \quad y_2 = x \quad y_3 = x^2 \quad y_4 = e^{-x}$

$y_5 = e^{-x}\sin x \quad y_6 = e^{-x}\cos x$

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 e^{-x}\sin x + c_6 e^{-x}\cos x$$

$g(x) = x^2 + xe^{-x}\sin x + xe^{-x}$

لا تنسَ β y_p علامها

$y_{p_1} = (Ax^2 + Bx + C)$

$y_{p_2} = (Dx+E)e^{-x}\sin x + (Fx+G)e^{-x}\cos x)$

$y_{p_3} = (Hx + J)e^{-x}$

هسا هيك خلصنا تقريبا بس لسا ضايل موضوع التشابه

$$y_p = x^3 y_{p_1} + x\, y_{p_2} + x\, y_{p_3} \quad \#$$

Q62: Use method of variation of parameters to find the general sol. for D.E: $x^2y'' - xy' + y = x\left(1 + \frac{3}{\ln x}\right), x>0$

مهم

Sol: let $t = \ln x \Rightarrow x = e^t$

$e^{2t}y'' - e^t y' + y = e^t\left(1 + \frac{3}{t}\right) \quad \boxed{\div e^{2t}}$

$e^t y'' - y' + y = \left(1 + \frac{3}{t}\right)$

$y'' - \frac{1}{e^t}y' + \frac{1}{e^t}y = \left(1 + \frac{3}{t}\right)\frac{1}{e^t} \quad \dots (*)$

$r^2 + (-1-1)r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$

$r_1 = 1 = r_2 \Rightarrow y_1 = e^t \quad y_2 = te^t$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(t+1) \end{vmatrix} = \boxed{e^{2t}}$

مباشرة

$V_1 = -\int \frac{t\cancel{e^t} \cdot (1 + \frac{3}{t}) \frac{1}{\cancel{e^t}}}{e^{2t}} \, dt$

$V_1 = -\int (t+3) e^{-2t} \, dt \qquad \begin{array}{ll} u = t+3 & dv = e^{-2t} \\ du = 1 & v = \frac{e^{-2t}}{-2} \end{array}$

$V_1 = \frac{(t+3)e^{-2t}}{2} - \int \frac{e^{-2t}}{2} \, dt$

$\boxed{V_1 = \frac{(t+3)e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4}}$

$V_2 = \int \frac{\cancel{e^t} \cdot (1 + \frac{3}{t}) \frac{1}{\cancel{e^t}}}{e^{2t}} = \int \frac{(t+1)}{te^t} \, dt$

$u = te^t$

$u' = te^t + e^t \Rightarrow e^t(t+1)$

$\frac{du}{e^t(t+1)} = dt \Rightarrow \int \frac{\cancel{(t+1)}}{u} \cdot \frac{du}{u\cancel{(t+1)}}$

$\int u^{-2} \, du = -u^{-1} = \boxed{\frac{-1}{te^t} = V_2}$

$y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + e^t \left(\frac{(t+3)e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} \right) + te^t \left(\frac{-1}{te^t} \right)$

$t, \cancel{X}$ ثم نرجع

Q63: Find a value of "β" such that the solution $u = \frac{y}{x^{\beta}}$ transform the D.E : $(x + 3x^2 y)y' + xy^2 = y$ into aseperable equation ?

Sol. $y' = \frac{y - xy^2}{x + 3x^2 y}$ $\quad u = \frac{y}{x^{\beta}} \Rightarrow y' = x^{\beta} u' + \beta x^{\beta-1} u$

$$x^{\beta} u' + \beta x^{\beta-1} . u = \frac{u \cdot x^{\beta} - x \cdot u^2 x^{2\beta}}{x + 3x^2 . u . x^{\beta}}$$

$$x^{\beta} u' = \frac{u . x^{\beta} - u^2 x^{(2\beta+1)}}{x + 3u . x^{(\beta+2)}} - \frac{\beta x^{\beta-1} . u \left(x + 3u . x^{\beta+2}\right)}{x + 3u . x^{\beta+2}}$$

$$x^{\beta} u' = \frac{u . x^{\beta} - u^2 x^{(2\beta+1)} - \beta x^{\beta} u - 3\beta u^2 x^{2\beta+1}}{x + 3u . x^{\beta+2}}$$

$$u' = \frac{u - u^2 x^{\beta+1} - \beta u - 3\beta u^2 x^{\beta+1}}{x^{\beta-1} + 3u . x^2}$$

$$u' = \frac{u(1 - \beta) - u^2 (x^{\beta+1} + 3\beta x^{\beta+1})}{x^{\beta-1} + 3u . x^2}$$

$$(1 - \beta) = x^{\beta+1} + 3\beta x^{\beta+1} \rightarrow$$ لازم نساويهم عشان نقدر نجمع حاطل مشترك

$$1 - \beta = (1 + 3) x^{\beta+1}$$

$$1 - \beta = 4 x^{\beta+1}$$

$$x^{0} . \frac{1 - \beta}{4} = x^{\beta+1}$$

$$\beta + 1 = 0$$

$$\boxed{\beta = -1}$$ #

Q04 :: Solve: $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{9}{x^2}y = \frac{\sec(3\ln x)}{x^2}$

Sol: :: $x^2y'' + xy' + 9y = \sec(3\ln x)$

$t = \ln x \Rightarrow e^t = x$

$r^2 - 0r + 9 = 0$

$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$

$y_1 = \sin 3t \qquad y_2 = \cos 3t$

$y_h = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin 3t & \cos 3t \\ 3\cos 3t & -3\sin 3t \end{vmatrix}$$

$= -3(\sin^2 3t + \cos^2 3t) = \boxed{-3}$

$u_1 = -\int \frac{\sec(3t)\cdot\cos(3t)}{-3}\,dt$

$= \boxed{\frac{1}{3}t}$

$u_2 = \int \frac{\sec(3t)\cdot\sin(3t)}{-3}$

$= \boxed{\frac{1}{9}\ln|\cos 3t|}$

$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$

$= \sin(3t)\cdot\frac{1}{3}t + \cos(3t)\cdot\frac{1}{9}\ln|\cos 3t|$

$y_t = y_h + y_p \ldots$

$y(x) = \ldots\ldots$ ...نكتب

اللهم - لك - الحمد - والشكر..

بساعة 5:18 am ... انجاز عظيم جداً ..♥

* اعداد : عمر موسى الخواجه
سنة اولى رياضيات
0786160562

كل الشكر.

دعوة - لجدتي - بالشفاء..

دعوة - لوالدي - ووالدتي - بالشفاء..

بالتوفيق - للجميع..

المادة - سهلة - جداً - بدها - نركز - فقط.. !♥♥♥

ان الذي يرتجي شيئاً بهمته يلقاه ... لو حاربه الانس والجن..♥

∞!

كل الشكر♥

#سنوات - فاينال - دنف I

هذا العمل هو مجهود ما قبلي من أصحاب المجهود المبارك....
ماقمت به هو تجميع الأسئلة في ملف
واحد فقط ليسهل على الطالب البحث عن سنوات
المادة ....♥

⬅ اكمز شوي بالتالي :-

تجري الرياح كما تجري سفينتنا · نحن الرياح ونحن البحر والسفن
إن الذي يرتجي شيئاً بهمته · يلقاه لو حاربه الإنس والجن
فاقصد إلى قمم الأشياء تدركها · تجري الرياح كما رادت لها السفن

#wake-up..

وعندما تريد شيئاً ما ، فإن الكون بأسره
يتضافر ليوفر لك تحقيق رغبتك..♥

#عمر - الخواجا - رياضيات - لجنة - أولى ..

بسم الله الرحمن الرحيم

• بالبداية أحتاج الى مراجعة جميع افكار وقوانين المادة لنجعل العمل مميزاً أكثر ... ركز شوي شوي عشان تفوت عالمادة فهمان كلشي وما توخذ معك وقت كثير.... ♥ بحبكم جداً ♥♥

• largest interval :-

• y' or y بجهة والباقي بجهة أخرى

• نبحث بنقاط عدم الاتصال ← صفر مقام او $\ln(x)$ ← $x<0$

$x = 1$ ← اذا كان بالمقام

• بيكون معطى نقطة I.V.p $y(1) = b$ ← هاي بتكون محصورة بفترة largest interval

• seperable equation :-

• $\underline{dy}$ بجهة مع اقتران بدلالة $\underline{y}$

• $\underline{dx}$ بجهة مع اقتران بدلالة $\underline{x}$

• نكامل الطرفين وخلصنا الحل.

Note :- اي معادلة بتحتوي الأشكال هاي

e^{xy} , $\ln(x+y)$ و $\frac{\sin}{\cos}(x+y)$ ← sep. بتكون مش

• Linear equation :-

linear in y → $1 * y' + p(x)\, y = g(x)$

linear in x → $1 * x' + p(y)\, x = g(y)$

Method sol. :-

$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ نجد $\boxed{1}$

$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[c + \int \mu(x) \cdot g(x)\right]$ نجد $\boxed{2}$

• طريقة تحديد Lin. in ☐ :-

← ننظر الى عدد حدود معاملات dy و dx الأقل حدود بيكون Lin. in ☐

$\boxed{\text{or}}$

← المعامل اللي بكون فيه خليط x, y لا يكون Lin in ☐

Scanned by CamScanner

Exact Equation :-

Form : $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\,dy = 0$ اهم اشي

$M \xrightarrow[\text{في}]{\text{علاقتها}} dx$ $N \xrightarrow[\text{في}]{\text{علاقتها}} dy$

نتأكد انو المعادلة exact بشرط $\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ لاحظ نشتق بالنسبة لعكس معادلة الأصل

قبل ما أحكي عن طريقة الحل : ركز اني بشتق او بكامل بالنسبة للأصل أو بالنسبة لعكس الأصل

Method. sol. :-

[1] نختار اما M او N $\xrightarrow[\text{Example}]{\text{For}}$ $M(x,y) = \sim\sim$

[2] نكامل الطرفين بالنسبة للأصل $\Rightarrow \int M(x,y)\cdot dx = \int \sim\sim \cdot dx$

[3] بعطيني ثابت اقتران بدلالة العكس $g(y)$ $\Rightarrow f(x,y) = \sim\sim + g(y)$

[4] نشتق بالنسبة للاقتران $\frac{\partial f}{\partial y}$ يعني $g'(y)$ $\Rightarrow \underline{N(x,y)} = \sim\sim + g'(y)$ نعوض قيمتها من السؤال

[5] نختصر لحد ما يصير معنا اقتران بدلالة y فقط $\Rightarrow \cancel{\sim\sim} = \cancel{\sim\sim} + g'(y)$

$\sim\sim = g'(y)$

[6] نكامل بالنسبة الى y لنحصل على $g(y)$ $\Rightarrow \sim\sim = g(y)$

[7] نرجع لمعادلة $f(x,y)$ نعوض مكان $g(y)$ قيمته ومكان $f(x,y) = C$ $\Rightarrow C = \sim\sim + g(y)$ قيمة

#

• ملاحظات بسيطة :-

[1] $F(x,y) = C$

[2] نشتق F بالنسبة إلى y الناتج $N(x,y)$

[3] نشتق F بالنسبة الى x الناتج $M(x,y)$

يعني لما نكامل بعطي $F(x,y)$

- **Non-Exact Equation:** [Special integrating Factor]
  $\mu(x)$

Form :- $M(x,y)\cdot dx + \underbrace{N(x,y)\cdot dy}_{\text{ام اشي}} = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ ← Non-exact كيف نعرف انو

الهدف نحول المعادلة ال exact ونحل عليه....

Method sol. :-

[1] نجد $\mu(x)$ or $\mu(y)$

القانون :- $\mu(x) = e^{\int (*)\cdot dx}$ or $\mu(y) = e^{\int (**)\cdot dy}$

$(*)$: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$: ناتج اقتران بدلالة X فقط

اذا ما زبط نذهب للقانون التالي

$(**)$: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$: ناتج اقتران بدلاله y فقط

[2] نضرب المعادلة الأصلية كاملة بـ $\mu(x)$ or $\mu(y)$

يالي طلع معي وهيك بكون حولت المعادلة الى exact ونحل كما تعلمنا سابقاً.. ♥

← المعادلات السابقة هي الأساسية والباقي بنحولو للمعادلات يالي اخذناها :

مصطلح بسيط يفتح العقل للحل:

- seperable ← Homogeneous / Almost-sep.
- Exact ← Non-exact
- Linear ← Bernoulli

♥♥♥

▪ Homogenous - Equation :-

• نميز هذا النوع من المعادلات ان :
مجموع الأس لكل حد مساوي مع الحدود الاخرى .

الشرط $\Rightarrow f(x,y) = G\left(\frac{y}{x}\right)$, let $V = \frac{y}{x}$

• ممكن يكون $\frac{y}{x}$ or $\frac{x}{y}$ ما بهم بكون V or $\frac{1}{V}$

Method sol. :-
[1] $V = \frac{y}{x} \rightarrow y' = V'x + V$

[2] نعوض مكان y' قيمتها ومكان كل $\frac{y}{x}$ قيمتها

هيك تصير sep نفصل V مع dv لحال و x مع dx لحال
ونكامل ... ونرجع قيم الفرض ... ✌

▪ Almost -sep. Equation :-

الشرط $\Rightarrow f(x,y) = G(ax+by)$

الطريقة :- نفرض $V = ax+by$ ... ونحل مثل السابق
ونرجع الفرض ... نفس Homo بس الفرض مختلف

▪ Bernoulli Equation :-

Ber. in y $\rightarrow 1 * y' + P(x)\, y = g(x)\, y^{n}$

Ber. in x $\rightarrow 1 * x' + P(y)\, x = g(y)\, x^{n}$

Method sol. :-

[1] let $V = y^{1-n}$

[2] $V' = \underbrace{(1-n)\, y^{-n}}_{\circledast} \cdot y'$

[3] Multiply $\circledast$ in all original equat for trans.
-- to linear. [نضرب المعادلة الأصلية بـ $\circledast$ وبتحول linear]
ونحل عادي linear ثم نرجع الفرض ... ♥

ملخص سؤال [شرط المعادلة خطية] :

$$(a_1x+b_1y+c_1)\cdot dx + (a_2x+b_2y+c_2)\cdot dy = 0$$

- if $c_1=c_2=0$
  - مباشرةً الحل الى Homo.
  - let $u=\frac{y}{x}$
- if $c_1\neq 0$ and $c_2\neq 0$
  - Almost.sep
    - اذا كان ناتج ضرب
    - $a_1b_2=a_2b_1$
  - exact
    - اذا لم يكن
    - $a_1b_2\neq a_2b_1$

← قبل ما أبدأ بتلخيص السكند من ناحية المعادلات : نأخذ Wronskian :.

- **Wronskian :-** $W[y_1,y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$
  - $=0$ dependent
  - $\neq 0$ indep.

- **Abel's theorem :-** $1*y'' + P(x)\,y' + q(x)\,y = 0$

  $P(x)$ ← هذا المهم

$$W = Ce^{-\int P(x)\cdot dx} \quad \#$$

← حاليا في ايجاد y_h ← نحولها الى Auxi.eq. $ar^2+br+c=0$ والنواتج لهذه المعادلة ثلاثة

- $\Delta=0$ ← $r_1=r_2$ ← في هذه الحالة نضرب الجواب الثاني
  اما x او $\ln x$
- $\Delta>0$ ← $r_1\neq r_2$ ← الحل طبيعي y_1 ، y_2
- $\Delta<0$ complex root ← $\alpha \pm \beta i$ ←
  $\alpha = \frac{-b}{2a}$
  $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

$\Delta = b^2-4ac$

Homogenous $= 0$

Constant coeff.

$ay''+by'+cy=0$

↳ Auxi.l.eq.

$ar^2+br+c=0$

$\boxed{\text{Rule}}$ $y=e^{rx}$

• نضرب X حالة التشابه

• حالة complex root

$y_1=e^{\alpha x}\sin x$

$y_2=e^{\alpha x}\cos x$

$y=c_1y_1+c_2y_2$

Cauchy-Eular

$ax^2y''+b\,y+cy=0$

↳ Auxi. Eq.

$ar^2+(b-a)r+c=0$

Rule $y=x^r$

• نضرب بـ $\ln x$ حالة التشابه

• حالة Complex root

$y_1=x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$

$y_2=x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$

$y=c_1y_1+c_2y_2$

Reduction

$1*y''+p(x)y'+q(x)y=0$

بكون السؤال معطي الحل الأول

First sol.

وطالب الحل الثاني y_2

... Second sol.

• $y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)\cdot dx}}{(y_1)^2}\cdot dx$

اذا كانت $p(x)$ غير معلوم

• $y_2=y_1\int\frac{w}{(y_1)^2}\cdot dx$

← ملاحظات مهمة جداً قبل ما نكمل Non-Homo. :-

[1] Recall :-

• $\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

• $\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

• $\tanh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

[2] متطابقات مهمة :-

• $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

• $\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

متطابقة ضعف الزاوية

• $\sin(a)*\sin(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

• $\cos(a)*\cos(b)=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

• $\sin(a)*\cos(b)=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

هنا مهم الترتيب جداً

sin ثم cos

[3] • $\frac{d}{dx}\sinh(x)=\cosh(x)$

• $\frac{d}{dx}\cosh(x)=\sinh(x)$

• $\frac{d}{dx}\tanh(x)=\operatorname{sech}^2(x)$

• $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(x)=-\operatorname{csch}(x)\cdot\coth(x)$

• $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x)=-\operatorname{sech}(x)\cdot\tanh(x)$

• $\frac{d}{dx}\coth(x)=-\operatorname{csch}^2(x)$

Non-Homogenous $\neq 0$

• الحل النهائي هو :-

$$y = y_h + y_p$$

[1] undetermined coeff :-

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Method. sol :-

[1] $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_h ← لايجاد ← طريقة $ar^2 + br + c = 0$ (هنا نفس موضوع : Constant coeff.)

[2] نجد y_p

y_p يختص تابعه لاقتران $g(x)$:- حيث اذا كان $g(x)$:-

$g(x)$	y_p
ثابت ← C	A
خطي ← $X+2$	$AX+B$
تربيعي ← X^2+3X+9	AX^2+BX+C
تكعيبي ← X^3+8	AX^3+BX^2+CX+D
مثلثي ← $\sin 5X$	$A\sin 5X + B\cos 5X$
$-3\cos 2X$	$A\cos 2X + B\sin 2X$
أسي ← e^{ax}	Ae^{ax}

ملاحظة اي تشابه مع y_h نضرب X

← حالة كان $g(x)$ = أكثر من حد :

نأخذ كل حد قاعدة y_p لوحدها :

Example: $g(x) = \underbrace{X\sin X}_{y_{p_1}} + \underbrace{X^3}_{y_{p_2}} - \underbrace{8e^{3x}}_{y_{p_3}}$

; $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$

[2] Variation of Parameters :-

$$1 * y'' + P(x)y' + q(x)y = g(x)$$

و $g(x)$: اقتران صعب يحوي ضرب اقترانين او قسمة ...

Method sol :-

[1] نجد y_h على الطرق السابقة ...

[2] نجد W للحلول y_1 , y_2

[3] نجد y_p ← $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$

$$V_1 = -\int \frac{y_2 \cdot g(x)}{W} \qquad V_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{W}$$

[4] $y = y_h + y_p$

LAPLACE

→ $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = F(s)$ (تعريف الأساسي)

⬅ ملاحظة : في تكامل $\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$ احتمال يطلب بالسؤال قيمة Domain

هون لنتذكر انو يكون الأس e^{-st} تكون قيمة سالبة ..

مثلاً : e^{s-4} ⬅ $s \le 4$ = Domai عشان تكون سالبة ..

ليش سالبة ؟ ببساطة عشان يكون ناتج تعويض $\infty \to -\infty$

حيث $e^{-\infty}$ = صفر #

*أهم جدول بكل التشابتر :-

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$; $s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$; $s>a$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}\, f(t)]$ او $F(s)$ نفس الإشي
$e^{at} \cdot f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$s F(s) - f(0)$

$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b^2}{(s-a)^2+b^2}$
مشتقة ← $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\ldots\ldots-f^{(n-1)}(0)$
مش مشتقة هاد اس ← $t^n f(t)$	$(-1)^n\cdot\frac{d^n}{ds^n}\cdot[\mathcal{L}\{f(t)\}]$

Note:

- (نطرح ونضيف) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$
- (او نضيف ونطرح) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx$

آتشبث - بقوة .. تماح

Note:-

$\mathcal{L}\,\sim = \mathcal{L}\,\text{MM}$

$\sim = \text{MM}$ ⇐ يعني انها بيروحوا اللابلاس مع بعض شرط ان اقترانات تكون linear.

▪ ملاحظة :- اذا كان اقتران $\frac{P(s)}{Q(s)}$: حيث درجة $P(s) < Q(s)$

$Q(s)=(s-\alpha)^2+\beta^2$ هو يكون Qudratic Factor :- اذا:

the partisal fraction relative to $\left((s-\alpha)^2+\beta^2\right)^m$:-

$$\frac{A_1(s-\alpha)+B_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{A_2(s-\alpha)+B_2}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\cdots+\frac{A_m(s-\alpha)+B_m}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

→ **Note:-** $\mathcal{L}^{-1}\,F'(s) = -t\,f(t)$

(حيث هاد $F'(s)$ اقتران غير مألوف اول مرة بنشوفوا).

Examples:

- $\mathcal{L}^{-1}\ln\left(\frac{s+2}{s^2+4}\right)$
- $\mathcal{L}^{-1}\sin^{-1}\left(\frac{4}{s^2}\right)$
- $\mathcal{L}^{-1}\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)$

طريقة اكمال المربع ←

[1] معامل $s^2 = 1$

[2] $\left(\frac{\text{معامل } s}{2}\right)^2$

[3] نضيف ونطرح على الترتيب $\left(\frac{\text{معامل } s}{2}\right)^2$

Just...

- **solve D. E By Laplace :-** $ay'' + by' + cy = F(t)$

الطريقة : [1] نأخذ اللابلاس للجميع

[2] لا ننسى أن

$$\mathcal{L}\, y(t) = y(s)$$

$$\mathcal{L}\, y'(t) = s\,y(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\, y''(t) = s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

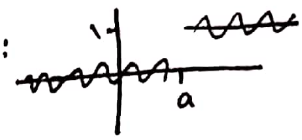
لا تنسى : $\mathcal{L}^{-1} F(s) = F(t)$

[3] نجعل $y(s)$ موضوع القانون

[4] نأخذ $\mathcal{L}^{-1}$ للطرفين ونجد قيمة $y(t)$

- **unit step function :-** $u(t-a)$

- **Graph :**



$$\Rightarrow \quad u(t-a) = \begin{cases} 0 , & t < a \\ 1 , & t > a \end{cases}$$

Theormes :-

متساوي

[1] $\mathcal{L}\, u(t-a)\, f(t-a) = e^{-as}\,\mathcal{L} f(t)$

[2] $\mathcal{L}\, u(t-a) = \dfrac{e^{-as}}{s}$

[3] $\mathcal{L}\, u(t-a)\, f(t) = e^{-as}\,\mathcal{L} f(t+a)$

غير متساوي

[4] $\mathcal{L}^{-1}\, e^{-as} \cdot F(s) = u(t-a)\, \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}_{t \to (t-a)}$

نضع مكان كل $t \leftarrow (t-a)$

Note :- if
$$f(t) = \begin{cases} f_1 , & t < a_1 \\ f_2 , & a_1 < t < a_2 \\ f_{n-1} , & a_2 < t < a_{n-1} \\ f_n , & t > a_{n-1} \end{cases}$$

then,
$$f(t) = f_1 \oplus (f_2 - f_1)\, u(t - a_1) \oplus (f_{n-1} - f_2)\, u(t - a_2)$$
$$\oplus (f_n - f_{n-1})\, u(t - a_{n-1}) \quad \#$$

← طريقة حساب $\mathcal{L}f(t)$ نأخذ $\mathcal{L}$ لكل الأطراف ونحسب .. ♥

ملاحظة قد الدنيا : عند ضرب الـ اقتران بـ (e^{at}) نعوض مكان كل $(s) \leftarrow (s-a)$
له بـ (e^{-at}) نعوض مكان كل $(s) \leftarrow (s+a)$

---

series of solution D.E :-

[1] **Taylor** $\underset{x_0 \neq 0}{}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$

[2] **Maclurin** $\underset{x_0 = 0}{}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x)^n$

طريقة الحل :- [1] بكون السؤال معطيك معادلة ومعطيك نقطة I.V.P $y(x_0) = y_0$
ومعطيك نقطة I.V.P $y'(x_0) = y_*$
x_0 هي مهمة جداً

[2] السؤال بطلب مثلاً : The First Five non-Zero
هون بضل اشتق واعوض النقطة واوجد اول خمس مشتقات ناتجهم مش صفر
اذا طلع معي صفر بنذهب للمشتقة يلي بعدها ، لحد ما يطلعني مش صفر ..

[3] بكتب جم على القواعد يلي فوق اما Taylor أو Maculirn ..

← هيك خلصنا كل الملخص ، هسا دور الأسئلة ، بالتوفيق →

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

اللهم لا سهلا إلّا ما جعلته سهلا ، وأنت تجعل الحزن إذا شئت سهلاً... ♥

يلا ننطلق ......

Q1: Find the inverse Laplace tranform $F(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+8}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+4-4+8}\right\}$

إكمال مربع

$\left(\frac{1}{2} * \text{معامل } s\right)^2 = 4$

$(s+2)^2+2^2$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\frac{2}{(s+2)^2+4}$

$= e^{-2t}\cdot\cos 2t + e^{-2t}\cdot\sin 2t = f(t)$ #

Q2 :- The value of the integral. $\int_0^\infty 2\cos^2(t)\cdot e^{-at}\cdot dt$

where $a>0$, Find it ?

Sol. $\int_0^\infty 2\cos^2 t\cdot e^{-at}\cdot dt = \mathcal{L}\{2\cos^2 t\}$

صيغة للابلاس

مثلثية

$= \mathcal{L}\ \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}[1+\cos 2t] = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\cos 2t$

$= \frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+4}$ #

خبطنا استخدام a بدل s كونو بالسؤال معطيك e^{-at} مش e^{-st} ...

وهاد سؤال خود ادرك بكون واضح معك... ♥

Q_3 : If $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$ is the laplace tranform of the function $f(t)$, then find the value of

$\mathcal{L}\{t \cdot f'(t)\}(s)$ at $s=1$?

Sol. نحتاج الى قاعدة $f(t)$ نجدها من خلال $F(s)$ ثم نشتق $f(t)$

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s^2+1} = \boxed{\cos t} \Rightarrow f'(t) = -\sin t$$

So : $\mathcal{L}\{t \cdot f'(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot \sin t\} = (-1)\cdot(-1)\cdot\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$

$= \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ but at $s=1$ $\Rightarrow = \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

Q_4 : If $Y(s)$ is the laplace tranform of the $f(t)$ of the I.V.P $y'' - 2y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, find $Y(s)$?

Sol. $y'' - 2y = t \rightarrow \mathcal{L}y'' - 2\mathcal{L}y = \mathcal{L}t$

$s^2 Y(s) - \cancel{sy(0)}^{\text{zero}} - \cancel{y'(0)}^{-1} - 2Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$s^2 Y(s) + 1 - 2Y(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{s^2} - 1}{s^2 - 2}$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1 - s^2}{s^2(s^2-2)}}$$

اجابة فى دائرة..

يستهين عقلك عندما تعلم
أن وجودك على الكوكب هو
لإثارة شعلة عقلك واستخدامه بالمطلوب
لتكن خير خليفة على هذه الأرض...♥

Q5 : use the Integrating factor $\mu(y) = e^{y}$, to find the general solution of the D.E $(x + xy)y' + y = 0$?

Sol

$x(1+y)\,y' + y = 0 \quad * \left[\frac{1}{y'}\right]$

$x(1+y) + \frac{y}{y'} = 0 \Rightarrow x(1+y) + y\,x' = 0 \quad \div [y]$

$x\left(\frac{1}{y} + 1\right) + x' = 0$ lin. in. x

$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} + 1} = \boxed{y e^{y}}$

$x = \frac{1}{\mu(y)}\left[c + \int \mu(y) \cdot 0 \cdot dy\right]$

$x = \frac{1}{y e^{y}}\left[c + \cancel{\int 0 \cdot dy}\right] \Rightarrow x = \frac{c}{y e^{y}}$

$\boxed{c = x y e^{y}} \Rightarrow$ هذه اجابة ضع دائرة *

Q6 :- If $y_1 = e^{x^2}$ is a sol. of the D.E $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ where $p(x)$ and $q(x)$ are cont. function on $\mathbb{R}$, find a second linearly independent sol. y_2 given that $W[y_1, y_2] = e^{2x^2}$

Sol. reduction equation :

$y_2 = y_1 \int \frac{W[y_1, y_2]}{(y_1)^2} \cdot dx = e^{x^2} \cdot \int \frac{\cancel{e^{2x^2}}}{\cancel{(e^{x^2})^2}} \cdot dx$

$= e^{x^2} \cdot \int 1 \cdot dx = \boxed{e^{x^2} \cdot x}$ #

Note: $\frac{e^{2x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{\cancel{e^{x^2}} \cdot \cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{x^2}} \cdot \cancel{e^{x^2}}} = 1$

Q7: Find the general sol. of the seperable diff. eq.

$$y' - e^{x-y} = 3x^2 e^{-y}$$

Sol. $y' = e^{x-y} + 3x^2 e^{-y} \Rightarrow y' = e^{x} \cdot e^{-y} + 3x^2 e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^{x} + 3x^2) \Rightarrow \int e^{y} \cdot dy = \int e^{x} + 3x^2 \cdot dx$$

$$e^{y} = e^{x} + x^3 + c \rightarrow \boxed{e^{y} - e^{x} = x^3 + c} \ \#$$

اجابة نموذجية

Q8:- Find the fundemental sol. set to the D.E of constant coeff. whose characteristic equation is given by $(r^3 - 4r)(r^3 - 8) = 0$?

Sol. المطلوب مجموعة الحل فقط "ركز على التشابه بالجذر"

$$r(r^2 - 4)(r^3 - 8) = 0 \Rightarrow r(r-2)(r+2)(r-2)(r^2 + 2r + 4) = 0$$

$r = -1 \pm i\sqrt{3}$

$\Rightarrow r = 0 \rightarrow y = 1$

$r = 2 \rightarrow y = e^{2x}$

$r = 2 \rightarrow y = xe^{2x}$

$r = -2 \rightarrow y = e^{-2x}$

$r = -1 + i\sqrt{3} \rightarrow y = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$

$r = -1 - i\sqrt{3} \rightarrow y = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$

$$\text{Sol. set} = \{1, e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, e^{-x}\sin\sqrt{3}x, e^{-x}\cos\sqrt{3}x\}$$

أحب ذلك الجزء من اليوم الذي تتذكر فيه كم كان الأمر صعباً ومعقداً لكنه انتهى، وها أنت بخير الآن... ♥

قلب أزرق جداً

Don't give up...

Q9:- Find the general sol. of the D.E $xy' - y = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

sol. Homo. equation $\Rightarrow y' - \frac{y}{x} = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

let $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = v' \cdot x + v$

$\Rightarrow v' \cdot x + \cancel{v} - \cancel{v} = x \cos(v)$

$\cancel{x} \cdot v' = \cancel{x} \cos v \Rightarrow \int v' = \int \cos v$

$v = \sin v + c \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + c}$

Q10:- use the variation of parameters method to find the general sol. of Non-homo. D.E

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3, \quad x > 0$$

given that $\{x, xe^x\}$ is a fund. sol. set of the corresponding homo. equation. ?

sol. $y'' - \left(\frac{x+2}{x}\right)y' + \left(\frac{x+2}{x^2}\right)y = x$

$$W = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & xe^x + e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x + \cancel{xe^x} - \cancel{xe^x} = \boxed{x^2 e^x}$$

$v_1 = \int \frac{-y_2 \cdot g(x)}{w[y_1, y_2]} = \int \frac{-x \cdot xe^x}{x^2 \cdot e^x} = \boxed{-x}$

$v_2 = \int \frac{y_1 \cdot g(x)}{w[y_1, y_2]} = \int \frac{\cancel{x \cdot x}}{\cancel{x^2} \cdot e^x} = \boxed{-e^{-x}}$

$y = y_h + y_p = y_h + [y_1 v_1 + y_2 v_2]$

$= c_1 x + c_2 x e^x + (-x^2 - x)$

يعني الحلين صح

لأنه بالاجابات $c_1 x + c_2 x e^x + x^2 + x$

لو ركزتي بالموجب بدل السالب انو ضاربة ما بالسالب واحد

عشان هيك القاعدة بتحكي انو عند ضرب أي حد بثابت مثلاً (السالب واحد) يبقى نفس الحل ..♥

Q_{11} : Find the Inverse Laplace transform of $F(s) = \dfrac{s+1}{s^3 - 9s}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s(s-3)(s+3)}\right\}$ partial fraction

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3}\right\}$$

$$A(s-3)(s+3) + B\,s(s+3) + C\,s(s-3) = s+1$$

when
- $s=0 \Rightarrow A = \frac{-1}{9}$
- $s=-3 \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$
- $s=3 \Rightarrow B = \frac{2}{9}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\ \frac{\frac{-1}{9}}{s} + \frac{\frac{2}{9}}{(s-3)} + \frac{\frac{-1}{9}}{(s+3)}$$

$$= \frac{-1 - 2e^{+3t} + e^{-3t}}{9} \quad \#$$

Q_{12} :- use the method undetermined coeff. to find the form of the particular sol. y_p of the D.E

$$y'' + 4y = \sin(x)\cos(x) + x\cos(x) \quad [\text{Don't find constants}]$$

Sol. $y'' + 4y = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$

$y_1 = \sin 2x \quad , \quad y_2 = \cos 2x$

$y_p \rightarrow \quad g(x) = \sin(x)\cos(x) + x\cos(x)$

$\sin(x)\cos(x) \rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x$ قطعا تبقى

$[A\sin 2x + B\cos 2x]\,x$ للتكرار مع y_h

$x\cos(x) \rightarrow [(Cx+D)\cos x + (Ex+F)\sin x]$

$$y_p = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x + (Cx+D)\cos x + (Ex+F)\sin x \quad \#$$

$\underline{Q_{13}}$:- If $\{u(x)\ ,\ u(x)e^{2x^2}\}$ is the fund. sol. set of D.E

$xy'' - y' - 4x^3y = 0\ ,\ x > 0$, find form function $u(x)$?

$\underline{\text{Sol.}}$:- $y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2y = 0$

$$w = c\,e^{-\int \frac{-1}{x}\cdot dx} = C\,e^{\ln x} = \boxed{C\cdot x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\cdot dx}}{(y_1)^2}$$

$$e^{2x^2}\cancel{u(x)} = \cancel{u(x)} \int \frac{C\cdot x}{u^2(x)}$$

$$e^{2x^2} = \int \frac{C\cdot x}{u^2(x)}$$

نشتق الطرفين .

$$4\cancel{x}\cdot e^{2x^2} = \frac{C\cdot \cancel{x}}{u^2\cdot(x)} \Rightarrow \sqrt{u^2(x)} = \sqrt{\frac{C}{4e^{2x^2}}}$$

$$u(x) = \sqrt{C}\cdot\frac{1}{2e^{x^2}} = \boxed{\tfrac{1}{2}C'\,e^{-x^2}}\ ;\ \boxed{C' = \sqrt{C}}$$

#

$\underline{Q_{14}}$:- Find asuitable substitution to transform the D.E

$6y^2\cdot dx - x(2x^3+y)\cdot dy = 0$, into a linear equation,

then, find the resulting linear eq. [don't solve eq.]

$\underline{\text{Sol.}}$ $\boxed{U=\quad}$ $\boxed{D.E:\quad}$ المطلوب ثن final ans. السؤال عبارة عن

$$6y^2\cdot dx - x(2x^3+y)\cdot dy = 0 \qquad \div\,\boxed{6y^2\cdot dy}$$

$$\frac{dx}{dy} - \left[\frac{2x^4 + xy}{6y^2}\right] = 0 \Rightarrow x' + \left(\frac{1}{6y}\right)x - \frac{x^4}{3y^2} = 0$$

$$x' - \left(\frac{1}{6y}\right)x = \frac{1}{3y^2}\cdot x^4 \Rightarrow v = x^{1-4} = \boxed{x^{-3}}$$

$$v' = -3x^{-4}\cdot x'$$

المطلوب الأول

$$\boxed{v' + \frac{1}{2y}v = \frac{-1}{y^2}}$$

المطلوب الثاني

Q15: Find the laplace transform of $F(t) = t\,e^{-2t}\cdot \sin(2t)$

Sol: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t e^{-2t}\cdot \sin(2t)\} = \mathcal{L}\{t \sin 2t\}\Big|_{s \to s+2}$

$$= (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]\Bigg|_{s \to s+2} = (-1)\cdot \frac{-2\cdot s\, 2}{(s^2+4)^2}\Bigg|_{s \to s+2}$$

$$= \boxed{\frac{4(s+2)}{((s+2)^2+4)^2}} \ \#$$

Q16: Consider the D.E: $Xy'' + (2+8x)y' + (8+16x)y = 0$ (*)

to answer the following two parts:

a) when using the substitution $u = (Xy)$ into this D.E the resulting diff. eq. will be ?

b) Use the result in part (a) above to find the general sol. to D.E in (*)

Sol.: هو معطي معادلة وطالب a) الشكل الجديد لـ D.E باستخدام التعويض $u = Xy$

b) حل المعادلة الجديدة يلي تكونت من التعويض بفرع [a]

a) $u = Xy \rightarrow u' = Xy' + y \rightarrow u'' = Xy'' + 2y'$

from (*) $\xrightarrow{\text{نعوض}}$ $\underbrace{Xy'' + 2y'}_{u''} + \underbrace{8Xy' + 8y}_{8(xy'+y)} + 16Xy = 0$

$$u'' + 8u' + 16u = 0$$

$\Rightarrow \boxed{u'' + 8u' + 16u = 0}$ Linear second

[b] $r^2 + 8r + 16 = 0 \Rightarrow e^{-4x},\ Xe^{-4x}$

$(r+4)^2 = 0$

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 X e^{-4x} \ \#$$

Q17:- One the following pairs of function are linearly dependent on $(0,\infty)$

a) $f = x\ln x$, $g = x$ b) $f = xe^{2x}$, $g = e^{3x}$

c) $f = e^{x}\cos x$, $g = e^{x}\sin x$ d) $f = e^{x}$, $g = e^{x+2}$

sol. الفكرة بالسؤال انو بدك تحسب لكل دائرة W فإذا
كان الجواب = zero بكون .dep ويكون هو الخيار الصحيح
لأنو السؤال طالب انو يكون .dep

فرع d

$$W[f,g] = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{x+2} \\ e^{x} & e^{x+2} \end{vmatrix} = e^{x}\cdot e^{x+2} - e^{x}e^{x+2}$$

$$= \boxed{0} \text{ depen. } \#$$

Q18: One the following is a fundemental solution set for the 4^{th} order D.E : $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

sol. هو سؤال فوق دارس ببساطة نجد الحلول ويكون الجواب باحد الفروع

$$r^4 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3(r+1) = 0$$

$$r = 0, 0, 0 \qquad r = -1$$

$$\text{sol. set} = \{1, x, x^2, e^{-x}\}$$

Q19: Find the Integrating factor of the following linear equation $y' - \frac{2}{x}xy = \sin(x^2)$, $x > 0$

sol. $y' - 2y = \sin x^2$

$$\mu(x) = e^{-\int 2\,dx} = \boxed{e^{-2x}} \#$$

تخيلو معي الأسئلة يلي بالصفحة هاي أجت بامتحان واحد يعني 6 علامات بالجيبة .... المادة جداً بسيطة ... ولسا برضو في اسئلة كثير سهلة..
اشتغل وتوكل وشد الهمة... ❤

Q_{20}:- find the general sol. of the D.E: $2xy^2e^x\,dx - e^x\,dy = 0$

Sol. $2xy^2\cancel{e^x} = \cancel{e^x}y' \Rightarrow \int 2x\,dx = \int y^{-2}\,dy$

$x^2 + c = -1 \cdot y^{-1} \rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{x^2+c}}$ #

Q_{21}: Find wronskian of any two solutions of the D.E:

$$\frac{1}{2}y'' + 2xy' + y = 0$$

Sol. $y'' + \underbrace{4x}_{P(x)}y' + 2y = 0 \Rightarrow W = ce^{-\int P(x)\,dx}$

$W = c\,e^{-\int 4x\,dx} = \boxed{ce^{-2x^2}}$

Q_{22}: suppose that $r^3(r-5)^2(r^2+4)^2 = 0$ is the auxiliary equation of some different with constant coeff.

Find the order of this equation ?

Sol. $r^3(r-5)^2(r^2+4)^2 = 0$

③ ② ④ $\Rightarrow 3 + 2 + 4 = \boxed{9}$ order

Q_{23}: If use substitution $y = xv$ in the D.E

$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy+y^2}{x^2}$, find form D.E after subst. ?

Sol. $y = x \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx}\cdot x$

$\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$x \cdot \frac{dv}{dx} + v = 3v + v^2 \Rightarrow \boxed{x\,\frac{dv}{dx} = 2v + v^2}$

جواب ضع دائرة ..#

Q24 :- Find the laplace transform $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$?

Sol. $\frac{1}{2}\mathcal{L}\; 1+\cos 2t$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right] \rightarrow \boxed{\frac{1}{2s}+\frac{s}{2s^2+8}} \;\#$$

Q25 :- Find the laplace transform $\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{3e^{3t}}\right\}$

Sol. $\frac{1}{3}\mathcal{L}\; t^2 \cdot e^{-3t} \;=\; \frac{1}{3}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}_{s\to s+3}$

$$\boxed{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{(s+3)^2}} \;\#$$

Q26 :- find the inverse laplace trans. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s+2}\right\}$

Sol. $\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{2}{5}}\right\} = \frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}t}$ #

ملاحظة بسيطة :- الأسئلة من 17-26 هاي بامتحان
واحد عشر أفرع ضع دائرة على كل فرع 2.5 علامات
يعني 25 علامة بتوخذهم بربع ساعة ... امتحان جداً
بسيط ومباشر جداً ... بهمنا نوصل الصعب والسهل ونستعد ♥..

Q27 : Find a form of aparticular sol. of the D.E

$$y'' + 5y' + 6y = x\,e^{-2x} \quad ?$$

Sol. $y''+5y'+6y=0$

$r^2+5r+6=0$

$(r+3)(r+2)=0$

$y_1=e^{-3x} \quad y_2=e^{-2x}$

$g(x) = x\,e^{-2x}$

$y_p = (Ax+B)\,e^{-2x}$ but

$= (Ax+B)\,x\,e^{-2x}$ بسبب أنه بهم

#

Q28: If $y_p = A\sin x + B\cos x$ is a particular sol. of $y'' + y' = -3\sin x$, find the values A, B?

Sol.

$$y_p' = A\cos x + -B\sin x$$

$$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p' = -3\sin x \Rightarrow -A\sin x - B\cos x + A\cos x - B\sin x = -3\sin x$$

$$\Rightarrow \sin x(-A-B) + \cos x(-B+A) = -3\sin x$$

$$-A-B = -3 \qquad -B+A=0$$

$$\boxed{A=B}$$

$$-B-B=-3$$

$$-2B=-3$$

$$B = \frac{3}{2} \rightarrow A = \frac{3}{2} \ \#$$

Q29: Find the inverse Laplace trans. $\mathcal{L}^{-1}\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$

Sol. $s^2+4-s^2-9 = \boxed{5}$

$$\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\frac{(s^2+4)-(s^2+9)}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3}{5}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{\cancel{s^2+4}}{\cancel{(s^2+4)}(s^2+9)} - \mathcal{L}^{-1}\frac{\cancel{s^2+9}}{(s^2+4)\cancel{(s^2+9)}}\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+9} - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+4}\right] \Rightarrow \frac{3}{5}\left[\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[\frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}\sin 3t - \frac{3}{10}\sin 2t} \ \#$$

استوليت على أموال دروس خصوصية لو حصة ذهبت للسينما فلمحت أبي على شباك التذاكر يسأل عن فرصة عمل بعد الظهيرة ... 💔

#ادرس_عشان_ابوك_وامك ..

Q30:- Find the Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}\dfrac{s}{(s-3)^2-4}$?

Sol.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3+3}{(s-3)^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\frac{s-3}{(s-3)^2-4} + \mathcal{L}^{-1}\frac{3}{(s-3)^2-4}$$

$$e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2-4} + 3e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2-4} * \frac{2}{2}$$

$$= e^{3t}\cosh 2t + \frac{3}{2}e^{3t}\sinh 2t \quad \#$$

Q31: Given the I.V.P for D.E $y' - 4y = \cos(2t)$, $y(0) = 0$, find $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$?

Sol.

$$\mathcal{L}y' - 4\mathcal{L}y = \mathcal{L}\cos 2t$$

$$sY(s) - \cancel{y(0)}^{\text{zero}} - 4Y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s)(s-4) = \frac{s}{(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s-4)} \quad \#$$

* لو كان السؤال طالب $y(t)$
مش $Y(s)$ ، كان بنطلع
$Y(s)$ بعدين باخذ $\mathcal{L}^{-1}$
للطرفين وبوجدها

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+4)(s-4)}$$

من خلال .... partial ... ♥

Q32:- Find the general sol. for $x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

Sol. Cauchy-eulor :

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

$$r^2 + 3r - 3 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

المميز ⊕ يعني
مش complex
root ..

$$y_1 = x^{\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}}$$

$$y_2 = x^{\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}}$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \ldots \#$$

Q33: Find the inverse laplace trans. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-5}{s^2+2s+5}\right\}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-5}{s^2+2s+1-1+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-5}{(s+1)^2+4}\right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-1-5}{(s+1)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} - 6\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} * \frac{2}{2}$

$= e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{6}{2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$

$= \boxed{e^{-t}\cos(2t) - 3e^{-t}\sin(2t)}$ #

Q34: Find the laplace trans.: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{3+s}{s^2}$,

$\int_{-1}^{\infty} e^{-t}\cdot f(t+1)\cdot dt$?

Sol. $\int_{-1+1}^{\infty} e^{-(t-1)}\cdot f(t+1-1)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{1}\cdot e^{-t}\cdot f(t)\cdot dt$

$= e\int_{0}^{\infty}\{e^{-t}\cdot f(t)\}\cdot dt$

تعريف الابلاس.. $\mathcal{L}\{f(t)\}(1)$

$e * \left.\frac{3+s}{s^2}\right|_{s=1} = e\cdot\frac{4}{1} = \boxed{4e}$

Q35: Find $f(t)$ if $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s-2}{s+3}\right)\right\}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\{\underbrace{\ln(s-2) - \ln(s+3)}_{F(s)}\}$

$= \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}\right]$

$= \frac{-1}{t}\left[e^{2t} - e^{-3t}\right]$ #

" لسه حالكم وايش سؤاله حلو.. بس بدها فهم ♥... "

Q_{36}:- Find general sol. by Laplace tran. for D.E

$$y''(t) = g(t) \quad , \text{ if } \quad g(t) = \begin{cases} 0 & , t < 4 \\ (t-4)^5 & , t > 4 \end{cases}$$

and $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$?

Sol. $y'' = 0 + (t-4)^5 \cdot u(t-4)$

$$\mathcal{L}\, y'' = \mathcal{L}\,(t-4)^5\, u(t-4)$$

$$s^2 Y(s) - \underbrace{\cancel{s\,y(0)}}_{\text{zero}} - \underbrace{\cancel{y'(0)}}_{\text{zero}} = e^{-4s}\, \mathcal{L}\{t^5\}$$

$$s^2 Y(s) = e^{-4s} \cdot \frac{5!}{s^6} \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-4s} \cdot 5!}{s^8}$$

$$\mathcal{L}^{-1} Y(s) = 5!\, \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-4s}}{s^8} \Rightarrow y(t) = 5!\, u(t-4)\, \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^{7+1}}$$

$$y(t) = \frac{5!}{7!}\, u(t-4)\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7!}{s^{7+1}}\right\}_{t \to (t-4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{42} \cdot u(t-4) \cdot (t-4)^7$$

- لكل طالب يحمل حزن أيامه معه ، لكل من يتحمل ضغوط الحياة فوق ضغط دراسته ، لكل من ازهقت روحه من فرط التعب ، لكل من أصيب بالخيبة من امتحانات او مواد علمية معقدة ، لكل من تحمل لأجل العلم كسر خاطر أو سوء خلق أو كلمة جارحة ، لا بأس على قلبك ، سيعطيك الله من فضله ما كنت تتمنى ،

وربك لا ينسى ...♥ #تشبث..♥

Q37: Find $f(t)$ of $\mathcal{L}^{-1}\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\{t^3 \cdot f(t)\}\right] = \tan^{-1}(4t)$

Sol.

$$\cancel{\mathcal{L}}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\, t^3 \cdot f(t)\right] = \mathcal{L}\,\tan^{-1}(4t)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\, t^3 \cdot f(t)\right] = \mathcal{L}\,\tan^{-1}(4t)$$

but $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[\mathcal{L}\, f(t)\right] = \mathcal{L}\, t^n \cdot f(t)$

$$\Rightarrow\ -\mathcal{L}\, t^4 f(t) = \mathcal{L}\,\tan^{-1}(4t)$$

ملاحظة" $\mathcal{L}\sim = \mathcal{L}\sim$

اذا الاقترانات متساوية

$\sim = \sim$

$$-t^4 f(t) = \tan^{-1}(4t)$$

$$\boxed{f(t) = -\frac{\tan^{-1}(4t)}{t^4}}$$

Q38: Find the general sol. for the D.E:

$$y'' + 3xy' + y = 4\ln(x) + 2 \quad ; \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

by power series?

Sol. $y''(1) + 3y'(1) + y(1) = 4 + 0 + 2 \Rightarrow \boxed{y''(1) = 0}$

نشتق لثالثة ونعوض $\rightarrow$ $y''' + 3xy'' + 4y' = \frac{4}{x} \rightarrow \boxed{y'''(1) = 0}$

نشتق لرابعة ونعوض $\Rightarrow$ $y^{(4)} + 3xy''' + 7y'' = \frac{-4}{x^2} \rightarrow \boxed{y^{(4)}(1) = -4}$

نشتق لخامس ونعوض $\Rightarrow$ $y^{(5)} + 3xy^{(4)} + 10y''' = \frac{8x}{x^4} \rightarrow \boxed{y^{(5)}(1) = 20}$

$$y = -1 + 1(x-1) - \frac{4}{4!}(x-1)^4 + \frac{20}{5!}(x-1)^5$$

#

Q39 :- The general sol. to the initial value problem

$$y'' + 4y' + 9y = 0 \;,\; y(0) = 0 \;,\; y'(0) = 1 \;,\; \text{Find it ?}$$

Sol. auxi: $r^2 + 4r + 9 = 0 \Rightarrow r = -2 \pm \sqrt{5}$

$$y = c_1 e^{-2x} \cos\sqrt{5}x + c_2 e^{-2x} \sin\sqrt{5}x$$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$y' = c_2 e^{-2x} \cos(\sqrt{5}x) \cdot \sqrt{5} - 2c_2 e^{-2x} \sin\sqrt{5}x$$

$y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 e^0 \cos(0) \cdot \sqrt{5} - \cancel{2c_2 e^0 \sin 0} = 1$

zero

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-2x} \sin(\sqrt{5}x) \quad \#$$

Q40 :- which of the following equations can be transformed into a seperable equations ?

A) $(x+y)y' + x = y$ B) $(x^2y + y^3)\,dy = -x^2\,dx$ C) $xy' + 1 = y\ln(\frac{2}{3})$

D) $xy' = y\ln(xy)$ E) $(x-y+1)y' + y = x-3$

Sol. تجرب الحل ولكن بفهم يعني ببين معك انو D ما بنفع

B مبين انو مستحيل وهكذا ....

طبعا السؤال قايلك انو يحول الى sep. يعني يحول بعد فرض يعني Almost

او Homo.

$$(x-y+1)y' = x-y-3$$

$v = x - y$

$v' - 1 = -y' \Rightarrow \boxed{y' = 1 - v'}$

$(v+1)(1-v') = v-3$

$\cancel{v} + 1 - v v' - v' = \cancel{v} - 3$

$(v-1)v' = -4 \Rightarrow$ sep. # $\boxed{E}$

Q41: Find The First three non-Zero terms in the solution of I.V.P : $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

* ، السؤال بدو non-zero يعني اذا طلعوا هي 0 نكمل للي بعدو..

sol. $y''(0) = 0$

$$y''' - xy'' - y' - y' = 0 \rightarrow y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} - xy''' - y'' - y'' - y'' = 0 \rightarrow y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)} - xy^{(4)} - 4y''' = 0 \rightarrow y^{(5)}(0) = 8$$

$$\Rightarrow y = \sum \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

$$y = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 \quad \#$$

Q42: Find the values of a which makes the D.E $(4x^3y^3 - 2y) + (ax^4y^2 - 2x + 2y)y' = 0$; exact?

sol. $$\underbrace{(4x^3y^3 - 2y)}_{M} \cdot dx + \underbrace{(ax^4y^2 - 2x + 2y)}_{N} dy = 0$$

$$M_y = 12x^3y^2 - 2$$

$$N_x = 4ax^3y^2 - 2$$

$$\Rightarrow M_y = N_x$$

$$12\cancel{x^3}\cancel{y^2}\cancel{-2} = 4a\cancel{x^3}\cancel{y^2}\cancel{-2}$$

$$\boxed{3 = a}$$

Q43: let y_1, y_2 be two solutions to the D.E $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, with $W[y_1, y_2] = x^3e^x$, and $y_1(x) = x$, Find $y_2(x)$

sol. $$y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{(y_1)^2} = x \int \frac{x^{\cancel{3}}e^x}{\cancel{x^2}} = \underbrace{x \int xe^x \cdot dx}_{\text{by Part...}}$$

so $\boxed{y = xe^x(x-1)}$

Q44:- For the initial value problems : $y'' - 2y' + y = e^t$
$y(0) = 5$, $y'(0) = 0$, Find Laplace trans. $Y(s)$ of the solution $y(t)$?

Sol.

$$s^2 Y - sy(0) - \cancel{y'(0)} - 2sY + 2y(0) + Y = \frac{1}{s-1}$$

$$s^2 Y - 5s - 2sY + 10 + Y = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s^2 - 2s + 1) - 5s + 10 = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s^2 - 2s + 1) = \frac{5s^2 - 15s + 10}{s-1} \rightarrow Y(s) = \frac{5s^2 - 15s + 10}{(s-1)^3} \quad \#$$

Q45:- Consider $L[y](t) = t^2 y'' + t y' + (t^2 - \frac{1}{4}) y$, if $c_1 t^{-\frac{1}{2}} \cos t + c_2 t^{-\frac{1}{2}} \sin t$ is a sol. for $L[y](t) = 0$ then a particular sol. $y_p(t)$ for $L[y](t) = t^{\frac{5}{2}}$; $t > 0$ is Given by ?

Sol.

$$g(x) = t^{\frac{5}{2}} \rightarrow y_p = A t^{\frac{5}{2}} \rightarrow y_p' = \frac{5}{2} A t^{\frac{3}{2}}$$

$$y_p'' = \frac{15}{4} A \cancel{t} t^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{15}{4} A t^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} A t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4} A t^{\frac{5}{2}} + A t^{\frac{9}{2}} = t^{\frac{5}{2}}$$

$$\left[\frac{15}{4} A + \frac{5}{2} A - \frac{1}{4} A \right] t^{\frac{5}{2}} + A t^{\frac{9}{2}} = t^{\frac{5}{2}}$$

$$15A + 10A - A = 4$$

$$A(15 + 10 - 1) = 4$$

$$A = \frac{4}{24} \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6}} \quad \text{so : } y_p = \frac{1}{6} t^{\frac{5}{2}} \quad \#$$

Q46 :- Find the inverse Laplace trans. $\mathcal{L}^{-1} \dfrac{s e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+9}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1} \dfrac{s e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+9} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3} \quad F(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$

الحل بالخطوات :-

$\mathcal{L}^{-1} F(s) = \cos 3t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \dfrac{s e^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+4} = f(t-\frac{\pi}{3}) \cdot u(t-\frac{\pi}{3}) = \boxed{\cos 3(t-\frac{\pi}{3}) u(t-\frac{\pi}{3})}$ #

Q47 :- If $f(t) = \begin{cases} 1, & 1<t<2 \\ 3, & 2<t<3 \\ 6, & t>3 \end{cases}$, then find the laplace trans. $\mathcal{L}\{f(t)\}$?

Sol. $f(t) = 1 + 2u(t-2) + 3u(t-3)$

$\mathcal{L} f(t) = \mathcal{L}1 + 2\mathcal{L}u(t-2) + 3\mathcal{L}u(t-3)$

$\mathcal{L} f(t) = Y(s) = \dfrac{1}{s} + 2\dfrac{e^{-2s}}{s} + 3\dfrac{e^{-3s}}{s}$ #

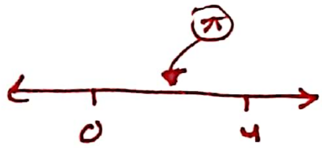
Q48 :- Consider the initial value problems :-

$(\sin x) \cdot y + x y' = \dfrac{1}{x-4}$, $y(\pi) = 1$, what is the largest interval on which we expect a unique sol. to be defined ?

Sol. $y' + \dfrac{\sin(x)}{x} y = \dfrac{1}{x-4}$

نحدد نقاط عدم الاتصال (اصفار المقام)

$x = 0 \qquad x = 4$



So : largest interval $(0, 4)$ #

تقريباً $3,14 = \pi$

Q49: Find the integrating factor of $x\ln x\frac{dy}{dx}+y=2\ln x$

Sol. $(x\ln x)dy+(y-2\ln x)dx=0$

$M_y=1 \Rightarrow \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\ln x}{x\ln x}=\frac{-\cancel{\ln x}}{x\cancel{\ln x}}$

$N_x=1+\ln x$

$=\boxed{\frac{-1}{x}}$

$\mu(x)=e^{-\int\frac{1}{x}\cdot dx}=e^{-\ln x}=\boxed{\frac{1}{x}}$ #

Q50: Find $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+16}\right\}$

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+9-9+16}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s+3)^2+7}$

$\mathcal{L}^{-1}\frac{s+3}{(s+3)^2+7}-\frac{3}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\frac{\sqrt{7}}{(s+3)^2+7}$

$=e^{-3t}\cos(\sqrt{7}t)-\frac{3}{\sqrt{7}}e^{-3t}\sin(\sqrt{7}t)$ #

Q51: The general sol. for $y'''-y''-y'+y=0$ is ?

Sol. $r^3-r^2-r+1=0$

try number: $r=1 \rightarrow \boxed{r-1}$

$$\begin{array}{r|l} & r^2-1 \\ \hline r-1 & r^3-r^2-r+1 \\ & \underline{-r^3+r^2} \\ & -r+1 \\ & \underline{+r-1} \\ & 0 \end{array}$$

$(r-1)(r^2-1)=0$

$r=1 \quad r=1 \quad r=-1$

$y_h=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}$ #

Q52:- Find the form of the particular sol. to the D.E $y'' + 2y' + 2y = 4x^2 \sin(2x)$, using the undetermined coeff. method [don't evaluate constants] ?

sol. auxi eq. : $r^2 + 2r + 2 = 0 \rightarrow \boxed{r = -1 \pm i}$

$$y_h = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\left[\cos(2x) + \sin(2x)\right] \quad \#$$

Q53:- Find $\mathcal{L}\, e^{3t} \cdot u(t+2)$:-

sol.

$$e^{2s} \mathcal{L}\{e^{3t}\}_{t \to t-2}$$

$$= e^{2s} \mathcal{L}\{e^{3t-6}\} = e^{2s} \mathcal{L}\, e^{3t} \cdot e^{-6}$$

$$= e^{2s} e^{-6} \mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{e^{2s}}{e^{6}} \cdot \frac{1}{s-3} \quad \#$$

Q54: Find $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{s^2+4}\right\}$

sol. $a = 7$, $F(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4}$

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-7s}}{s^2+4} = f(t-7)\, u(t-7)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 3(t-7)\, u(t-7) \quad \#$$

▪ هذا الحل بالخطوات بطريقة الحكيم عشان ما تغلط بالحل.. ؒ

Q55: If $y = \frac{1}{3} x \sin x$ sol. to D.E $ay'' + by' + cy = 9\cos x$, Find values of a, b, c ?

Sol.

$$y = \frac{1}{3} x \sin x$$

$$y' = +\frac{1}{3} x \cos x + \frac{1}{3} \sin x$$

$$y'' = \frac{-1}{3} x \sin x + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos x$$

$$= \frac{-1}{3} x \sin x + \frac{2}{3}\cos x$$

$$\therefore \quad a y'' + b y' + c y = 9 \cos x$$

نعوض القيم $\Rightarrow$

$$\frac{-a}{3} x \sin x + \frac{a\,2}{3}\cos x + \frac{b}{3} x \cos x + \frac{b}{3}\sin x + \frac{c}{3} x \sin x = 9\cos x$$

$$x \sin x \left(\frac{-a}{3} + \frac{c}{3}\right) + \frac{a\,2}{3}\cos x + \frac{b\,x \cos x}{3} = 9 \cos x$$

$*\quad \frac{-a}{3} + \frac{c}{3} = 0 \Rightarrow -a = -c$

$$\boxed{a = c}$$

$*\quad \frac{a\,2}{3}\cancel{\cos x} = 9\,\cancel{\cos x} \Rightarrow \boxed{a = \frac{27}{2}}$

$$\therefore \boxed{c = \frac{27}{2}}$$

$$\frac{1}{3} b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\therefore \boxed{\frac{27}{3} y'' + \frac{27}{2} y = 9 \cos x}$$

بقعة ضوء ← لتبدأ دراستك ، لا تحتقر مجهوداتك ، لا تشك في امكانياتك ، لا تعتقد أنك أقل من غيرك مهما كانت المعلومات والمناهج ، ومهما كانت تعقيدات مرحلتك ، تذكر أن الله اوجد فيك ما يعينك على تجاوز عقبات الحياة ، ثق بنفسك واكتشف قدراتك ، لتحقق أحلامك ، تذكر أنك العظيم الذي وصلت لهذه المرحلة لوحدك...♥

Q56:- Find the general sol. to the D.E :

ميكس

$$Xy^3 + \left(5y^2 - Xy + y^3\sin(y)\right)y' = -y^2$$

Sol. $(Xy^3 + y^2)\,dX + \left(5y^2 - Xy + y^3\sin(y)\right)dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 3Xy^2 + 2y \\ N_X &= -y \end{aligned}\right] \quad M_y \neq N_X \quad \text{so non-exact}$$

$$* \quad \frac{N_X - M_y}{M} = \frac{-y - 3Xy^2 - 2y}{Xy^3 + y^2} = \frac{-3\,(\cancel{Xy^2 + y})}{y\,(\cancel{Xy^2 + y})} = \boxed{\frac{-3}{y}}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-3}{y}\cdot dy} = e^{-3\ln y} = \boxed{y^{-3}}$$

$$\Rightarrow (X + y^{-1})\,.dX + \left(5y^{-1} - Xy^{-2} + \sin(y)\right)\cdot dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \frac{-1}{y^2} \\ N_X &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}\right] \quad \text{exact} \Rightarrow \quad M(X,y) = X + y^{-1}$$

$$f(X,y) = \frac{X^2}{2} + Xy^{-1} + g(y)$$

$$N(X,y) = \frac{-X}{y^2} + g'(y)$$

$$\rightarrow 5y^{-1} - \cancel{Xy^{-2}} + \sin(y) = \cancel{\frac{-X}{y^2}} + g'(y)$$

$$5y^{-1} + \sin y = g'(y) \xrightarrow{\text{تكامل}} 5\ln y - \cos y = g(y)$$

So :- $C = \dfrac{X^2}{2} + Xy^{-1} + 5\ln y - \cos y$

#

Q57:- Use the substitution $u = y - x$ to find the general sol. to the D.E: $y' - \frac{y}{x} = x^3y^2 + x^5 - 2x^4y$ #

فيكسب

sol.:-

$y = u + x$

$y' = u' + 1$

$\Rightarrow u' + 1 - \frac{(u+x)}{x} = x^3(u+x)^2 + x^5 - 2x^4(u+x)$

$\Rightarrow u' + \cancel{1} - \frac{u}{x} \cancel{-1} = x^3(u^2 + 2ux + x^2) + x^5 - 2x^4u - 2x^5$

$u' - \frac{u}{x} = x^3u^2 \cancel{+ 2ux^4} \cancel{+ x^5} \cancel{+ x^5} \cancel{- 2x^4u} \cancel{- 2x^5}$

$u' - \frac{1}{x}u = x^3u^2$ Bernoulli in u

$v = u^{1-2} = u^{-1}$

$v' = -1\,u^{-2}u'$

$\Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = -x^3$ linear in v

$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}.dx} = |x|$

$v = \frac{1}{\mu(x)}\left[c + \int \mu(x) \cdot g(x) \, .dx\right]$

$v = x^{-1}\left[c + \int x \cdot -x^3 \, .dx\right]$

$v = x^{-1}\left[c - \frac{x^5}{5}\right] \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x}c - \frac{x^4}{5}$

$u = \frac{x}{c} - \frac{5}{x^4} \Rightarrow y - x = \frac{x}{c} - \frac{5}{x^4}$

$y = x + \frac{x}{c} - \frac{5}{x^4}$ #

Q58:- Find the general sol. to the D.E

مهم

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 4y'' - 2y' - 5y = 0$$

sol. $r^4 + 2r^3 + 4r^2 - 2r - 5 = 0$ بالتجريب $r = 1$

$(r-1)(r^3 + 3r^2 + 7r + 5) = 0$ ← بالقسمة الطويلة

بالتجريب $r = -1$

$(r-1)(r+1)(r^2 + 2r + 5) = 0$ ← بالقسمة الطويلة

$r_1 = 1 \quad r_2 = -1 \quad r_{3,4} = -1 \pm 2i$

$y_1 = e^x \quad y_2 = e^{-x} \quad y_4 = e^{-x}\sin 2x \quad y_3 = e^{-x}\cos 2x$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x}\cos 2x + c_4 e^{-x}\sin 2x$$

Q59:- Find the form of the particular sol. $y_p(x)$ to the non-homo. D.E. :

مهم

$$y'' - 8y' + 16y = e^{2x}\sin(4x) + 3e^{4x} + x$$

[dont evaluate constants] ?

sol. $y'' - 8y' + 16y = 0$

$r^2 - 8r + 16 = 0$

$(r-4)(r-4) = 0$

$y_1 = e^{4x} \quad y_2 = e^{4x}x$

$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$

$g(x) = \underbrace{e^{2x}\sin(4x)}_{1} + \underbrace{3e^{4x}}_{2} + \underbrace{x}_{3}$

$y_{p_1} = Ae^{2x}\sin 4(x) + Be^{2x}\cos(4x)$

$y_{p_2} = Ce^{4x}\cdot x^2$ → تشابه

$y_{p_3} = Dx + E$

$y_p = Ae^{2x}\sin 4x + Be^{2x}\cos(4x) + Ce^{4x}x^2 + Dx + E$ #

Q60:- Find a second linearly independent solution $y_2(x)$ to the D. E : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $x \neq 0$ if the $W[y_1, y_2] = x^2 e^{-x}$, and $y_1(x) = 3x$

sol. $y_2 = y_1 \int \frac{w(y_1, y_2)}{(y_1)^2} \cdot dx = 3x \int \frac{x^2 e^{-x}}{9x^2}$

$= \frac{1}{3} x \int e^{-x} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{-x e^{-x}}{3}}$ #

Q61:- Find the Laplace trans. $Y(s)$ of the sol. $y(t)$ of the I.V.P $y'' + y' - y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

$\mathcal{L} y'' + \mathcal{L} y' - \mathcal{L} y = \mathcal{L} 2 \Rightarrow s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{2}{s}$

$\Rightarrow s^2 Y(s) - 1 + sY(s) - Y(s) = \frac{2}{s}$

$(s^2 + s - 1) Y(s) = \frac{2}{s} + 1 \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2+s}{s(s^2+s-1)}}$ #

Q62:- Find $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$

sol. $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s+4)(s+2)}$ partial fraction $= \mathcal{L}^{-1} \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2}$

$1 = A(s+2) + B(s+4)$

when $\Rightarrow s = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

when $\Rightarrow s = -4 \Rightarrow A = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \frac{-\frac{1}{2}}{s+4} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$

$= -\frac{1}{2} e^{-4t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$ #

Q_{63} :- Find $\mathcal{L}^{-1} \ln\left(\frac{s^2-3}{s^2+4}\right)$

مهم

Sol. $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(s^2-3) - \ln(s^2+4)\}$ but $f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1} F'(s)$

so $\frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s}{s^2-3} + \frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s}{s^2+4}$

$= \frac{-2\cosh(\sqrt{3}t)}{t} + \frac{2\cos 2t}{t}$ #

Q_{64} :- Given that $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{(c-1)e^5}{s^3}$, where $\mathcal{L}$ denotes Laplace trans., then find the values of of c ?

Sol. $\cancel{\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{(c-1)e^5}{s^3}$

$f(t) = e^5 \mathcal{L}^{-1}\frac{(c-1)}{s^{2+1}}$

but $t^2 = \frac{2!}{s^{2+1}} \Rightarrow c-1 = 2!$

$\boxed{c = 3}$

Q_{65} :- The solution to the I.V.P : $y' - y = g(t)$, $y(0)=0$

where $g(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le 1 \\ 1 & , t<1 \end{cases}$, find it ?

Sol. $\mathcal{L}y' - \mathcal{L}y = \mathcal{L}u(t-1) \Rightarrow sY(s) - Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$

$Y(s)(s-1) = \frac{e^{-s}}{s}$

$\mathcal{L}^{-1}Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-s}}{s(s-1)}$

$e^{-s} = A(s-1) + Bs$

$s=0 \Rightarrow A=-1$, $s=1 \Rightarrow B = e^{-1}$

$\mathcal{L}^{-1}\ \frac{-1}{s} + \frac{e^{-1}}{s-1}$

$= -1 + e^{-1}e^{t}$

Q_{66}:- Find the inverse Laplace trans. $\mathcal{L}^{-1} \ln\left(\frac{s^2+4s+8}{s^2}\right)$

Sol.
$$\mathcal{L}^{-1} \ln(s^2+4s+8) - \mathcal{L}^{-1} \ln(s^2)$$

$$= \frac{-1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{2s+4}{(s^2+4s+8)} + \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{28}{s^2}$$

$$\frac{-1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4} + \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s}$$

$$\frac{-2e^{-2t} \cdot \cos(2t)}{t} + \frac{2}{t}$$

Q_{67}:- Find the inverse Laplace trans. $\mathcal{L}^{-1} \frac{2s+1}{s^2-2s+5}$?

Sol.
$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2s+1}{s^2-2s+1-1+5} = \mathcal{L}^{-1} \frac{2s+1}{(s-1)^2+4}$$

$$2 \mathcal{L}^{-1} \frac{s-1+1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s-1)^2+4}$$ حابش

$$2 \mathcal{L}^{-1} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+4} + \frac{2}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

$$\boxed{2e^{t}\cos 2t + \frac{3}{2} e^{t} \sin 2t}$$ #

أنت قوي ، لا عليك من كلام المحبطين..

أنت تستطيع كل يوم تعيش نفس الحياه في المكان نفسه

مع نفس الأشخاص ... ألا يعتبر هذا بحد ذاته كفاحاً..♥

Q68:- Find the wronskian of any two sol. of the D.E

$$xy'' + (x+1)y' + y = 0 \quad ; \; x > 0$$

Sol.:- $y'' + \left(1+\frac{1}{x}\right)y' + \frac{1}{x}y = 0$

$$W[y_1, y_2] = e^{-\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-(x+\ln x)}$$

$$= e^{-x} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{e^{-x}}{x}}$$

Q69:- let $y(x)$ be the sol. for the D.E

$$(y - xe^x - e^x)\,dx + x\,dy = 0 \quad ; \; x > 0 \quad \text{with } y(1) = e$$

Find $y(3)$?

$$xy' + y - xe^x - e^x = 0 \Rightarrow xy' + y = xe^x + e^x$$

$$y' + \frac{1}{x}y = e^x\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = \boxed{x}$$

$$y = \frac{1}{x}\left[c + \int x\cdot\left(e^x + \frac{e^x}{x}\right)\right] \Rightarrow = \frac{1}{x}\left[c + \int e^x(x+1)\right]$$

اجزاء

$$y = \frac{1}{x}\left[c + (1+x) - \int e^x\,dx\right]$$

$$y = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} + 1 - e^x \quad \#$$

Q70:- Find the integrating factor of the diff. eq.

$$(x^4 + 2x)\,dy + (yx^3 + 2x^4 - 4y)\,dx = 0 \quad ; \; x, y > 0 \, ?$$

Sol. $M_y = x^3 - 4$

$N_x = 4x^3 + 2$

Non-exact

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x^3 - 4 - 4x^3 - 2}{x^4 + 2x} = \frac{-3x^3 - 6}{x^4 + 2x}$$

$$\frac{-3\cancel{(x^3+2)}}{x\cancel{(x^3+2)}} = \boxed{\frac{-3}{x}} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{-3}{x}} \ldots$$

كمل

Q71:- If $y_1 = e^{x^2}$ is a sol. of the D.E : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ where $p(x)$ and $q(x)$ are continuous functions on $\mathbb{R}$. Find a second linearly independent sol. $y_2(x)$ given that $W[y_1, y_2] = x e^{2x^2}$

sol. $y_2 = e^{x^2} \int \frac{x \cancel{e^{2x^2}}}{\cancel{e^{2x^2}}} \cdot dx = e^{x^2} \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{x^2}$ #

ملاحظة بسيطة بس مهمة : هاد سؤال مع دائرة لكن ما كان الجواب
هيك بالخيارات ⟸ الجواب كان $x^2 \cdot e^{x^2}$ بالرغم انو الطالب
نفكر انو مش حل والدوائر غلط لكن فعليا هو صح ...
ليش ؟؟ لأنو ضرب بـ solution بأي ثابت ما بأثر فيه
الجواب الصح $x^2 \cdot e^{x^2}$ عشان هيك ⟸ $\cancel{2} * \frac{x^2}{\cancel{2}} e^{x^2}$
يا ريت تركز على هالمعلومة ... ♥

Q72: If $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is a series sol. of a linear O.D.E of a second order which satisfying the recursive relation $(n+2)a_{n+2} - (n+3)a_{n+1} - a_n = 0$ under the initial V.P $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Sol: we know $y^{(n)}(0) = n!\, a_n$, then $y(0) = 0!\, a_0 = \boxed{1}$ المشتقة صفر

$y'(0) = 1! \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$

if $n=0 \Rightarrow (0+2)a_2 - (0+3)a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -1}$

if $n=1 \Rightarrow (1+2)a_3 - (1+3)a_2 - a = 0$

$3a_3 - 4(-1) - -1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{-5}{3}}$ موجود دائرة وضمن الخيارات #

Q73:- If $Y(s)$ is the laplace trans. of the sol. $y(t)$ of the I.V.P $y'' + 3y = u(t-2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$?

Sol. $\mathcal{L}y'' + 3\mathcal{L}y = \mathcal{L}u(t-2)$

$$s^2 Y(s) - \cancel{s\,y(0)} - y'(0) + 3Y(s) = \frac{e^{-2s}}{2}$$

zero

$$Y(s)(s^2+3) - 1 = \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{e^{-2s} + s}{s(s^2+3)}} \quad \#$$

Q74:- using the substitution $u = xy$ for the D.E $xy'' + (2+2x)y' + 2(1+x)y = 0$, Find the resulting D.E will be ?

Sol. $y = \frac{u}{x} \Rightarrow y' = \frac{xu' - u}{x^2}$

$$y'' = \frac{x^2(xu'' + \cancel{u'} - \cancel{u'}) - (xu' - u)\,2\cancel{x}}{\cancel{x^4}}$$

$$= \frac{x^2u'' - 2xu' + 2u}{x^3}$$

نعوض القيم الآن بالمعادلة $\Rightarrow$

$$\frac{x^2u'' - 2xu' + 2u}{x^2} + (2+2x)\left(\frac{xu' - u}{x^2}\right) + \frac{2xu + 2u}{x} = 0$$

نضرب بـ x^2 $\Rightarrow$

$$x^2u'' - \cancel{2xu'} + \cancel{2u} + \cancel{2xu'} - \cancel{2u} + 2x^2u' - \cancel{2xu} + 2x^2u + \cancel{2xu} = 0$$

$$x^2u'' + 2x^2u' + 2x^2u = 0 \qquad \div x^2$$

$$\boxed{u'' + 2u' + 2u = 0}$$

اجابة ضع دائرة

Q75 :- If $F(s) = \dfrac{s+2}{s^3+1}$ is the laplace trans. of the function $f(t)$, then find the valus of $\mathcal{L}\ t \cdot f'(t)$ at $s=1$?

sol :- $\mathcal{L}\ t \cdot f'(t) = (-1)^1 \dfrac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\ f'(t)\right]$

$= (-1)^1 \cdot \dfrac{d}{ds}\left[s\,\cancel{F}(s) - \cancel{f(0)}\right]$ but $y(s) = \mathcal{L}\ f(t)$

ثابت مشتقة صفر

$= (-1) \cdot \dfrac{d}{ds}\left[s\ \mathcal{L}\ f(t)\right] = -1 \cdot \left[s F'(s) + F(s)\right]$

but $F'(s) = \dfrac{s^3+1-(s+2)3s}{(s^3+1)^2}$

$- \left[s \cdot \dfrac{s^3+1-3s^2-6s}{(s^3+1)^2} + \dfrac{s+2}{s^3+1}\right]\Bigg|_{s=1}$

$- \left[1 \cdot \dfrac{1+1-3-6}{(2)^2} + \dfrac{1+2}{1+1}\right]$

$= -1\left[\dfrac{-7}{4} + \dfrac{6}{4}\right] = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ #

Q76 :- suppose that $y_1(x) = 6e^{3x} + 5xe^x$ and $y_2(x) = 3e^{-2x} + 5xe^x$ are two sol. of the D.E $y'' + by' + cy = g(x)$, where b and c are constants, Then find the general sol. to this D.E ?

يتبع ⟹

Sol: بما ان b, c constant اذا constant coeff.
يعني ميكون الحل اما مكرر او مختلفين او complex.
لكن الحلول ليست على الأشكال الطبيعية يلي ذكرتهم فوق
يعني مضاف الهم اقتران هو y_p يعني $g(x) \neq 0$
اذا يجب ان يكون y_p ظاهر بالحلين بدون تغيير:

$$y_1 = \boxed{6e^{3x}} + \boxed{5xe^{x}}$$
$$y_2 = \boxed{3e^{-2x}} + \boxed{5xe^{x}}$$

$\Rightarrow$ so $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + 5xe^{x}$

واضح هدول حلول Homo y_h

هذا مضاف y_p

جواب بخود دائرة ...

Q_{77}: If $y(x) = x^m$ is a sol. of the D.E
$x^2y'' - x(2x+4)y' + (4x+6)y = 0$; $x>0$
for some $m \in \mathbb{R}$, find the general sol. of this D.E ?

سؤال صعب . بس نلوث وهش ميكب ...

sol. يجب علينا اولاً ايجاد قيمة m لنعوض sol. يعني يحقق المعادلة

$y(x) = x^m \Rightarrow y'(x) = m x^{(m-1)} \Rightarrow y''(x) = m(m-1)x^{(m-2)}$

نعوض الآن : $x^2 m(m-1)x^{m-2} - x(2x+4)m x^{m-1} + (4x+6)x^m = 0$

$m(m-1)x^m - (2xm - 4m)x^m + (4x+6)x^m = 0$

نقسم على x^m حيث $x>0$ $\Rightarrow (m^2 - m) - 2mx - 4m + 4x + 6 = 0$

$(4-2m)x + (m^2 - 5m + 6) = 0$

يتبع $\Rightarrow$

$m^2 - 5m + 6 = 0$ —— (1)

$4 - 2m = 0$ —— (2)

$\to \boxed{m = 2}$ نعوضها

$\Rightarrow 4 - 10 + 6 = 0$

$6 - 6 = 0$

$0 = 0$

اذا تحقق $m=2$ المعادلتين

اذا تحقق $2 = m$

$y_1(x) = x^2 \Rightarrow x^2 y'' + (-2x^2 - 4x)y' + (4x+6)y = 0$

هذا الحل الأول

$\div x^2 \quad y'' + \underbrace{\left(-2 - \frac{4}{x}\right)}_{p(x)} y' + \left(\frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right) y = 0$

المعادلة reduction

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx = x^2 \int \frac{e^{\int 2 + \frac{4}{x}\,dx}}{x^4}$$

$$= x^2 \int \frac{e^{2x} \cdot \cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}\,dx = \boxed{\frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2}}$$

$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 e^{2x}$

هذا هو المطلوب #

لاحظ ضرب $\frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2}$ بـ $\boxed{2}$ لذلك قلنا أن

ضرب الـ solution بأي ثابت لا يؤثر اطلاقاً

على الحل ... ركز كثير بتيجي هالفكرة سنوات

والطالب بفكر انو فش اجابة والسؤال غلط ...

Q78 :- Find the inverse Laplace trans. of $F(s) = \frac{s-4}{s^2-4s+8}$

Sol.

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s-4}{s^2-4s+8} \qquad \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \boxed{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{s-4}{s^2-4s+4-4+8} = \mathcal{L}^{-1} \frac{s-4}{(s-2)^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{(s-2)-2}{(s-2)^2+4} = \mathcal{L}^{-1} \frac{s-2}{(s-2)^2+4} - \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(s-2)^2+4}$$

$$= e^{2t} \cos(2t) - e^{2t} \sin(2t)$$

$$= e^{2t}\left(\cos(2t) - \sin(2t)\right) \Rightarrow$$ اجابة ضع دائرة

Q79 :- using an appropriate substitution to transform the D.E : $4y^2 \cdot dx - x(2x^3+y)\,dy = 0$ into linear equation , Find the resulting equation ?

sol.

$$4y^2x' - (2x^4+yx) = 0$$

$$4y^2x' - 2x^4 - yx = 0 \Rightarrow x' - \frac{2x^4}{4y^2} - \frac{yx}{4y^2} = 0$$

$$x' - \frac{1}{4y}x = \frac{1}{2}x^4y^{-2} \Rightarrow v = x^{1-4} = -3x^{-4}x'$$

$$\boxed{v' + \frac{3}{4}\frac{1}{y}v = \frac{-3}{2}y^{-2}} \Rightarrow$$ اجابة ضع دائرة

#

Q80:- If $\mathcal{L}^{-1}\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) = \frac{\sin 2t}{t}$, Find $\int_0^{\infty}\frac{\sin 2t}{t}\,dt$

Sol:-

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2t}{t}\,dt = \int_0^{\infty}e^{-(0)t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 2t}{t}\right\}\Bigg|_{s=0}$$

but $\mathcal{L}^{-1}\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) = \frac{\sin 2t}{t}$ $\xrightarrow[\text{للطرفين}]{\text{نأخذ } \mathcal{L}}$ $\tan^{-1}\frac{2}{s}\Big|_{s=0} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin(2t)}{t}\right\}\Big|_{s=0}$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{2}{0} \rightarrow \boxed{\infty}$

Q81:- use the substitution $u = xy$ to find the general Sol. of the D.E $\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)dx + 3xy\,dy = 0$

Sol. $y = \frac{u}{x} \Rightarrow y' = \frac{xu'-u}{x^2}$

$$y^2 + \frac{1}{x^2} + 3xy\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

نعوض بالفرض

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3u\left[\frac{xu'-u}{x^2}\right] = 0$$

نضرب كل الحدود بـ x^2

$$\Rightarrow u^2 + 1 + 3uxu' - 3u^2 = 0$$

$$-2u^2 + 1 + 3uxu' = 0$$

$$3uxu' = 2u^2 - 1$$

$$3x\,u' = \frac{2u^2-1}{u}$$

يتبع $\rightarrow$

$$\int \frac{u}{2u^2-1}\, du = \frac{1}{3x} \cdot dx \rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{4u}{2u^2-1} \cdot du = \int \frac{1}{3x} \cdot dx$$

$$\frac{1}{4} \ln|2u^2-1| = \frac{1}{3} \ln|x| + C$$

نرجع الفرض

$$\frac{1}{4} \ln|2x^2y^2-1| = \frac{1}{3} \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{3} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|2x^2y^2-1| = -C$$

نضرب كل المعادلة بـ 3 عشان نوصل لجواب ضع الدائرة

$$\ln|x| - \frac{3}{4} \ln|2x^2y^2-1| = -3C$$

نسميه C'

$$\boxed{\ln|x| - \frac{3}{4} \ln|2x^2y^2-1| = C'}$$

#

FinishEd...

* رجاء لا ننسى الفضل العظيم للمهندس الفخم "حسن الطريفي" فيديوهاتو كانت كافية وزيادة جداً لإنجاز هيك عمل..

ركز - بحالك - وانسى - العالم... ♥

دعوة - إلي - بالطهر - الغيب... ♥

دعوة - لوالدي - ووالدتي ... ♥

▪ اللهم اني اسألك علماً نافعاً يا الله... ♥

▪ تمّ بحمد الله... ♥

Motivation- From- shrouq- Altiti... ♥

← انت الكوتش لحياتك...

وهيك تبكون خلصت معركة هالفصل....

اختمها بهمة وانجاز.....

ونهاية تعبك خليها تكون حلوة....

هي فترة أسبوع وبس ، اتعب فيها وارتاح بعدين..

معك عطلة شهر وشوي ، اعمل فيها اللي بدك

اياه ، بس هسا دراسة وتركيز عشان نحصد نتاج تعبنا...♥

صاحب- الهدف- لا - ينخدع - لمغريات الطريق...♥

← جزيل الشكر للمبدع المهندس أنس المحروق...

← جزيل الشكر للدعم المعنوي من الطالبة شروق الطيطي..

← جزيل الشكر للدعم المعنوي من الطالب يزن الخطيب..

إعداد: عمر موسى الخواجا

0786160562

إن الذي يرتجي شيئا بهمته

يلقاه لو حاربته الانس والجن...♥